

doi: 10.5862/MCE.57.5

## Анализ прогиба решетчатой балочной фермы распорного типа

*Д-р физ.-мат. наук, профессор М.Н. Кирсанов,  
Национальный исследовательский университет «МЭИ»*

**Аннотация.** Получена аналитическая зависимость прогиба плоской упругой статически определимой фермы при равномерном нагружении верхнего пояса. Усилия определялись методом вырезания узлов. Система уравнений равновесия составлена в матричной форме. Использована формула Максвелла-Мора для вычисления прогиба середины пролета.

Все символьные преобразования выполнены в системе компьютерной математики Maple. Использован метод индукции по числу панелей фермы. Рекуррентные уравнения для общих членов последовательностей коэффициентов получались и решались с помощью операторов пакета genfunc системы Maple.

Отмечается характерная для решетчатых распорных конструкций немонотонность зависимости усилий в стержнях фермы и ее прогиба от числа панелей. Показано также, что для нечетного числа панелей ферма мгновенно изменяема. Приведено распределение возможных скоростей узлов для этого случая.

**Ключевые слова:** ферма; прогиб; кинематическая изменяемость; метод индукции; точное решение; Maple

### Введение

Балочные фермы под действием вертикальной нагрузки, как правило, не создают горизонтальной реакции в опорах. Исключение составляют статически определимые фермы со сложной решеткой и двумя неподвижными опорами [1, 2]. Решетки таких ферм без опор представляют собой механизмы с одной степенью свободы. Две неподвижные опоры создают одну дополнительную связь, превращая механизм в статическую конструкцию. Фермы такого рода являются распорными и обладают, помимо всего прочего, еще одной особенностью: напряженное состояние и деформации в них зависят от четности числа панелей. Зависимость периодичности от четности числа ячеек замечена также и в пространственных фермах [3]. Аналитические зависимости прогиба от числа панелей для различных схем ферм исследовались в [4–9], практические проблемы расчета и оптимизации стержневых систем (численными и аналитическими методами) анализировались в [10–17]. Отдельно следует выделить зарубежные работы [18–20], в которых аналитическим решениям уделяется особое внимание. В учебнике под редакцией В.В. Горева [21] приводится достаточно распространенная [22] формула для оптимальной высоты фермы, косвенно учитывающая тип решетки.

Обзор доступной отечественной и зарубежной литературы показывает, что аналитическим решениям уделялось мало внимания, а известные решения относятся к простым безраспорным (как правило, балочным) конструкциям и построены на не очень убедительном приближенном представлении дискретной структуры в виде балки с неизменно сопутствующей при этом потерей точности. Особенно это относится к фермам, подобным ниже рассмотренной, которые в отсутствии опор представляют собой механизм, а усилия в стержнях заметно отличаются от усилий в аналогичных фермах с простой решеткой. Представление такой конструкции в виде балки в корне противоречит распорному характеру этой системы. Именно этот факт вызывает необходимость применять дискретные методы расчета с индукцией по числу панелей.

### Схема фермы

Рассмотрим ферму с раскосной решеткой (рис. 1). Панели в традиционном их понимании в такой ферме выделить трудно. Будем условно понимать под панелью ячейку периодичности стержней и узлов между двумя соседними наклонными раскосами. В крайних панелях (по две с каждого края) стержней меньше. Таким образом, число панелей совпадает с числом стержней нижнего (верхнего) пояса. Обе опоры фермы – шарнирно неподвижные. Конструкция при этом статически определимая. Действительно, в ферме, состоящей из  $n = 2k$  панелей, число стержней  $m = 4n + 4$ , включая четыре стержня, моделирующие неподвижные опоры. Число шарниров равно  $2n + 2$ , следовательно, система уравнений равновесия узлов (по два уравнения на каждый узел в проекциях на оси координат) замкнута.

Кирсанов М.Н. Анализ прогиба решетчатой балочной фермы распорного типа

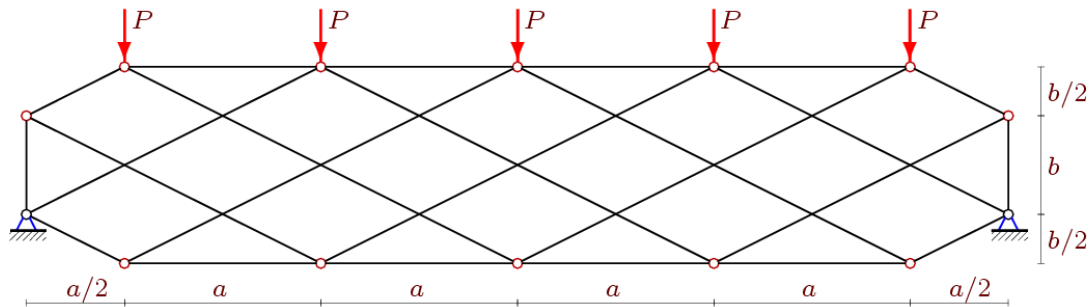


Рисунок 1. Ферма.  $n = 6$

Предлагаемая схема фермы относится к ограниченному числу ферм с периодической структурой, поиск которых представляет отдельную задачу механики [19].

### Математическая модель. Система уравнений

Усилия в стержнях фермы, нагруженной по верхнему поясу равномерной нагрузкой, определим методом вырезания узлов. Для вычисления проекций усилий на оси координат потребуются направляющие косинусы усилий, которые удобно находить, зная координаты концов стержня. Шарниры фермы пронумеруем сначала по нижнему поясу слева направо, затем по верхнему. Начало координат расположим в левой опоре:

$$x_1 = x_{n+2} = 0, y_1 = b/2, x_{i+1} = x_{i+n+2} = (i-1/2)a, y_{i+1} = 0, y_{i+n+2} = 2b, i = 1, \dots, n-1,$$

$$x_{n+1} = x_{2n+2} = x_n + a/2, y_{n+1} = y_1, y_{n+2} = y_{2n+2} = 3b/2.$$

Порядок соединения узлов и стержней решетки фермы зададим условными векторами  $\bar{V}_i, i = 1, \dots, m$ . Компонентами этих векторов являются номера шарниров по их концам. Направления конфигурационных векторов произвольны, служат только для задания структуры соединений стержней и шарниров и не влияют на правило знаков усилий в стержнях, которое остается общепринятым: сжатые стержни имеют отрицательные усилия, растянутые – положительные. Для стержней решетки имеем следующие векторы:

$$V_i = [i, i + n + 3], V_{i+n-1} = [i + 2, i + n + 1], i = 2, \dots, n - 1.$$

Для стержней нижнего и верхнего пояса:

$$\bar{V}_{i+2n-2} = [i, i + 1], \bar{V}_{i+3n-2} = [i + n + 1, i + n + 2], i = 1, \dots, n,$$

$$\bar{V}_{4n-1} = [1, n + 2], \bar{V}_{4n} = [n + 2, 2n + 2].$$

Длины стержней и проекции их векторных представлений на оси координат:

$$l_i = \sqrt{l_{1,i}^2 + l_{2,i}^2}, l_{1,i} = x_{V_{i,2}} - x_{V_{i,1}}, l_{2,i} = y_{V_{i,2}} - y_{V_{i,1}}, i = 1, \dots, m,$$

где  $m$  – число стержней фермы; в номере  $V_{i,j}$  первый индекс  $i$  – это номер стержня, второй – номер компоненты вектора  $\bar{V}_i$  и принимает значение 1 (условное начало стержня-вектора) или 2 (условный конец стержня). Матрица направляющих косинусов  $G$  имеет следующие элементы

$$G_{k,i} = -l_{j,i} / l_i, k = 2V_{i,2} - 2 + j, k \leq m, j = 1, 2, i = 1, \dots, m,$$

$$G_{k,i} = l_{j,i} / l_i, k = 2V_{i,1} - 2 + j, k \leq m, j = 1, 2, i = 1, \dots, m.$$

Систему линейных уравнений равновесия узлов запишем в матричной форме:

$$\mathbf{G}\bar{S} = \bar{Y}. \quad (1)$$

Здесь  $\bar{S}$  – вектор неизвестных усилий длиной  $m$ ;  $\bar{Y}$  – вектор нагрузок. Горизонтальные нагрузки, приложенные к узлу  $i$ , записываются в нечетные элементы  $Y_{2i-1}$ , вертикальные – в четные  $Y_{2i}$ .

Решение находим с помощью обратной матрицы  $\bar{S} = \mathbf{G}^{-1}\bar{Y}$ . Метод обратной матрицы особенно удобен при неоднократном решении системы с разными правыми частями. При определении перемещения узлов система уравнений решается дважды: один раз при вычислении усилий от действия внешней нагрузки, второй раз – от действия единичной силы, приложенной к заданному узлу, перемещение которого определяется.

### Расчет

Пробное вычисление усилий в стержнях по системе (1) сразу же выявило закономерность: для нечетного числа панелей определитель системы линейных уравнений обращается в ноль. Это явилось указанием на кинематическую изменяемость конструкции с нечетным числом панелей. Действительно, при  $n=5$  существует поле возможных скоростей узлов (рис. 2). Скорости узлов 3, 4, 6, 7, 10 и 11 горизонтальны и равны  $v$ , скорости узлов 2, 5, 8 и 9 равны  $v'$  и наклонены к горизонту под углом  $\alpha$ . При этом стержни 6-7, 2-9, 3-4, 4-11, 10-11 совершают мгновенно поступательное движение, а стержни 1-2, 1-6, 1-8, 12-5, 12-11, 12-9 – вращательное движение вокруг соответствующих опор. Остальные стержни 7-8, 8-9, 9-10, 2-3 и 4-5 совершают плоское движение. Исходя из теоремы о проекции скоростей точек на отрезок, соединяющий точки, очевидно соотношение  $v = v' \cos \alpha$ ,  $\operatorname{tg} \alpha = a/b$ . Оно доказывает непротиворечивость поля возможных скоростей узлов.

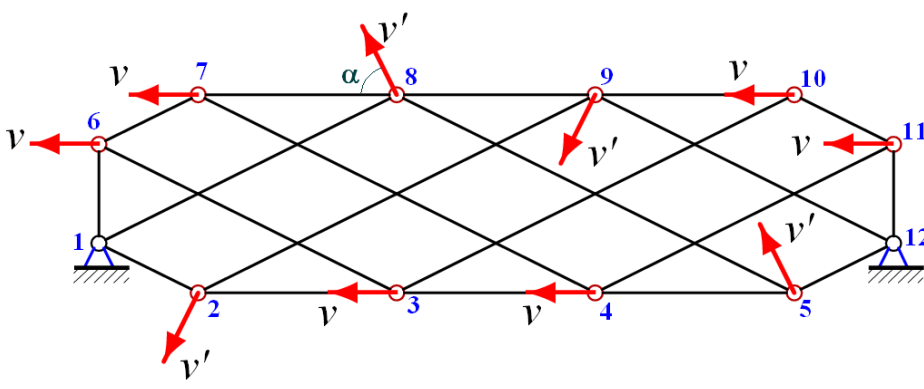


Рисунок 2. Схема возможных скоростей в мгновенно изменяемой ферме,  $n = 5$

Аналогичную схему скоростей можно привести для любого нечетного числа панелей, в то время как для четного числа такого поля нет. Далее будем рассматривать фермы с четным числом панелей  $n = 2k$ .

Выведем зависимость прогиба середины пролета фермы от числа панелей и ее геометрических параметров. Для получения символьной формы решения используем систему компьютерной математики Maple [23, 24]. Обозначим усилия в стержнях фермы от внешней нагрузки, приложенной к верхнему поясу,  $S_{i,p}$ , усилия от единичной вертикальной нагрузки, приложенной к центральному узлу в середине пролета, –  $s_i$ . Жесткости  $EF$  всех стержней принимаем одинаковыми, деформациями опорных стержней пренебрегаем.

Прогиб центрального узла нижнего пояса фермы определяем по формуле Максвелла – Мора:

$$\Delta = \frac{1}{EF} \sum_{i=1}^m S_i s_i l_i = P \frac{C_1 a^3 + C_2 b^3 + C_3 (a^2 + b^2)^{3/2}}{2b^2}. \quad (2)$$

Коэффициенты  $C_1, C_2, C_3$  получены индуктивным методом и имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} C_1 &= (72(1+k)\zeta_1 + 72(2-k)\zeta_2 + (1-2k)(4k^2 - 4k + 75)\zeta_3 + 10k^4 - 20k^3 + 8k^2 + 2k - 147) / 48, \\ C_2 &= (2-k)\zeta_1 - (k+1)\zeta_2 - (3\zeta_3 + 1) / 2, \\ C_3 &= ((6k-1)\zeta_1 + (5-6k)\zeta_2 + 3(1-2k)\zeta_3) / 4, \end{aligned} \quad (3)$$

где  $\zeta_1 = \cos(\pi k / 2)$ ,  $\zeta_2 = \sin(\pi k / 2)$ ,  $\zeta_3 = \cos(\pi k)$ . Общие члены последовательностей получены обобщением решений 26 ферм с числом панелей от 2 до 52. Последовательность коэффициентов  $C_1$ , например, имеет вид: 0, -12, 16, 16, 104, 128, 436, 568, 1192, ..., 85108. Рекуррентное уравнение для общего члена последовательности найдено с помощью специального оператора **rgf\_findrecur** из состава пакета **genfunc** системы Maple и имеет вид

$$C_{1,k} = C_{1,k-1} + 2C_{1,k-2} - 2C_{1,k-3} + C_{1,k-4} - C_{1,k-5} - 4C_{1,k-6} + 4C_{1,k-7} + C_{1,k-8}.$$

Для коэффициента  $C_2$  последовательность имеет, на первый взгляд, более сложный вид: 0, 0, 8, 0, 0, 8, 16, 0, 0, 16, 24, 0, 0, ..., 48; однако полученное уравнение имеет седьмой порядок. Наиболее трудной для обобщения оказалась немонотонная последовательность коэффициентов  $C_3$ : 0, -5, 8, 3, 5, -10, 29, 14, 18, -7, 58, ..., 150, 85. Соответствующее рекуррентное уравнение для членов этой последовательности имеет девятый порядок. Для сравнения заметим, что в работе [2], где также был обнаружен эффект влияния четности числа панелей на состояние фермы, порядок аналогичного уравнения был всего лишь пятый. Увеличение порядка уравнения приводит к резкому увеличению времени аналитических преобразований. Программа Maple, в которой производились вычисления, позволяет фиксировать и анализировать затраченное время (оператор **time()**). Приближенная зависимость затраченного времени от числа панелей в рассматриваемом случае оказалась четвертой степени:  $t = 5,6 \cdot 10^{-4} k^4$ , где  $t$  – время в секундах,  $k = n / 2$ . С помощью оператора **rsolve** были найдены решения рекуррентных уравнений (3).

### Анализ решения

Аналитическое решение (2) ценно не только своей простотой, но и возможностью его использования как тестового при отладке численных методов и для функционального анализа характерных для конструкции зависимостей. Можно, например, провести предельный анализ решения (2). Если зафиксировать суммарную нагрузку  $P_{sum}$  на ферму, положив усилие на каждый узел верхнего пояса зависящим от числа панелей, и задать некоторую длину пролета, то есть

$$L = a(n-1), \quad P = P_{sum} / (n-1), \quad (4)$$

то получим следующий предел:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \Delta / k = P_{sum} b / 16.$$

Зависимость (3) при  $L = 20$  м отображена на графике (рис. 3). Здесь введено обозначение  $\tilde{\Delta} = \Delta EF / P_{sum}$ . Далее все величины  $\tilde{\Delta}$  – в метрах.

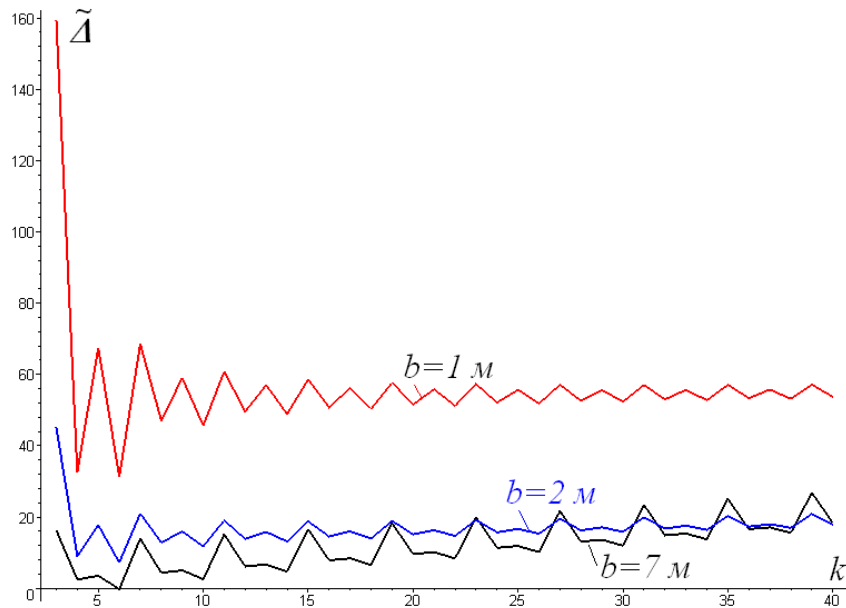
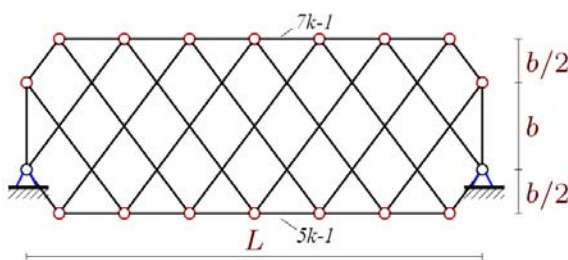
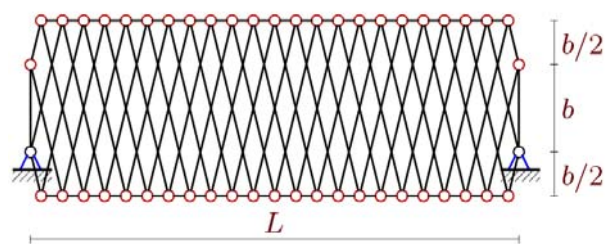


Рисунок 3. Зависимость прогиба от числа панелей

Скачкообразные зависимости на рисунке объясняются наличием характерных «мигающих» слагаемых в коэффициентах (3). Кроме того, не следует забывать, что значения прогиба вычисляются лишь для целых  $k$ , а кривые изображены условно, для наглядности. Другой замеченной особенностью решения является факт пересечения кривых при  $b = 7 м$  и  $b = 2 м$ , что означает равную жесткость ферм со значительной разностью высот и с одинаковым (хотя и большим) числом панелей.

При малом значении  $k$  также имеется особенность. При  $b = 1 м$  различие прогиба фермы с шестью панелями (рис. 2),  $\tilde{\Delta} = 159,3$ , и с восемью,  $\tilde{\Delta} = 32,6$  (рис. 4), многократно. С увеличением высоты это различие уменьшается. Уменьшается размах колебаний значений прогиба и с увеличением  $k$ . Для сравнения отметим, что если в рассматриваемой ферме рост прогиба линейный, то в других аналогичных фермах (с простой решеткой) рост квадратичный или даже кубический. Характерно в полученной зависимости также то, что увеличение числа панелей на единицу длины пролета, начиная с некоторых значений  $k$ , почти не сказывается на жесткости конструкции.

Рисунок 4. Ферма.  $n = 8$ Рисунок 5. Ферма.  $n = 24$ 

Материала на ферму с 24 панелями (рис. 5,  $\tilde{\Delta} = 49,6$ ) затрачивается значительно больше, чем на ферму с восемью панелями (рис. 4,  $\tilde{\Delta} = 32,6$ ), однако жесткости этих ферм вполне сопоставимы.

### Усилия в стержнях

Индуктивный метод позволяет при необходимости получить формулу для усилия в каждом из стержней фермы. Такая необходимость возникает при расчете прочности стержней на разрыв и анализе устойчивости сжатых стержней. Зависимости  $S_i(k)$ ,  $i=1, \dots, m$  можно было получить перед тем, как составить сумму (2), а прогиб получить, вычислив эту сумму. Однако для нахождения прогиба было значительно проще сразу найти сумму, избежав нахождения целого ряда разнообразных формул: отдельно для стержней нижнего пояса, отдельно – для верхнего и т. д. Если предположить, что наиболее сжатый стержень при заданной нагрузке находится в середине пролета (в соответствии с принятой нумерацией это стержень с номером  $7k-1$ , рис. 4), а наиболее растянутый – в середине нижнего пояса (номер  $5k-1$ ). Опуская промежуточные выкладки, запишем результат индукции:

$$S_{5k-1} = Pa \frac{k^2 - k - 3(\zeta_1 + \zeta_2 - 1)}{4b}, \quad S_{7k-1} = -Pa \frac{k^2 - k + 3(\zeta_1 + \zeta_2 - 1)}{4b}.$$

Кривые усилий на рисунке 6, построенные по этим зависимостям при заданной длине фермы и нагрузке (4), обнаруживают асимптоты. Усилия отнесены к суммарной нагрузке:  $\tilde{S} = S / P_{sum}$ .

Предельные значения легко находятся:  $\lim_{k \rightarrow \infty} \tilde{S}_{5k-1} = L / (16b)$ ,  $\lim_{k \rightarrow \infty} \tilde{S}_{7k-1} = -L / (16b)$ . Вычисление усилий в стержнях, соседних с центральными, то есть  $\tilde{S}_{7k}$  и  $\tilde{S}_{5k}$ , показало, что предположение о том, что в центральных стержнях поясов усилия экстремальны, неверно. Методом индукции получим:

$$S_{5k} = Pa \frac{k^2 - k + 3(\zeta_1 + \zeta_2) + 1}{4b}, \quad S_{7k} = -Pa \frac{k^2 - k - 3(\zeta_1 + \zeta_2) - 5}{4b}.$$

На рисунке показано, что при различных числах панелей номера стержней с экстремальными усилиями чередуются, однако предельные значения остаются теми же:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \tilde{S}_{5k} = L / (16b), \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \tilde{S}_{7k} = -L / (16b).$$

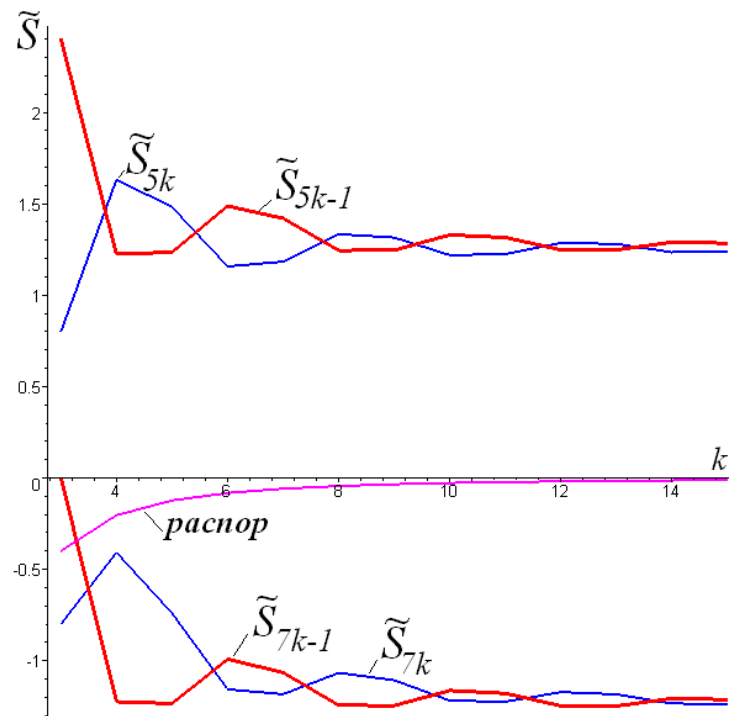


Рисунок 6. Усилия в стержнях.  $L = 20\text{м}$ ,  $h = 1\text{м}$



На рисунке 6 показана также кривая изменения распора конструкции в зависимости от числа панелей. Интересно отметить, что при фиксированных нагрузках и длине панели эта величина не зависит от числа панелей и равна  $-Pa / (2b)$ . С предположением (4) распор стремится к нулю с увеличением числа панелей – в пределе система становится безраспорной.

### Выводы

Расчет статически определимой фермы в аналитической форме, помимо искомым зависимостей прогиба и усилий в стержнях от нагрузки, размеров и числа панелей, выявил также и интересные особенности конструкции. Первое и главное то, что для нечетного числа панелей конструкция неработоспособна, она превращается в мгновенно изменяемый механизм. Сразу же это заметить невозможно. Более того, численный счет с не очень большой точностью может ввести исследователя в заблуждение относительно возможностей этой фермы. Дело в том, что в случае нечетного числа панелей определитель метода вырезания узлов равен нулю. А показать это для систем с большим числом стержней можно либо в символьной форме (предпочтительно), либо численно, но при очень аккуратных вычислениях и с большой точностью. Иначе можно получить распределение усилий в стержнях и даже прогиб, не соответствующие действительности.

Другая особенность этой системы, замеченная ранее для более простых распорных ферм [1, 2, 4], состоит в немонотонности большинства зависимостей в этой конструкции от числа панелей. При этом если в простейших случаях в зависимости входят слагаемые вида  $(-1)^n$ , нарушающие монотонность с периодом 2, то в данной задаче появляются слагаемые  $\sin(\pi n / 2)$ , имеющие уже период 4. Следствием является удлинение последовательности анализируемых коэффициентов и увеличение времени аналитических преобразований. Сами же конечные формулы не меняют свой характерный для таких задач полиномиальный вид, вполне обозримы и удобны в практических расчетах.

### Литература

1. Кирсанов М.Н. Балочная ферма, чувствительная к четности числа панелей // Актуальные вопросы в научной работе и образовательной деятельности. Сборник научных трудов по материалам Международной научно-практической конференции. 30 апреля 2014 г. Часть 2. Тамбов: ООО «Консалтинговая компания Юком», 2014. С. 52–53.
2. Кирсанов М.Н. Скрытая особенность и асимптотические свойства одной плоской балочной фермы // Строительная механика и расчет сооружений. 2014. №4. С. 9–12.
3. Кирсанов М.Н. Расчет пространственной стержневой системы, допускающей мгновенную изменяемость // Строительная механика и расчет сооружений. 2012. №3. С. 48–51.
4. Кирсанов М.Н. Аналитический расчет прогиба плоской решетчатой фермы треугольного очертания // Trends in Applied Mechanics and Mechatronics. М: Инфра-М. 2015. Т. 1. С. 28–30.
5. Жакетов Д.Д., Яцков В.Б. Прогиб плоской балочной фермы с треугольной решеткой // Наука и образование в XXI веке: сборник научных трудов по материалам Международной научно-практической конференции 31 октября 2014 г. в 17 частях. Часть 7. Тамбов, 2014. С. 34–36.
6. Тиньков Д.В. Анализ влияния условий закрепления на прогиб плоской балочной фермы с нисходящими раскосами // Trends in Applied Mechanics and Mechatronics. М: Инфра-М, 2015. Т. 1. С. 52–56.
7. Афанасьев В.А., Бойко О.О. Прогиб составной плоской балочной фермы с параллельными поясами // Актуальные вопросы образования и науки: сборник научных трудов по материалам Международной научно-практической конференции 30 сентября 2014 г.: в 11 частях. Часть 10. Тамбов: ООО «Консалтинговая компания Юком», 2014. С. 15–16.
8. Ахмедова Е.Р. Аналитический расчет прогиба плоской фермы со шпренгельной решеткой // Trends in Applied Mechanics and Mechatronics. М: Инфра-М, 2015. Т. 1. С. 62–65.
9. Заборская Н.В. О горизонтальном смещении опоры плоской балочной фермы // Перспективы развития науки и образования: сборник научных трудов по материалам Международной научно-практической конференции 28 февраля 2015 г.: в 13 частях. Часть 9. Тамбов: ООО «Консалтинговая компания Юком», 2015. С. 58–60. DOI: 10.17117/2015.02.28.09.
10. Клячин А.З. Металлические решетчатые пространственные конструкции регулярной структуры. Екатеринбург: Диамант, 1994. 276 с.

11. Марутян А.С., Григорьян М.Б., Глухов С.А. Пространственные решетчатые несущие конструкции (модули типа «Пятигорск»-2) // Строительная механика и расчет сооружений. 2014. №1. С. 64–71.
12. Алпатов В. Ю., Холопов И. С. Оптимизация геометрической формы пространственно-стержневых конструкций // Металлические конструкции. 2009. Т. 15. №1. С. 47–57.
13. Bacinskas D., Kamaitis Z., Jatulis D., Kilikevicius A. Field Testing of Old Narrow-Gauge Railway Steel Truss Bridge // Procedia Engineering. 2013. Vol. 57. Pp. 136–143.
14. Pholdee N., Bureerat S. Comparative performance of meta-heuristic algorithms for mass minimisation of trusses with dynamic constraints // Advances in Engineering Software. 2014. Vol. 75. Pp. 1–13.
15. Kaveh A, Shahrouzi M. Farshi B., Alinia-ziazi A. Sizing optimization of truss structures by method of centers and force formulation // International Journal of Solids and Structures. 2010. Vol. 47. Pp. 2508–2524.
16. Toklu Y.C., Bekdas G., Temur R. Analysis of trusses by total potential optimization method coupled with harmony search // Structural Engineering and Mechanics. 2013. Vol. 45. No. 2. Pp. 183–199.
17. Heyman J. Design of a simple steel truss // Proceedings of the Institution of Civil Engineers: Structures and Buildings. 2010. Vol. 163. No. 1. Pp. 53–56.
18. Hutchinson R.G., Fleck N.A. The structural performance of the periodic truss // Journal of the Mechanics and Physics of Solids. 2006. Vol. 54, Issue 4. Pp. 756–782.
19. Hutchinson R.G., Fleck N.A. Microarchitected cellular solids – the hunt for statically determinate periodic trusses // ZAMM Z. Angew. Math. Mech. 2005. Vol. 85. No. 9. Pp. 607–617.
20. Kmet S., Kokorudova Z. Nonlinear Analytical Solution for Cable Truss// J. Eng. Mech. 2006. 132(1). Pp. 119–123.
21. Металлические конструкции. Том 1(3). Элементы конструкций / Под. ред. Горева В.В. М.: Высшая школа, 2004. 551 с.
22. Марутян А.С. Оптимизация высот стропильных перекрестных стальных ферм // Строительная механика и расчет сооружений. 2014. №4(255). С. 25–34.
23. Кирсанов М.Н. Maple и MapleT. Решения задач механики. СПб.: Лань, 2012. 512 с.
24. Голоскоков Д.П. Практический курс математической физики в системе Maple. СПб.: ПаркКом, 2010. 644 с.

*Михаил Николаевич Кирсанов, Москва, Россия  
+7(495)3627314; эл. почта: mpei2004@yandex.ru*

© Кирсанов М.Н., 2015



doi: 10.5862/MCE.57.5

## Analysis of the deflection of a strut-type lattice girder truss

**M.N. Kirsanov,***National Research University "Moscow Power Engineering Institute"*

+7(495)3627314; e-mail: mpei2004@yandex.ru

### Key words

truss; deflection; kinematic variability; induction method; exact solution; Maple

### Abstract

The analytical dependence of the deflection of a statically determinate plane elastic truss with a uniform loading of the upper zone has been found. Forces in rods were determined using the joint isolation method. A system of equilibrium equations has been compiled in matrix form. Midspan deflection has been calculated based on the Maxwell-Mohr formula.

All character conversion has been executed in the Maple computer algebra system. The method of induction on the number of panels in the truss was used. Recurrent equations for general members of the sequences of coefficients were obtained and solved using the genfunc operators package from the Maple system.

The dependencies of the forces in the rods of the truss and of its deflection on the number of panels are non-monotonic, which is generally characteristic of lattice struts. We have also shown that for an odd number of panels the truss is instantaneously variable. The distribution of possible nodal velocities is given for this case.

### References

1. Kirsanov M.N. Balochnaya ferma, chuvstvitelnaya k chetnosti chisla paneley [Braced girder, sensitive to the parity of the number of panels]. *Aktualnyye voprosy v nauchnoy rabote i obrazovatelnoy deyatel'nosti. Sbornik nauchnykh trudov po materialam Mezhdunarodnoy nauchno-prakticheskoy konferentsii. 30.4.2014. Part 2.* Tambov: OOO "Konsaltingovaya kompaniya Yukom". 2014. Pp. 52–53. (rus)
2. Kirsanov M.N. Skrytaya osobennost i asimptoticheskiye svoystva odnoy ploskoy balochnoy fermy [Hidden features and asymptotic properties of the plane truss]. *Stroitel'naya mekhanika i raschet sooruzheniy.* 2014. No. 4. Pp. 9–12. (rus)
3. Kirsanov M.N. Raschet prostranstvennoy sterzhnevoy sistemy, dopuskayushchey mgnovennuyu izmenyayemost [Calculation of spatial bar system that permits variability of instantly]. *Stroitel'naya mekhanika i raschet sooruzheniy.* 2012. No. 3. Pp. 48–51. (rus)
4. Kirsanov M.N. Analiticheskiy raschet progiba ploskoy reshetchatoy fermy treugol'nogo ochertaniya [Analytical calculation of the deflection of a flat lattice girders]. *Trends in Applied Mechanics and Mechatronics.* Moscow: Infra-M. 2015. Vol. 1. Pp. 28–30. (rus)
5. Zhaketov D. D., Yatskov V. B. Progib ploskoy balochnoy fermy s treugolnoy reshetkoy [The deflection of the flat girder beam with a triangular lattice]. *Nauka i otriangular shapebrazovaniye v XXI veke: sbornik nauchnykh trudov po materialam Mezhdunarodnoy nauchno-prakticheskoy konferentsii 31.10.2014. Part 7.* Tambov. 2014. Pp. 34–36. (rus)
6. Tinkov D. V. Analiz vliyaniya usloviy zakrepleniya na progib ploskoy balochnoy fermy s niskhodyashchimi raskosami [Analysis of the influence of fixation conditions on the deflection of the flat girder with descending braces]. *Trends in Applied Mechanics and Mechatronics.* Moscow: Infra-M. 2015. Vol. 1. Pp. 52–56. (rus)
7. Afanasyev V.A. Boyko O.O. Progib sostavnoy ploskoy balochnoy fermy s parallelnymi poyasami [The deflection of the flat composite girder with parallel chords]. *Aktualnyye voprosy obrazovaniya i nauki: sbornik nauchnykh trudov po materialam Mezhdunarodnoy nauchno-prakticheskoy konferentsii 30.9.2014. Part 10.* Tambov: OOO «Konsaltingovaya kompaniya Yukom». 2014. Pp. 15–16. (rus)
8. Akhmedova Ye.R. Analiticheskiy raschet progiba ploskoy fermy so shprengelnoy reshetkoy [Analytical calculation of the deflection of flat farm with truss bars]. *Trends in Applied Mechanics and Mechatronics.* Moscow: Infra-M. 2015. Vol. 1. Pp. 62–65. (rus)
9. Zaborskaya N. V. O gorizontalnomo smeshchenii opory ploskoy balochnoy fermy [On the horizontal displacement of the support flat girder]. *Perspektivy razvitiya nauki i obrazovaniya: sbornik nauchnykh*

- trudov po materialam Mezhdunarodnoy nauchno-prakticheskoy konferentsii 28.2.2015. Part 9.* Tambov: OOO «Konsaltingovaya kompaniya Yukom». 2015. Pp. 58–60.(rus)
10. Klyachin A.Z. *Metallicheskiye reshchatyye prostranstvennyye konstruksii regulyarnoy struktury* [Metal lattice spatial structures with regular patterns]. Yekaterinburg: Diamant. 1994. 276 p. (rus)
  11. Marutyan A.S., Grigoryan M.B., Glukhov S.A. Prostranstvennyye reshchatyye nesushchiye konstruksii (moduli tipa «Pyatigorsk»-2) [Spatial lattice supporting structures (modules type "Pyatigorsk"-2)]. *Stroitel'naya mekhanika i raschet sooruzheniy*. 2014. No. 1. Pp. 64–71.(rus)
  12. Alpatov V.Yu., Kholopov I.S. Optimizatsiya geometricheskoy formy prostranstvenno-sterzhnevnykh konstruksiy [Optimization of the geometrical form of space frame structures]. *Metallicheskiye konstruksii*. 2009. Vol. 15. No. 1. Pp. 47–57. (rus)
  13. Bacinskas D., Kamaitis Z., Jatulis D., Kilikevicius A. Field Testing of Old Narrow-Gauge Railway Steel Truss Bridge. *Procedia Engineering*. 2013. Vol. 57. Pp. 136–143.
  14. Pholdee N., Bureerat S. Comparative performance of meta-heuristic algorithms for mass minimization of trusses with dynamic constraints. *Advances in Engineering Software*. 2014. Vol. 75. Pp. 1–13.
  15. Kaveh A, Shahrouzi M. Farshi B., Alinia-ziazi A. Sizing optimization of truss structures by method of centers and force formulation. *International Journal of Solids and Structures*. 2010. Vol. 47. Pp. 2508–2524.
  16. Toklu Y.C., Bekdas G., Temur R. Analysis of trusses by total potential optimization method coupled with harmony search. *Structural Engineering and Mechanics*. 2013. Vol. 45. No. 2. Pp. 183–199.
  17. Heyman J. Design of a simple steel truss. *Proceedings of the Institution of Civil Engineers: Structures and Buildings*. 2010. Vol. 163. No. 1. Pp. 53–56.
  18. Hutchinson R.G., Fleck N.A. The structural performance of the periodic truss. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*. 2006. Vol. 54. Issue 4. Pp. 756–782.
  19. Hutchinson R.G., Fleck N.A. Microarchitected cellular solids – the hunt for statically determinate periodic trusses. *ZAMM Z. Angew. Math. Mech.* 2005. Vol. 85. No. 9. Pp. 607–617.
  20. Kmet S., Kokorudova Z. Nonlinear Analytical Solution for Cable Truss. *J. Eng. Mech.* 2006. No. 132(1). Pp. 119–123.
  21. *Metallicheskiye konstruksii. Tom 1(3). Elementy konstruksiy* [The metal structures. Vol.1(3). The structural elements]. Ed. Goreva V.V. Moscow: Vysshaya shkola. 2004. 551 p. (rus)
  22. Marutyan A.S. Optimizatsiya vysot stropilnykh perekrestnykh stalnykh ferm [Optimization of heights truss steel trusses cross]. *Stroitel'naya mekhanika i raschet sooruzheniy*. 2014. No. 4 (255). Pp. 25–34. (rus)
  23. Kirsanov M. N. *Maple i Maplet. Resheniya zadach mekhaniki* [Maple, and Maplet. Solving mechanics problems]. Saint-Petersburg: Lan, 2012. 512 p. (rus)
  24. Goloskokov D.P. *Prakticheskiy kurs matematicheskoy fiziki v sisteme Maple* [Practical course in mathematical physics in Maple]. Saint-Petersburg: ParkKom, 2010. 644 p. (rus)

**Full text of this article in Russian: pp. 58–65**