
СТРОИТЕЛЬНАЯ МЕХАНИКА

DOI 10.36622/VSTU.2021.62.2.008

УДК 624.04:531.391.3

СПЕКТР СОБСТВЕННЫХ ЧАСТОТ ФЕРМЫ ПРОСТРАНСТВЕННОГО ПОКРЫТИЯ*

М. Н. Кирсанов¹

*Национальный исследовательский университет «МЭИ»¹
Россия, г. Москва*

¹ Д-р физ.-мат. наук, проф. кафедры робототехники, мехатроники, динамики и прочности машин, тел.: +7(495)362-73-14; e-mail: c216@ya.ru

Постановка задачи. Рассматривается схема статически определимой фермы пространственного прямоугольного покрытия. Ставится задача найти формулу зависимости нижней оценки первой частоты собственных колебаний конструкции по методу Донкерлея от числа панелей. Ферма имеет опоры по сторонам и состоит из отдельных стержневых ячеек, соединенных в пирамиды.

Результаты. Из анализа последовательности аналитических решений для первой частоты ферм с различным числом панелей методом индукции выводятся коэффициенты в искомой формуле. Общие члены последовательностей коэффициентов находятся как решения однородных рекуррентных уравнений, образованных по результатам расчетов с помощью операторов *Maple*. Найденные зависимости получены в виде полиномов по числу панелей. Дано сравнение аналитического решения с численным.

Выводы. Приведен алгоритм вывода аналитической оценки основной частоты колебаний пространственной конструкции в зависимости от числа панелей, массы, размеров и упругих свойств материала. Проанализирован спектр частот колебаний сооружения. Найденные зависимости могут быть использованы в задачах сейсмостойкости и оптимизации конструкции.

Ключевые слова: пространственная ферма, собственная частота, метод Донкерлея, нижняя оценка, индукция, *Maple*, аналитическое решение, спектр собственных частот, кратные частоты.

Введение. Расчет частот собственных колебаний строительных конструкций на практике, как правило, выполняется в стандартных пакетах, основанных на методе конечных элементов [4—6,22]. Значения собственных частот необходимы в анализе сейсмостойкости сооружений [11, 20, 21] и в условиях эксплуатации при внешних динамических воздействиях [16, 18]. Альтернативой численным методам расчета спектров частот колебаний конструкций является аналитический метод. Актуальность исследования состоит в том, что для систем с большим числом степеней свободы получить точное решение задачи определения собственных частот в общем случае не удастся. Исключением является приближенное решение задачи о нижней оценке первой частоты по методу Донкерлея [14]. Среди известных решений отдельно можно выделить решения для регулярных (периодических) статически определимых стержневых систем.

© Кирсанов М. Н., 2021

* Исследование выполнено при поддержке Междисциплинарной научно-образовательной школы Московского университета «Фундаментальные и прикладные исследования космоса».

Проблемами существования регулярных стержневых конструкций занимались R. G. Hutchinson и N. A. Fleck [8, 9]. Известны аналитические решения для прогиба плоских ферм в зависимости от числа панелей [1—3, 10, 17, 19, 23—26], полученные методом индукции в системе компьютерной математики *Maple*. Задачи о колебании плоских регулярных ферм в аналитической форме решены в [12, 15].

В настоящей работе для модели статически определимой фермы пространственного покрытия [13] приведен вывод формулы зависимости первой частоты от числа панелей. В численной форме проанализированы спектры собственных частот ферм с различным числом панелей и найдены некоторые их особенности.

1. Конструкция покрытия. Ферма с квадратным основанием размером $2na \times 2na$ состоит из n^2 отдельных ячеек из стержней, соединенных в пирамиды (рис. 1). Длина стороны одной ячейки $2a$, высота h (рис. 2). Вертикальные шарнирно закрепленные опорные стержни расположены по всему периметру конструкции. Угловой шарнир A закреплен также двумя дополнительными горизонтальными связями так, что вместе с вертикальным стержнем в точке A образуется сферический шарнир. Угловой шарнир B закреплен вертикальным и горизонтальным стержнями (цилиндрический шарнир).

Всего конструкция содержит $r = 6n^2 + 6n + 3$ стержня, включая $4n$ вертикальных опорных стоек и три дополнительные горизонтальные связи в углах A и B . Инерционные свойства сооружения моделируются сосредоточенными массами в узлах нижнего пояса решетки. Число степеней свободы рассматриваемой модели с учетом того, что смещение грузов рассматривается только по вертикали, равно $N = (n - 1)^2$. Формулы для статического прогиба этой конструкции и распределение усилий в стержнях получены в [13]. Для расчета жесткости фермы при вычислении собственных частот воспользуемся схемой расчета усилий в стержнях, приведенной в этой работе.

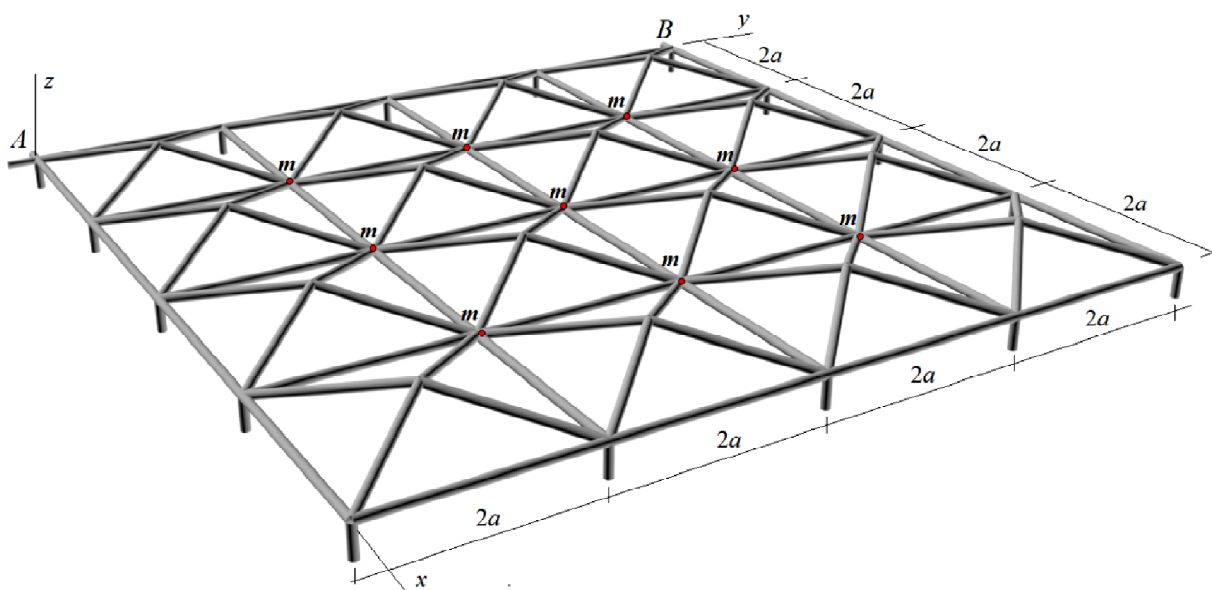


Рис. 1. Ферма при $n = 4$ под действием сосредоточенной нагрузки

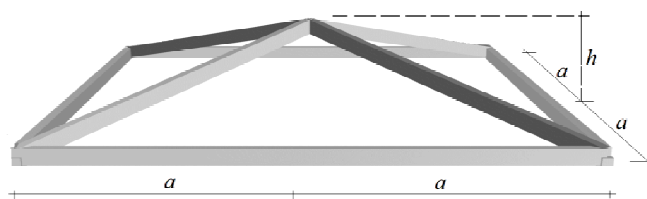


Рис. 2. Элемент (ячейка) покрытия

2. Метод Донкерлея определения основной частоты. Математическая модель конструкции задается в системе координат с началом в узле A . В программу расчета усилий вводятся координаты шарниров решетки фермы:

$$\begin{aligned} x_k &= 2a(i-1), y_k = 2a(j-1), z_k = 0, \\ k &= i + (j-1)(n+1), i, j = 1, \dots, n+1, \end{aligned} \quad (1)$$

и координаты вершин пирамид:

$$\begin{aligned} x_k &= 2a(i-1) + a, y_k = 2a(j-1) + a, z_k = h, \\ k &= i + (j-1)n + (n+1)^2, i, j = 1, \dots, n. \end{aligned}$$

Структура соединений стержней в узлах кодируется условными векторами, содержащими номера концов соответствующих стержней. Матрица уравнений равновесия узлов размером $r \times r$ состоит из направляющих косинусов усилий в стержнях.

Формула для расчета нижней оценки первой частоты по Донкерлею имеет вид:

$$\omega_D^{-2} = \sum_{k=1}^N \omega_k^{-2}, \quad (2)$$

где ω_k — парциальная частота. Для ее вычисления используется уравнение колебаний одного из грузов системы:

$$m\ddot{z}_k + d_k z_k = 0, \quad k = 1, \dots, N,$$

где d_k — коэффициент жесткости конструкции, рассчитываемый по величине ее прогиба от действия вертикальной силы на узел k ; z_k — вертикальное смещение массы m ; \ddot{z}_k — ускорение. Отсюда получаем парциальную частоту:

$$\omega_k = \sqrt{d_k / m}.$$

Для определения коэффициента жесткости используется интеграл Мора:

$$\delta_k = 1 / d_k = \sum_{\alpha=1}^{r-4n-3} (S_{\alpha}^{(k)})^2 l_{\alpha} / (EF). \quad (3)$$

Здесь обозначено: $S_{\alpha}^{(k)}$ — усилие в стержне α от действия единичной вертикальной силы в узле k , где расположена масса; EF — жесткость стержней; l_{α} — длина стержня α . Суммирование в (3) ведется по всем стержням, кроме $4n$ вертикальных опорных стоек и трех горизонтальных стержней связей в точках A и B , которые предполагаются недеформируемыми. Согласно (2):

$$\omega_D^{-2} = m \sum_{k=1}^N \delta_k = m\Delta, \quad (4)$$

где
$$\Delta = \sum_{\alpha=1}^{r-4n-3} (S_{\alpha}^{(k)})^2 l_{\alpha} / (EF).$$

Расчеты ферм с различным числом панелей показывают, что вид этого выражения не зависит от числа панелей:

$$\Delta = (C_1 a^3 + C_2 c^3) / (h^2 EF),$$

где
$$c = \sqrt{2a^2 + h^2}.$$

Коэффициенты C_1 и C_2 зависят от n и определяются методом индукции. Последовательный расчет ферм с увеличивающимся числом панелей дает ряд коэффициентов, общие члены которых получаются как решения рекуррентных уравнений и имеют вид:

$$\begin{aligned} C_1 &= 2(n-1)(20n^5 - 4n^4 - 25n^3 + 5n^2 + 5n - 1) / (45n), \\ C_2 &= (n^2 - 1)^2 / 9. \end{aligned} \quad (5)$$

Вывод этих формул потребовал необычно большие для таких задач затраты компьютерных ресурсов и времени. При получении рекуррентного уравнения

$$C_{1,n} = 7C_{1,n-1} - 21C_{1,n-2} + 35C_{1,n-3} - 35C_{1,n-4} + 21C_{1,n-5} - 7C_{1,n-6} + C_{1,n-7}$$

для коэффициента C_1 потребовалось рассчитать частоты ферм с числом панелей от 2 до 15. Для последовательности меньшей длины операторы *Maple* не выявляют рекуррентное уравнение. Символьные преобразования система *Maple* выполняет весьма медленно. Если для расчета нижней границы первой частоты фермы с двумя панелями по каждой стороне покрытия (одна степень свободы) потребовалось несколько секунд, то при получении результата при $n=14$ программа работала уже более семи часов. Заметное ускорение расчетов удалось получить за счет использования осевой симметрии конструкции и метода обратной матрицы для решения системы уравнений равновесия узлов. Метод обратной матрицы решения системы линейных уравнений оказался значительно более быстрым, чем стандартный оператор *LinearSolve* из пакета *LinearAlgebra*. В результате получена аналитическая оценка первой частоты

$$\omega_D = h\sqrt{EF / (C_1 a^3 + C_2 c^3)} \quad (6)$$

с коэффициентами (5).

3. Численное решение задачи о спектре собственных частот. Погрешность полученного решения оценим, сравнивая его с численным решением для минимальной частоты всего спектра частот. Система дифференциальных уравнений динамики N грузов, расположенных в узлах решетки, в матричной форме имеет вид:

$$M_N \ddot{Z} + D_N Z = 0, \quad (7)$$

где Z — вектор вертикальных смещений грузов; D_N — матрица жесткости; $M_N = mI_N$ — диагональная матрица инерции размером $N \times N$; \ddot{Z} — вектор ускорений.

Матрица податливости B_N является обратной к матрице жесткости D_N и вычисляется по формуле Мора:

$$b_{ij} = \sum_{\alpha=1}^{r-4n-3} S_{\alpha}^{(i)} S_{\alpha}^{(j)} l_{\alpha} / (EF).$$

Умножая (7) на матрицу B_N слева с учетом тождества $\ddot{Z} = -\omega^2 Z$, задачу сводим к проблеме собственных чисел матрицы B_N : $B_N Z = \lambda Z$, где $\lambda = 1 / (m\omega^2)$ — собственное число матрицы B_N . При $N > 3$ эта задача решается только численно.

Для определения собственных чисел матрицы B_N воспользуемся оператором *Eigenvalues* системы *Maple*. Численное решение и аналитическая оценка (6) сопоставлены на графике (рис. 3). Для примера взяты модуль упругости стали $E = 2 \cdot 10^5$ МПа и площадь поперечного сечения стержней $F = 50$ см², массы в узлах $m = 1200$ кг, $a = 3$ м, $h = 1$ м. Кривые сближаются в начале графика и при увеличении числа панелей. Максимальное расхождение между двумя решениями достигает 45 %. Заметим, что оценка Донкерлея для плоских ферм дает существенно большую точность [15].

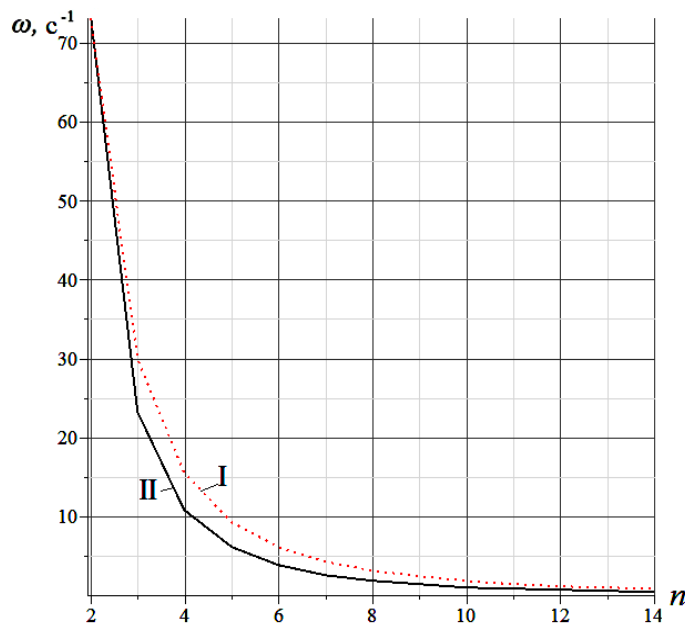


Рис. 3. Основная частота в зависимости от числа панелей:
 I — численное решение; II — аналитическая оценка (5)

Зависимость первой частоты от высоты фермы h оказывается нелинейной. Это прослеживается на графике (рис. 4). При некотором значении h наблюдается явно выраженный максимум. Графики построены при $n = 4$ и трех значениях длины панели a . Максимальное значение частоты растет с уменьшением размера стороны панели.

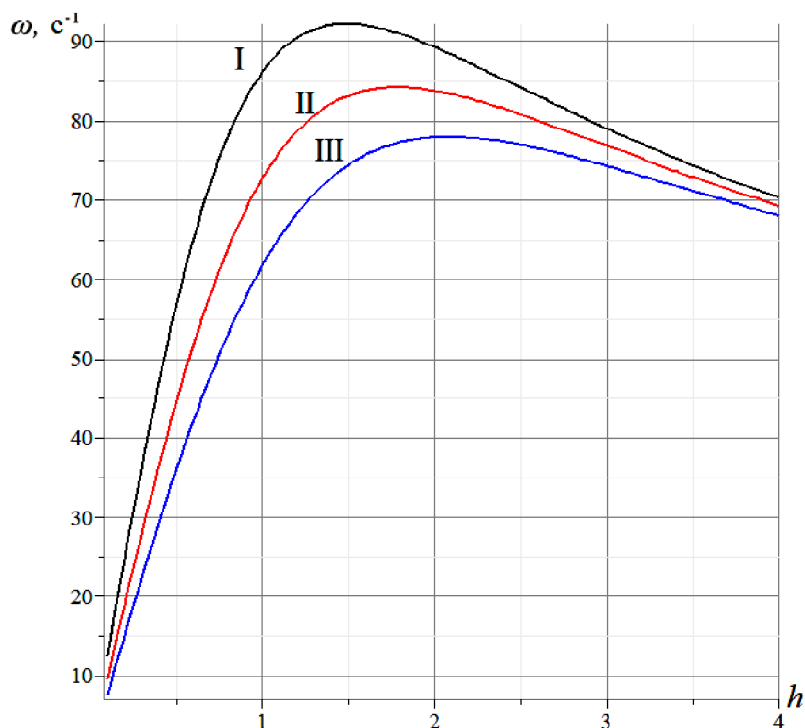


Рис. 4. Зависимость первой частоты от высоты покрытия:
 I — $a = 0,5$ м; II — $a = 0,6$ м; III — $a = 0,7$ м

4. Спектр собственных частот. Численный метод позволяет рассчитать весь спектр собственных частот. На рис. 5 частоты спектра каждой из ферм с числом панелей

$n = 2, \dots, 10$ условно объединены ломаной линией. Каждая точка на этой ломаной — отдельная частота. Спектры рассчитаны при тех же значениях размеров и масс, что и кривые на рис. 3. По оси абсцисс k откладываются порядковые номера частот спектров, упорядоченных по возрастанию. Для каждой фермы, начиная с $n = 3$, обнаруживаются кратные частоты («ступеньки» на кривых). При этом замечена следующая закономерность. Число кратных частот для ферм с панелями $n = 2, 3, \dots, 11, \dots$ равно $0, 1, 2, 4, 6, 9, 12, 16, 20, 25, \dots$. Общий член этой последовательности, выражающий число кратных частот в зависимости от числа панелей по сторонам покрытия, равен

$$K(n) = (2n^2 + (-1)^n - 1) / 8.$$

Эта функция позволяет без каких-либо численных расчетов предугадать число кратных частот для покрытия с произвольным, даже очень большим, числом панелей, т. е. именно для тех случаев, где расчетные матрицы имеют большие размеры и точность, а скорость вычислений падает. Кроме этого, на графике заметен монотонный рост значения высших частот ферм при увеличении n . Верхняя частота растет, асимптотически приближаясь к некоторому постоянному значению. Безусловно, высшие частоты спектра не так востребованы в практике динамических расчетов, как низшие частоты, однако знание верхней границы частот может быть полезно в расчетах. Согласно построенной картине спектров ферм с различным числом панелей для приближенной оценки высшей частоты в качестве верхней границы можно брать высшую частоту при некотором значении n , например при $n = 8$, с большой степенью уверенности полагая, что ошибка прогноза верхней границы частот при $n > 8$ будет невелика. В приведенном примере эта ошибка не превышает нескольких процентов.

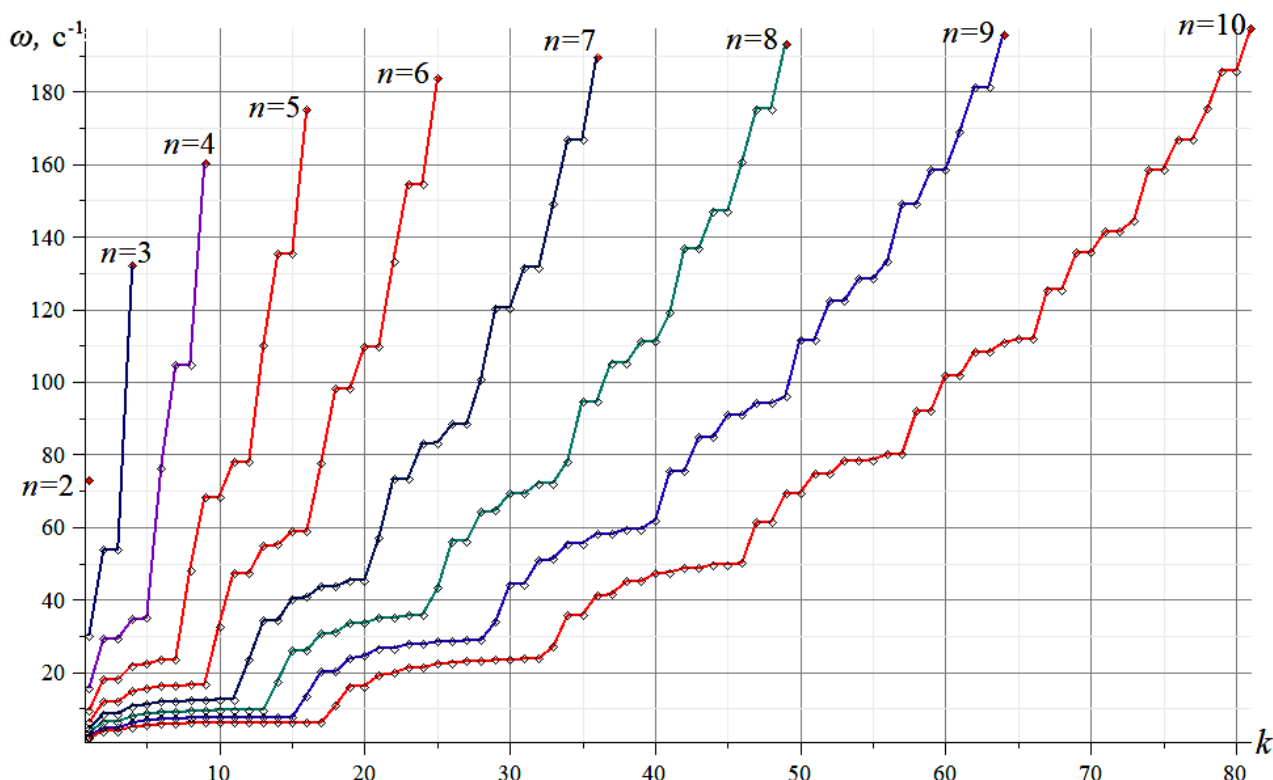


Рис. 5. Спектры собственных частот

Выводы. Алгоритм вывода аналитической оценки первой частоты собственных колебаний пространственной статически определимой фермы дает компактную, удобную для расчетов формулу с приемлемой, хотя и меньшей, чем в аналогичных формулах для плоских

схем точно. Показано, что зависимость частоты колебаний от высоты конструкции имеет экстремум, наличие которого дает возможность для проектировщика выбирать оптимальные размеры конструкции, исходя из требований к значению первой собственной частоты. Структура спектров частот колебаний регулярных ферм обнаруживает регулярное расположение кратных частот. Получена формула для вычисления числа кратных частот. Замечено, что начиная с некоторого числа панелей, высшая частота спектра мало зависит от числа панелей. Примененный алгоритм может быть использован для вывода аналогичных оценок для других регулярных конструкций.

Библиографический список

1. **Белянкин, Н. А.** Формулы для прогиба балочной фермы с произвольным числом панелей при равномерном нагружении / Н. А. Белянкин, А. Ю. Бойко // *Строительная механика и конструкции*. — 2019. — № 1 (20). — С. 21—29.
2. **Овсянникова, В. М.** Зависимость деформаций балочной фермы трапецевидной формы от числа панелей / В. М. Овсянникова // *Строительная механика и конструкции*. — 2020. — № 3 (26). — С. 13—20.
3. **Терзе, С. В.** Аналитический расчет зависимости деформаций консольной стойки от числа панелей в системе Maple / С. В. Терзе // *Строительная механика и конструкции*. — 2020. — № 2 (25). — С. 16—24.
4. **Abdikarimov, R.** To Calculation of Rectangular Plates on Periodic Oscillations / R. Abdikarimov, D. Khodzhaev, N. Vatin // *MATEC Web of Conferences*. — 2018. — № 245. — DOI: 10.1051/mateconf/201824501003.
5. **Al Rjoub, Y.** Free vibration of axially loaded multi-cracked timoshenko beams / Y. Al Rjoub, A. Hamad // *Magazine of Civil Engineering*. — 2021. — № 8 (100). — P. 10002—10002. — DOI: 10.18720/MCE.100.2.
6. **Bao, T.** Critical insights for advanced bridge scour detection using the natural frequency / T. Bao, R. Andrew Swartz, S. Vitton, Y. Sun, C. Zhang, Z. Liu // *Journal of Sound and Vibration*. — 2017. — № 386. — P. 116—133. — DOI: 10.1016/j.jsv.2016.06.039.
7. **Cao, L.** Vibration behavior of large span composite steel bar truss-reinforced concrete floor due to human activity / L. Cao, J. Li, X. Zheng, Y. F. Chen // *Steel and Composite Structures*. — 2020. — № 4 (37). — P. 391—404. — DOI: 10.12989/scs.2020.37.4.391.
8. **Hutchinson, R. G.** Microarchitected cellular solids — the hunt for statically determinate periodic trusses / R. G. Hutchinson, N. A. Fleck // *ZAMM Z. Angew. Math. Mech.* — 2005. — № 85. — P. 607—617. — DOI: <https://doi.org/10.1002/zamm.200410208>.
9. **Hutchinson, R. G.** The structural performance of the periodic truss / R. G. Hutchinson, N. A. Fleck // *J. Mech. Phys. Solids*. — 2006. — № 54. — P. 756—782. — DOI: 10.1016/j.jmps.2005.10.008.
10. **Ilyushin, A.** The formula for calculating the deflection of a compound externally statically indeterminate frame / A. Ilyushin // *Structural mechanics and structures*. — 2019. — № 3 (22). — P. 29—38.
11. **Kilikevicius, A.** Analysis of parameters of railway bridge vibration caused by moving rail vehicles / A. Kilikevicius, A. Fursenko, M. Jurevicius, K. Kilikeviciene, G. Bureika // *Measurement and Control (United Kingdom)*. — 2019. — № 9—10 (52). — P. 1210—1219. — DOI: 10.1177/0020294019836123.
12. **Kirsanov, M. N.** Analysis of the natural frequencies of oscillations of a planar truss with an arbitrary number of panels / M. N. Kirsanov, D. V. Tinkov // *Vestnik MGSU*. — 2019. — № 4 (14). — P. 284—292. — DOI: 10.22227/1997-0935.2019.3.284-292.
13. **Kirsanov, M. N.** Analytical calculation of deformations of a truss for a long span covering / M. N. Kirsanov // *Vestnik MGSU*. — 2020. — № 10 (15). — P. 1399—1406. — DOI: 10.22227/1997-0935.2020.10.1399-1406.
14. **Kirsanov, M. N.** Calculating of a spatial cantilever truss natural vibration frequency with an arbitrary number of panels: analytical solution / M. N. Kirsanov, O. V. Vorobyev // *Construction of Unique Buildings and Structures*. — 2021. — № 94. — P. 9402. — DOI: 10.4123/CUBS.94.2.
15. **Kirsanov, M. N.** The formula for the lower estimate of the fundamental frequency of natural vibrations of a truss with an arbitrary number of panels / M. N. Kirsanov, E. A. Petrichenko, O. V. Vorobev // *Construction of Unique Buildings and Structures*. — 2021. — № 1 (94). — P. 9403—9403. — DOI: 10.4123/CUBS.94.3.
16. **Liu, M.** Nonlinear dynamic responses of beamlike truss based on the equivalent nonlinear beam model / M. Liu, D. Cao, X. Zhang, J. Wei, D. Zhu // *International Journal of Mechanical Sciences*. — 2021. — № 194. — P. 106197. — DOI: 10.1016/j.ijmecsci.2020.106197.
17. **Rakhmatulina, A. R.** Two-parameter derivation of the formula / A. R. Rakhmatulina, A. A. Smirnova // *Postulat*. — 2018. — № 5—1 (31).
18. **Santana, M. V. B.** Closed-form solutions for the symmetric nonlinear free oscillations of pyramidal trusses / V. B. Santana M., P. B. Goncalves, A. M. Silveira // *Physica D: Nonlinear Phenomena*. — 2021. — № 417. — P. 132814. — DOI: 10.1016/j.physd.2020.132814.

19. **Tinkov, D. V.** The optimum geometry of the flat diagonal truss taking into account the linear creep / D. V. Tinkov // Magazine of Civil Engineering. — 2016. — № 1 (61). — P. 25—32. — DOI: 10.5862/MCE.61.3.
20. **Ufimtcev, E.** Dynamic Calculation of Nonlinear Oscillations of Flat Trusses. Part 2: Examples of Calculations / E. Ufimtcev // Procedia Engineering. — 2017. — № 206. — P. 850—856. — DOI: 10.1016/j.proeng.2017.07.188.
21. **Ufimtsev, E.** Research of Total Mechanical Energy of Steel Roof Truss during Structurally Nonlinear Oscillations / E. Ufimtsev, M. Voronina // Procedia Engineering. — 2016. — № 150. — P. 1891—1897. — DOI: 10.1016/j.proeng.2016.07.188.
22. **Vatin, N. I.** Thin-walled cross-sections and their joints: Tests and FEM-modelling / N. I. Vatin, J. Havula, L. Martikainen, A. S. Sinelnikov, A. Orlova V., S. V. Salamakhin // Advanced Materials Research. — 2014. — № 945—949. — P. 1211—1215. — DOI: 10.4028/www.scientific.net/AMR.945-949.1211.
23. **Voropay, R. A.** The dependence of the deflection of a planar beam truss with a complex lattice on the number of panels in the system Maple / R. A. Voropay, E. V. Domanov // Postulat. — 2019. — № 1.
24. **Voropay, R. A.** The formula for the dependence of the deflection of a truss with an asymmetric lattice on the number of panels / R. A. Voropay, E. V. Domanov // Postulat. — 2018. — № 6. — P. 61.
25. **Voropay, R. A.** Analytical calculation of the deflection of a beam truss with parallel belts / R. A. Voropay // Postulat. — 2018. — № 6. — P. 96.
26. **Voropay, R. A.** Derivation of the formula for the deflection of the truss with additional horizontal struts / R. A. Voropay // Postulat. — 2018. — № 6. — P. 105.

References

1. **Belyankin, N. A.** Formuly dlya progiba balochnoi fermy s proizvol'nym chislom panelei pri ravnomernom zagruzhении / N. A. Belyankin, A. Yu. Boiko // Stroitel'naya mekhanika i konstruksii. — 2019. — № 1 (20). — S. 21—29.
2. **Ovsyannikova, V. M.** Zavisimost' deformatsii balochnoi fermy trapetsevidnoi formy ot chisla panelei / V. M. Ovsyannikova // Stroitel'naya mekhanika i konstruksii. — 2020. — № 3 (26). — S. 13—20.
3. **Terze, S. V.** Analiticheskii raschet zavisimosti deformatsii konsol'noi stoiki ot chisla panelei v sisteme Maple / S. V. Terze // Stroitel'naya mekhanika i konstruksii. — 2020. — № 2 (25). — S. 16—24.
4. **Abdikarimov, R.** To Calculation of Rectangular Plates on Periodic Oscillations / R. Abdikarimov, D. Khodzhaev, N. Vatin // MATEC Web of Conferences. — 2018. — № 245. — DOI: 10.1051/mateconf/201824501003.
5. **Al Rjoub, Y.** Free vibration of axially loaded multi-cracked timoshenko beams / Y. Al Rjoub, A. Hamad // Magazine of Civil Engineering. — 2021. — № 8 (100). — P. 10002—10002. — DOI: 10.18720/MCE.100.2.
6. **Bao, T.** Critical insights for advanced bridge scour detection using the natural frequency / T. Bao, R. Andrew Swartz, S. Vitton, Y. Sun, C. Zhang, Z. Liu // Journal of Sound and Vibration. — 2017. — № 386. — P. 116—133. — DOI: 10.1016/j.jsv.2016.06.039.
7. **Cao, L.** Vibration behavior of large span composite steel bar truss-reinforced concrete floor due to human activity / L. Cao, J. Li, X. Zheng, Y. F. Chen // Steel and Composite Structures. — 2020. — № 4 (37). — P. 391—404. — DOI: 10.12989/scs.2020.37.4.391.
8. **Hutchinson, R. G.** Microarchitected cellular solids — the hunt for statically determinate periodic trusses / R. G. Hutchinson, N. A. Fleck // ZAMM Z. Angew. Math. Mech. — 2005. — № 85. — P. 607—617. — DOI: https://doi.org/10.1002/zamm.200410208.
9. **Hutchinson, R. G.** The structural performance of the periodic truss / R. G. Hutchinson, N. A. Fleck // J. Mech. Phys. Solids. — 2006. — № 54. — P. 756—782. — DOI: 10.1016/j.jmps.2005.10.008.
10. **Ilyushin, A.** The formula for calculating the deflection of a compound externally statically indeterminate frame / A. Ilyushin // Structural mechanics and structures. — 2019. — № 3 (22). — P. 29—38.
11. **Kilikevicius, A.** Analysis of parameters of railway bridge vibration caused by moving rail vehicles / A. Kilikevicius, A. Fursenko, M. Jurevicius, K. Kilikeviciene, G. Bureika // Measurement and Control (United Kingdom). — 2019. — № 9—10 (52). — P. 1210—1219. — DOI: 10.1177/0020294019836123.
12. **Kirsanov, M. N.** Analysis of the natural frequencies of oscillations of a planar truss with an arbitrary number of panels / M. N. Kirsanov, D. V. Tinkov // Vestnik MGSU. — 2019. — № 4 (14). — P. 284—292. — DOI: 10.22227/1997-0935.2019.3.284-292.
13. **Kirsanov, M. N.** Analytical calculation of deformations of a truss for a long span covering / M. N. Kirsanov // Vestnik MGSU. — 2020. — № 10 (15). — P. 1399—1406. — DOI: 10.22227/1997-0935.2020.10.1399-1406.
14. **Kirsanov, M. N.** Calculating of a spatial cantilever truss natural vibration frequency with an arbitrary number of panels: analytical solution / M. N. Kirsanov, O. V. Vorobyev // Construction of Unique Buildings and Structures. — 2021. — № 94. — P. 9402. — DOI: 10.4123/CUBS.94.2.
15. **Kirsanov, M. N.** The formula for the lower estimate of the fundamental frequency of natural vibrations of a truss with an arbitrary number of panels / M. N. Kirsanov, E. A. Petrichenko, O. V. Vorobev // Construction of Unique Buildings and Structures. — 2021. — № 1 (94). — P. 9403—9403. — DOI: 10.4123/CUBS.94.3.

16. **Liu, M.** Nonlinear dynamic responses of beamlike truss based on the equivalent nonlinear beam model / M. Liu, D. Cao, X. Zhang, J. Wei, D. Zhu // *International Journal of Mechanical Sciences*. — 2021. — № 194. — P. 106197. — DOI: 10.1016/j.ijmecsci.2020.106197.
17. **Rakhmatulina, A. R.** Two-parameter derivation of the formula / A. R. Rakhmatulina, A. A. Smirnova // *Postulat*. — 2018. — № 5—1 (31).
18. **Santana, M. V. B.** Closed-form solutions for the symmetric nonlinear free oscillations of pyramidal trusses / V. B. Santana M., P. B. Goncalves, A. M. Silveira // *Physica D: Nonlinear Phenomena*. — 2021. — № 417. — P. 132814. — DOI: 10.1016/j.physd.2020.132814.
19. **Tinkov, D. V.** The optimum geometry of the flat diagonal truss taking into account the linear creep / D. V. Tinkov // *Magazine of Civil Engineering*. — 2016. — № 1 (61). — P. 25—32. — DOI: 10.5862/MCE.61.3.
20. **Ufimtsev, E.** Dynamic Calculation of Nonlinear Oscillations of Flat Trusses. Part 2: Examples of Calculations / E. Ufimtsev // *Procedia Engineering*. — 2017. — № 206. — P. 850—856. — DOI: 10.1016/j.proeng.2017.07.011.
21. **Ufimtsev, E.** Research of Total Mechanical Energy of Steel Roof Truss during Structurally Nonlinear Oscillations / E. Ufimtsev, M. Voronina // *Procedia Engineering*. — 2016. — № 150. — P. 1891—1897. — DOI: 10.1016/j.proeng.2016.07.188.
22. **Vatin, N. I.** Thin-walled cross-sections and their joints: Tests and FEM-modelling / N. I. Vatin, J. Havula, L. Martikainen, A. S. Sinelnikov, A. Orlova V., S. V. Salamakhin // *Advanced Materials Research*. — 2014. — № 945—949. — P. 1211—1215. — DOI: 10.4028/www.scientific.net/AMR.945-949.1211.
23. **Voropay, R. A.** The dependence of the deflection of a planar beam truss with a complex lattice on the number of panels in the system Maple / R. A. Voropay, E. V. Domanov // *Postulat*. — 2019. — № 1.
24. **Voropay, R. A.** The formula for the dependence of the deflection of a truss with an asymmetric lattice on the number of panels / R. A. Voropay, E. V. Domanov // *Postulat*. — 2018. — № 6. — P. 61.
25. **Voropay, R. A.** Analytical calculation of the deflection of a beam truss with parallel belts / R. A. Voropay // *Postulat*. — 2018. — № 6. — P. 96.
26. **Voropay, R. A.** Derivation of the formula for the deflection of the truss with additional horizontal struts / R. A. Voropay // *Postulat*. — 2018. — № 6. — P. 105.

SPECTRUM OF OWN FREQUENCIES OF A SPATIAL SURFACING GRID

M. N. Kirsanov¹

«MEI» National Research University¹
Russia, Moscow

¹ D. Sc. in Physics and Mathematics, Prof. of the Dept. of Robotics, Mechatronics, Dynamics and Strength of Machines, tel.: +7 (495) 362-73-14; e-mail: c216@ya.ru

Statement of the problem. The scheme of a statically definable truss of a spatial rectangular covering is discussed. The problem is to identify the formula for the dependence of the lower estimate of the first frequency of the natural oscillations of the structure by means of the Donkerley method on the number of panels. The truss has supports on the sides and consists of separate rod cells connected in pyramids.

Results. Based on the analysis of the sequence of analytical solutions for the first frequency of trusses with a different number of panels by induction, the coefficients in the desired formula are derived. The common members of the sequences of coefficients are found as solutions of homogeneous recurrent equations formed according to the results of the calculations using Maple operators. The resulting dependences are obtained in the form of polynomials by the number of panels. A comparison of the analytical solution with the numerical one is provided.

Conclusions. An algorithm for deriving an analytical estimate of the fundamental frequency of oscillations of a spatial structure depending on the number of panels, mass, size, and elastic properties of the material is shown. The spectrum of oscillation frequencies of the structure is analyzed. The resulting dependences can be employed in seismic and structural optimization problems.

Keywords: spatial truss, natural frequency, Donkerley method, lower estimate, induction, Maple, analytical solution, natural frequency spectrum, multiple frequencies.