

## Расчет жесткости стержневой решетки

Рассмотрена плоская статически неопределимая шарнирно-стержневая решетка (ферма) с лишним стержнем, как мгновенно изменяющаяся система. Для неизменяемой конструкции получены формулы усилия в максимально сжатом стержне и прогиба решетки при консольном закреплении в зависимости от ее размеров. Определены оптимальные размеры решетки по жесткости конструкции.

**Ключевые слова:** решетка, мгновенная изменяемость, индукция, Maple, жесткость, стержень, прогиб решетки.

The plain statically undeterminable hinged-rod frame with redundant member as instantaneous changeable system is considered. For unchangeable structure the formulas for force determination in maximum compressed rod and frame deflection at single-sided support depending on its dimensions are obtained. The optimal dimensions of frame are determined based on stiffness of the structure.

**Keywords:** frame, instant configurability, induction, Maple, stiffness, rod, frame deflection.

### Метод раскрытия статической неопределенности

Рассмотрим прямоугольную шарнирно-стержневую конструкцию, содержащую три панели по высоте и  $n$  панелей по длине. В общем случае закрепление конструкции и нагрузка могут быть произвольными. Ограничимся консольным закреплением и одной сосредоточенной силой  $P$  на конце консоли (рис. 1). Ферма с  $n$  горизонтальными панелями имеет  $2n + 4$  шарниров и  $m = 4n + 9$  стержней с учетом трех стержней, моделирующих внешние опоры. Таким образом, конструкция имеет один лишний стержень. Для раскрытия статической неопределенности используем метод сил. В качестве лишнего стержня рассмотрим верхний боковой стержень.

Используем алгоритм [1, 2] составления уравнений равновесия узлов фермы в системе Maple [3, 4].

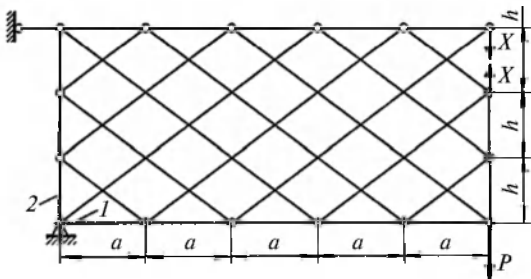


Рис. 1. Расчетная схема шарнирно-стержневой фермы с пятью горизонтальными и тремя вертикальными панелями

Принцип составления системы уравнений методом вырезания узлов основан на вычислении по заданным координатам направляющих косинусов усилий и записи их в виде матрицы  $G$ . Введем массивы координат  $(x_j, y_j, j = 1, \dots, 2n + 4)$  и массивы  $N_i$  и  $K_i$  номеров концов стержней. Стержни фермы условно представляем в виде векторов, для которых  $N_i$  и  $K_i$  — номера соответственно начала и конца стержня,  $i = 1, \dots, m$ . Направления стержней выбраны произвольно (на решение задачи это не влияет). Проекции стержня на оси координат:  $l_{x,i} = x_{K_i} - x_{N_i}$ ;  $l_{y,i} = y_{K_i} - y_{N_i}$ .

Матрица метода вырезания узлов составляется по числу  $m$  стержней фермы и имеет следующие элементы:  $G_{2N_i-1,i} = l_{x,i}/l_i$ ,  $G_{2N_i,i} = l_{y,i}/l_i$ , где

$l_i = \sqrt{l_{x,i}^2 + l_{y,i}^2}$  — длины стержней. Уравнения равновесия сводятся к системе  $G\vec{S} = \vec{Y}$ , где  $\vec{S} = [S_1, S_2, \dots, S_m]$  — вектор неизвестных усилий в стержнях (включая опорные);  $\vec{Y}$  — вектор нагрузок (нечетные элементы — горизонтальные усилия, четные — вертикальные).

Для решения системы линейных уравнений в символьном виде применяли операцию вычисления обратной матрицы, имеющую в системе Maple вид  $G^{-1} = 1/G$ . С помощью обратной матрицы решение системы получаем умножением матрицы на вектор нагрузок:  $\vec{X} = G^{-1}\vec{Y}$ .

Решение задачи при разных числах панелей сразу же выявило особенность задачи: при числе панелей  $n$ , кратном трем, определитель матрицы  $G$  равен нулю. Это вызвало необходимость проверить кинематическую изменяемость системы несмотря на то, что формально система, имея один лишний стержень, статически неопределима.

### Кинематический анализ

Рассмотрим ферму с тремя панелями (рис. 2).

Принимая выделенные угловые стержневые треугольники I и II неподвижными, рассмотрим мгновенный поворот треугольника  $ABC$  вокруг точки  $C$  и треугольника  $A'B'C'$  вокруг точки  $C'$  с угловой скоростью  $\omega$ . Имеем следующие скорости узлов:

$$\left. \begin{aligned} v_1 &= \omega a; \\ v_2 &= \omega h. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

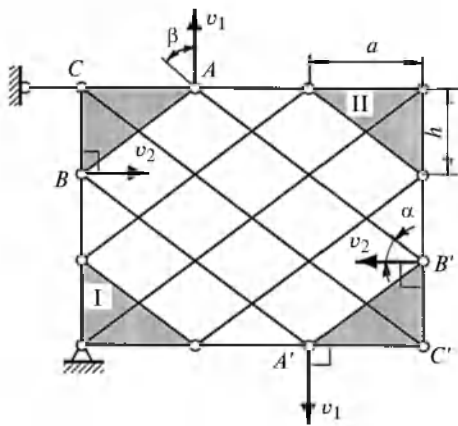


Рис. 2. Распределение возможных скоростей изменяемой решетки

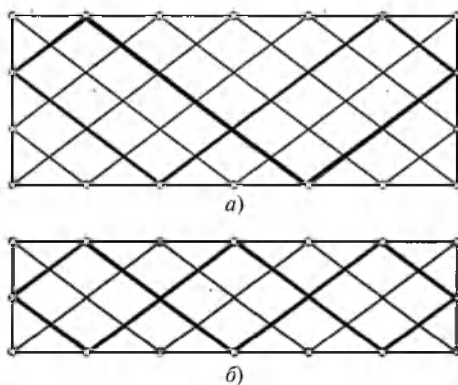


Рис. 3. Решетки с тремя (а) и двумя (б) вертикальными и шестью горизонтальными панелями

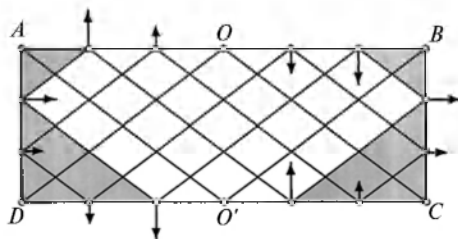


Рис. 4. Распределение скоростей в решетке с тремя вертикальными и шестью горизонтальными панелями

При этом выполняется теорема о проекциях скоростей на прямые  $AB'$  и  $A'B$ :

$$v_1 \cos \beta = v_2 \cos \alpha, \quad (2)$$

в чем можно убедиться, подставив формулы (1) и значения  $\cos \alpha = a/l$ ,  $\cos \beta = h/l$  и  $l = \sqrt{a^2 + h^2}$  в выражение (2).

Аналогично, изменяемыми будут решетки с тремя панелями по вертикали и  $n = 3j$  (рис. 3, а) и двумя панелями по вертикали, если  $n = 2j$  (рис. 3, б).

В работе [5] в качестве критерия изменяемости принято наличие "замкнутых зигзагов" (на рис. 3 выделены утолщенными линиями). На рис. 2 это

два контура, один из которых —  $ABA'B'$ . На рис. 4 показано поле возможных скоростей решетки с тремя вертикальными панелями и  $n = 6$ . Выделенные стержневые угловые треугольники могут поворачиваться вокруг точек  $A, B, C$  и  $D$ , группы стержней верхнего и нижнего поясов — вокруг точек  $O$  и  $O'$  соответственно. При этом некоторые раскосы будут перемещаться поступательно, а раскосы  $AO', OC, O'B, OD$  — неподвижны.

### Определение усилия в лишнем стержне

Рассмотрим только неизменяемые решетки, число панелей которых выражается формулой  $n = [3(1 + 2k) + (-1)^k]/4$ , где  $k$  — натуральное число. Модуль  $E$  упругости материала и площадь  $F$  сечения для всех стержней принимаем одинаковыми. Коэффициенты канонического уравнения метода сил  $\delta X + \Delta_p = 0$ , где  $X$  — неизвестное усилие в стойке, находим по формуле Максвелла — Мора:

$$EF\delta = 6[h^2 + \beta_k(a^3/3 + c^3)]/h^2;$$

$$EF\Delta_p = P[\alpha_k h^3 - \beta_k(a^3/3 + c^3)]/h^2,$$

где

$$\left. \begin{aligned} c &= \sqrt{a^2 + h^2}; \\ \alpha_k &= (3/8)(\xi_k - 1); \\ \xi_k &= \sin(\pi k/2) - \cos(\pi k/2); \\ \beta_k &= [3(2k + 1) + (-1)^k]/4. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Решение (усилие в лишнем стержне) имеет вид:  $X = -\Delta_p/\delta$ . Усилия во всех остальных стержнях статически неопределимой решетки находим по формуле  $N_i = N_i^P + Xn_i$ , где  $N_i^P$  и  $n_i$  — усилия в стержне  $i = 1, \dots, m$  от действия соответственно внешней нагрузки и единичных сил по направлению  $X$ . Определение коэффициентов в формулах в зависимости от числа  $n$  панелей [в формулах (3) это  $k$ ] составляет суть метода индукции. Для нахождения коэффициентов  $\alpha_k$  и  $\beta_k$  потребовалось получить последовательности:  $-2, -4, -5, -7, -8, -10, -11, -13, -14, -16, \dots$  и  $-6, -12, -15, -21, -24, -30, -33, -39, \dots$ . В режиме аналитических вычислений программу расчета выполняли столько раз, сколько было необходимо для выявления закономерности. Для автоматического формирования последовательностей коэффициентов удобно использовать оператор **coeff** системы Maple. Например, если требуется вывести на экран коэффициент  $\alpha_k$  в выражении  $\Delta_p$  (обозначено в программе как **Dp**), при  $a^3$  необходимо применить оператор **coeff(Dp, a^3)**. Для полученных последовательностей (длина их в этом расчете достигала 19) с помощью оператора

**rgf\_findrecur** можно найти соответствующие рекуррентные уравнения:

$$\alpha_k = \alpha_{k-1} - \alpha_{k-2} + \alpha_{k-3};$$

$$\beta_k = \beta_{k-1} - \beta_{k-2} + \beta_{k-3},$$

решение которых с помощью оператора **rsolve** дает искомые зависимости (3).

### Жесткость решетки

Для анализа жесткости решетки по формуле Максвелла—Мора определим прогиб консоли от действующей нагрузки. Методом индукции для не кратных трем значений  $n = [3(1 + 2k) + (-1)^k]/4$ , где  $k = 1, 2, 3, \dots$ , т. е. для  $n = 2, 4, 5, 7, 8, \dots$  получим:

$$EF\Delta = \frac{P(p_k a^6 + q_k c^6 + r_k h^6 + s_k a^3 h^3 + t_k a^3 c^3 + u_k c^3 h^3)}{9h^4 \delta}, \quad (4)$$

где

$$p_k = (1/4)[27k^4 + 54k^3 + 42k^2 + 15k + 2 + (-1)^k(18k^3 + 27k^2 + 13k + 2)];$$

$$q_k = (1/8)[162k(k + 1) + 45 + 27(-1)^k(1 + 2k)];$$

$$r_k = (3/2)(67 - \xi_k),$$

$$s_k = (1/4)[54k^3 + 81k^2 + 249k + 111 + (-1)^k(27k(1 + k) + 41)];$$

$$t_k = (3/8)[54k^3(k + 2) + 102k^2 + 48k + 9 + (-1)^k(36k^3 + 54k^2 + 32k + 7)];$$

$$u_k = 114\beta_k.$$

Заметим, что характеристические полиномы рекуррентных уравнений всех коэффициентов можно записать в виде:

$$(x + 1)^{w_1} (x - 1)^{w_2} (x^2 + 1)^{w_3},$$

где степени  $w_i = 1, 2, 3$  в этом представлении для коэффициента  $z_k$  (один из восьми коэффициентов  $\alpha_k, \beta_k, p_k, q_k, r_k, s_k, t_k, u_k$ ) можно организовать в виде компонент некоторого списка  $\overline{W}(z)$ .

Имеем следующие значения:

$$\overline{W}(s) = [3, 4, 0];$$

$$\overline{W}(t) = \overline{W}(p) = [4, 5, 0];$$

$$\overline{W}(\beta) = \overline{W}(u) = [1, 2, 0];$$

$$\overline{W}(q) = [2, 3, 0];$$

$$\overline{W}(\alpha) = \overline{W}(r) = [0, 1, 1].$$

Для некоторых коэффициентов рекуррентные уравнения совпадают, но при разных начальных

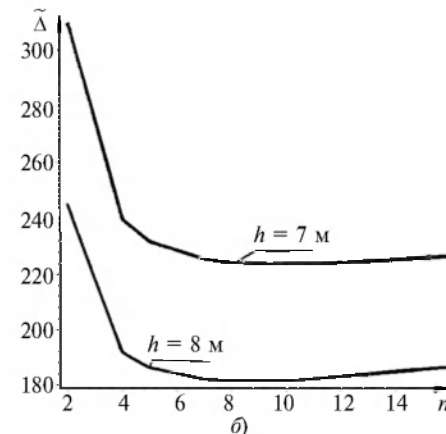
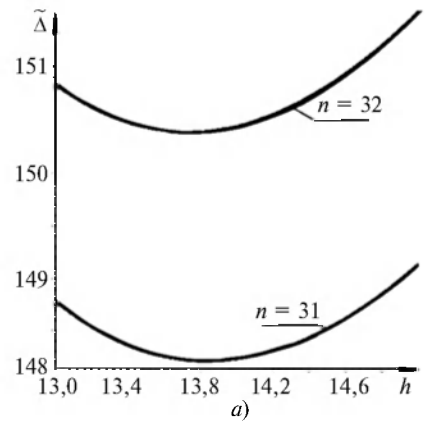


Рис. 5. Зависимости относительного прогиба  $\Delta$  консольной решетки длиной  $L = 50$  м от высоты  $h$  (а) и числа  $n$  (б) панелей

условиях коэффициенты получаются разные и отличаются, как правило, множителем.

Зависимость относительного прогиба  $\tilde{\Delta} = EF\Delta/P$  от высоты  $h$  при фиксированной длине консоли  $L = an$  имеет минимум (рис. 5, а). Зависимость относительного прогиба  $\tilde{\Delta}$  от числа  $n$  панелей (рис. 5, б) также имеет минимум. Это позволяет, пользуясь формулой (4), определять оптимальные по жесткости размеры решетки.

### Определение наиболее сжатого стержня решетки

Одна из причин разрушения решетки под действием нагрузок — потеря устойчивости наиболее сжатым стержнем (локальная потеря устойчивости конструкции). Проанализируем это явление. Предварительные вычисления, проведенные для решетки произвольных размеров, показали, что в зависимости от размеров конструкции и числа панелей наиболее сжатым будет стержень 1 или стержень 2 (см. рис. 1). Усилие в горизонтальном стержне 1 составляет:

$$N_1 = \frac{Pa[f_k(a^3 + 3c^3) + g_k h^3]}{3h^3 \delta}, \quad (5)$$

где  $f_k = [9k^2 + 6k + 1 + (-1)^k(3k + 1)]/2$ ;  
 $g_k = (3/2)[6k + (-1)^k - \xi_k]$ .

Усилие в вертикальном стержне 2 составляет:

$$N_2 = \frac{P[\sigma_k(a^3 + 3c^3) + \tau_k h^3]}{3h^2 \delta}, \quad (6)$$

где  $\sigma_k = (5/4)[6k + 3 + (-1)^k]$ ;  $\tau_k = (3/2)(9 - \xi_k)$ .

Все коэффициенты в формулах (5) и (6) получены индуктивным методом. Согласно этим формулам в длинных консольных решетках ( $a > h$ ) первым теряет устойчивость стержень 1, а в коротких высоких ( $h > a$ ) первым выходит из строя стержень 2, усилие в котором почти не зависит от  $h$  (рис. 6, а).

С увеличением числа  $n$  панелей при фиксированной длине  $L$  консоли усилие  $N_1$  убывает (рис. 6, б). Ломаный характер кривых объясняется тем, что расчет проводили только для чисел панелей, не кратных трем. Характер зависимости  $N_1/P(n)$  уси-

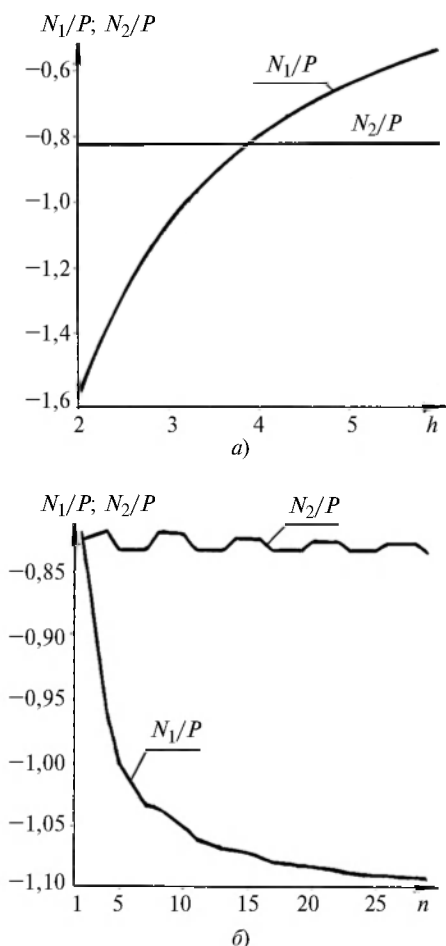


Рис. 6. Зависимости относительных усилий  $N_1/P$  и  $N_2/P$  соответственно в стержнях 1 и 2 консольной решетки (см. рис. 1) длиной  $L = 10$  м от  $h$  при  $n = 14$  (а) и от  $n$  при  $h = 3$  м (б)

лия в стержне 1 свидетельствует о наличии асимптоты. Действительно, можно найти предел

$$\lim_{k \rightarrow \infty} N_1 = -PL/(3h). \quad (7)$$

При вычислении предела последовательности  $N_1$  пришлось вычислять предел отдельно для четных и нечетных  $k$ , так как в общем случае эта последовательность, содержащая слагаемое с множителем  $(-1)^k$ , предела не имеет.

Таким образом, аналитический метод, основанный на использовании системы Maple, позволил найти точное решение для напряженного состояния решетки произвольной конфигурации, определяемой ее размерами и, что особенно важно, числом панелей. Последнее обстоятельство решает задачу, постоянно возникающую при расчете реальных решеток с большим (или очень большим) числом стержней, применяемых для снижения массы корпусов и несущих элементов механизмов и машин. Эта проблема заключается в неизбежной потере точности и увеличении времени расчетов таких решеток, что является одним из недостатков традиционных методов расчета. Другой недостаток численных расчетов — невозможность анализа результатов. При аналитическом методе проанализировать результаты довольно просто [пример — вычисление предела (7)]. Кроме индуктивного метода при расчете стержневых систем используют эволюционные и генетические алгоритмы [6–8], при применении которых методом индукции можно уточнить результаты и ускорить вычисления.

#### БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЕ ССЫЛКИ

1. Кирсанов М. Н. Индуктивный анализ влияния погрешности монтажа на жесткость и прочность плоской фермы // Инженерно-строительный журнал. 2012. № 5 (31). С. 38–42.
2. Кирсанов М. Н. Особенности аналитического расчета пространственных стержневых систем // Строительная механика и расчет сооружений. 2011. № 5. С. 11–15.
3. Кирсанов М. Н. Maple и MapleT. Решения задач механики. СПб.: Лань, 2012. 512 с.
4. Голоскоков Д. П. Практический курс математической физики в системе Maple. СПб.: Изд-во ПаркКом, 2010. 644 с.
5. Рабинович И. М. Курс строительной механики стержневых систем. М.: Оникс, 2012. 377 с.
6. Кирсанов М. Н. Генетический алгоритм оптимизации стержневых систем // Строительная механика и расчет сооружений. 2010. № 2. С. 60–63.
7. Алексейцев А. В., Курченко Н. С. Поиск рациональных параметров стержневых металлоконструкций на основе адаптивной эволюционной модели // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2011. № 3. С. 7–15.
8. Cazacu R., Grama L. Steel truss optimization using genetic algorithms and FEA // Procedia Technology. 2014. N. 12. P. 339–346.