

Статический расчет вантовой системы

д.ф.-м.н. проф. Кирсанов М.Н.
НИУ МЭИ,
8(495) 362-73-14, C216@ya.ru

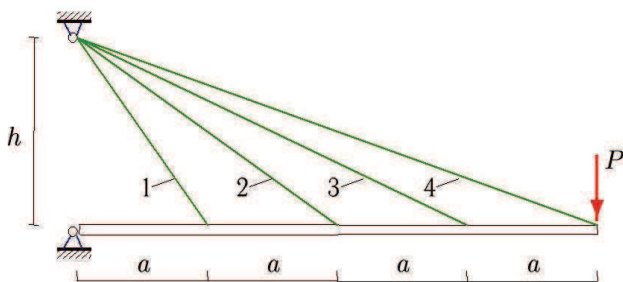
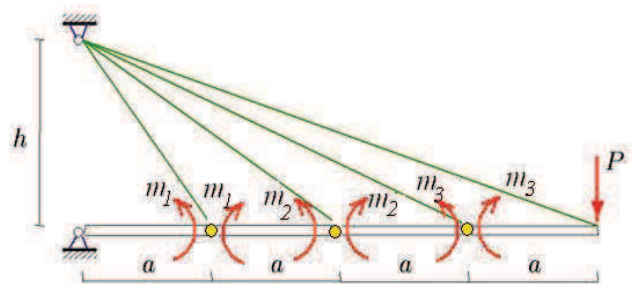
Аннотация. Получено распределение усилий в вантах консольной конструкции с жесткой балкой и вантами различной жесткости для произвольного числа вант. Для нахождения аналитического решения задачи использована система компьютерной математики Maple и метод индукции. В решение входит бисимметричная матрица, свойства которой исследованы. Проанализировано влияние перераспределения жесткости на равномерность значений усилий.

Ключевые слова: ванты, индукция, бисимметричная матрица, Maple

Известны как статические, так и динамические численные и приближенные расчеты вантовых систем [1-7]. Получение точных решений для таких систем затруднительно не только в силу их естественной статической неопределимости, но и за счет большого числа параметров (геометрических и физических), входящих в модель конструкции. Однако с развитием систем компьютерной математики для ряда сооружений (или их приближенных моделей) появилась возможность построения аналитических решений. Особенно эффектны такие решения для регулярных систем, сложность которых описывается одним или несколькими натуральными числами. Исследуемая модель вантовой конструкции относится именно к такому случаю. Здесь сложность определяется числом вант. Заметим, что расчеты (аналитические или численные) с определенным, заданным наперед, числом сложности (например, числом панелей фермы или числом вант, как в нашем случае) довольно просты, их значение и применение ограничено.

Постановка задачи

На рисунке 1 приведена консольная вантовая система с жесткой балкой ($n=4$). Поставим себе задачу найти распределение усилий в вантах и прогиб консоли в зависимости от числа вант.

**Рисунок 1. Консоль при $n=4$** **Рисунок 2. Основная система**

Рассмотрим случай переменных коэффициентов жесткости вант, в частности, линейную функцию номера

$$EF_j = EF_0(1 + \gamma j), \quad j = 1, \dots, n,$$

где: E – модуль упругости, F_j – площадь сечения ванты с номером j , γ – безразмерный параметр распределения, положительный, если жесткости вант растут слева направо и отрицательный в обратном случае.

Ставится задача о нахождении распределения усилий в вантах.

Решение

Конструкция статически неопределимая, для раскрытия статической неопределимости используем метод сил. В качестве основной системы возьмем статически определимую систему с искусственно введенными шарнирами в местах крепления вант (рисунок 2). Известные метода сил – моменты в шарнирах. Поместим начало координат в шарнирную опору

балки, координаты точек крепления вант имеют вид: $x_j = ja, j = 1, \dots, n$. Длины вант: $l_j = \sqrt{h^2 + x_j^2}$. Для определения усилий $S_{i,k}, i = 1, \dots, n$ в вантах от действия единичных моментов, соответствующих неизвестным $M_k, k = 1, \dots, n-1$ составляем систему n уравнений, каждое из которых представляет собой сумму моментов относительно шарнира (моментной точки ξ) с координатой $x_{n-\xi}, \xi = 1, \dots, n$ всех сил, приложенных к отсеченной по этому шарниру правой части системы (рис. 3, $n = 3, \xi = 3$). Таким образом, движемся по балке справа налево, рассматривая всякий раз равновесие правой от шарнира части балки. Моментная точка с номером n — неподвижная опора балки. Система уравнений для определения усилий в вантах от действия единичного момента, соответствующего неизвестной с номером k , имеет вид:

$$\begin{cases} L_i = 0, i = 1, \dots, n, i \neq n-k, \\ L_{n-k} = 1, \end{cases} \quad (1)$$

где для обозначения суммы введена функция $L_i = \sum_{\zeta=1}^i \zeta a S_{\zeta+N-i,k} \sin \alpha_{\zeta+N-i}$.

Для вычисления усилий от действия всех единичных моментов потребуется последовательно составить $n-1$ систем уравнений (1) соответственно для $k = 1, \dots, n-1$.

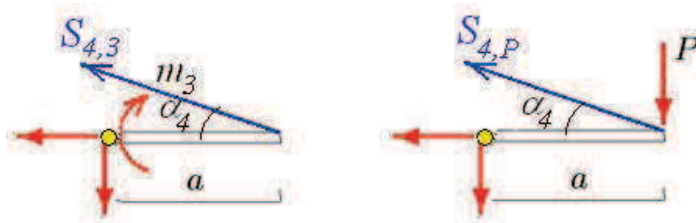


Рисунок 3. Определение усилий в вантах от единичного момента и от нагрузки

Получены следующие значения усилий:

$$S_{i,i} = -\frac{2}{a \sin \alpha_i}, S_{i+1,i} = \frac{1}{a \sin \alpha_i}, i = 1, \dots, N, S_{i,i+1} = \frac{1}{a \sin \alpha_i}, i = 1, \dots, N-1.$$

Остальные значения усилий в вантах от действия единичных моментов равны нулю. Усилия от действия нагрузки вычисляются проще. Единственное усилие, отличное от нуля, будет усилие в крайней правой ванте $P / \sin \alpha_n$. Если обозначить усилия от основной нагрузки $S_{i,n}$, то все усилия образуют квадратную матрицу $S_{i,j}$, строки которой соответствуют номерам вант $i = 1, \dots, n$, столбцы $j = 1, \dots, n-1$ - номерам неизвестных. Последний столбец — усилия в вантах от основной нагрузки. При $n = 4$ имеем:

$$S = \begin{bmatrix} -\frac{2l_1}{ah} & \frac{l_1}{ah} & 0 & 0 \\ \frac{l_2}{ah} & -\frac{2l_2}{ah} & \frac{l_2}{ah} & 0 \\ 0 & \frac{l_3}{ah} & -\frac{2l_3}{ah} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{l_4}{ah} & \frac{Pl_4}{h} \end{bmatrix}.$$

Коэффициенты канонической системы метода сил $\sum_{j=1}^{n-1} \delta_{i,j} m_j + \Delta_i = 0, i = 1, \dots, n-1$ вычисляем по формуле Максвелла-Мора:

$$\delta_{i,j} = \sum_{k=1}^n \frac{S_{k,i} S_{k,j} l_k}{EF_k}, \quad \Delta_i = \sum_{k=1}^n \frac{S_{k,i} S_{k,n} l_k}{EF_k}, \quad i, j = 1, \dots, n-1.$$

Получаем следующие величины: $EF_o \delta_{i,i} = \varphi_{i-1} + 4\varphi_i + \varphi_{i+1}$, $i = 1, \dots, n-1$, $\varphi_0 = 0$,

$$EF_o \delta_{i,i+1} = -2(\varphi_i + \varphi_{i+1}), \quad i = 1, \dots, n-2, \quad EF_o \delta_{i,i+2} = \varphi_{i+1}, \quad i = 1, \dots, n-3, \quad EF_o \Delta_{n-1} = Pa\varphi_n,$$

где: $\varphi_i = \frac{l_i^3}{a^2 h^2 (1 + \gamma)}$. Остальные коэффициенты (с учетом симметрии $\delta_{i,j} = \delta_{j,i}$) равны нулю.

При $n = 4$ имеем следующую матрицу системы канонических уравнений:

$$\frac{1}{EF_0} \begin{bmatrix} 4\varphi_1 + \varphi_2 & -2\varphi_1 - 2\varphi_2 & \varphi_2 \\ -2\varphi_1 - 2\varphi_2 & 4\varphi_2 + \varphi_3 & -2\varphi_2 - 2\varphi_3 \\ \varphi_2 & -2\varphi_2 - 2\varphi_3 & 4\varphi_3 + \varphi_4 \end{bmatrix}.$$

Матрица имеет трехдиагональный вид по аналогии с такой же матрицей в задаче о неразрезной балке (уравнение «трех моментов»). Это обусловлено выбором аналогичной основной системы, упрощающей вид матрицы канонических уравнений. Методом индукции [8] получим определитель этой системы:

$$d = h \sum_{j=1}^n (\gamma j + 1) \frac{j^2}{l_j^3} \prod_{i=1}^n l_i^3$$

и ее решение (моменты во введенных шарнирах):

$$m_i = -\frac{ahPl_n^3}{d} \sum_{j=1}^{n-1} (\gamma j + 1) \frac{c_{i,j} j}{l_j^3} \prod_{\xi=1}^{n-1} l_\xi^3, \quad i = 1, \dots, n-1.$$

В решение входит бисимметричная матрица с размера $\nu \times \nu$, где $\nu = n-1$. На свойствах этой матрицы стоит остановиться отдельно. Сначала для примера покажем вид этой матрицы при $\nu = 3$:

$$c = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

Размер матрицы на единицу меньше числа вант. В общем случае для таких матриц имеем:

$$c_{1,i} = q_i, \quad i = 1, \dots, \nu,$$

$$c_{i,j} = p_{i-1} c_{1,j}, \quad p_0 = 1, \quad i = 1, \dots, [\nu/2], \quad j = i, \dots, \nu-1,$$

где последовательность q_i задает первую строку, а последовательность p_i — множители для других строк.

Если симметрия матрицы относительно главной диагонали обеспечивается равенством $c_{i,j} = c_{j,i}$, $i, j = 1, \dots, \nu$, то симметрия относительно побочной диагонали задается следующим соотношением $c_{\nu-j+1, \nu-i+1} = c_{i,j}$, $i = 1, \dots, \nu-1$, $j = i, \dots, \nu-1$.

При $\nu = 6$ матрица имеет вид:

$$c = \begin{bmatrix} q_1 & q_2 & q_3 & q_4 & q_5 & q_6 \\ q_2 & p_1 q_2 & p_1 q_3 & p_1 q_4 & p_1 q_5 & q_5 \\ q_3 & p_1 q_3 & p_2 q_3 & p_2 q_4 & p_1 q_4 & q_4 \\ q_4 & p_1 q_4 & p_2 q_4 & p_2 q_3 & p_1 q_3 & q_3 \\ q_5 & p_1 q_5 & p_1 q_4 & p_1 q_3 & p_1 q_2 & q_2 \\ q_6 & q_5 & q_4 & q_3 & q_2 & q_1 \end{bmatrix}.$$

Для четных значений $\nu = 2k$ имеем выражение определителя:

$$\det C = \frac{1}{p_k^2 - p_{k-1}^2} \prod_{i=1}^k (p_{i-1}q_{i+1} - p_iq_i)^2 - (p_{i-1}q_{\nu-i} - p_iq_{\nu-i+1})^2, \quad (2)$$

для нечетных значений $\nu = 2k - 1$ аналогично:

$$\det C = \frac{q_k}{p_{k-1}} \prod_{i=1}^{k-1} (p_{i-1}q_{i+1} - p_iq_i)^2 - (p_{i-1}q_{\nu-i} - p_iq_{\nu-i+1})^2. \quad (3)$$

Формулы (2) и (3) получены методом индукции в системе Maple [9, 10]. В рассматриваемом случае в формуле для выражения моментов имеем $q_i = n - i$, $p_i = i + 1$.

Усилия в вантах T_j , $j = 1, \dots, n$ вычисляем как сумму соответствующих усилий от действия моментов в шарнирах и от внешней нагрузки:

$$T_j = \sum_{i=1}^{n-1} S_{j,i} m_i + S_{j,n} = \frac{Pnj(1+\gamma j)}{l_j^2 d} \prod_{i=1}^n l_i^3, \quad j = 1, \dots, n-1. \quad (4)$$

Одним из существенных, хотя и очевидных, преимуществ аналитического решения (4) является скорость вычислений. Это проявляется даже в системе компьютерной математики Maple, где прямое нахождение усилий по описанной схеме (составление системы канонических уравнений, ее решение) многократно дольше. Уже при $n=12$ ожидание вычислений, включающих в себя решение системы канонических уравнений, затягивается на неопределенное время. Безусловно, в программах, написанных на известных алгоритмических языках (СИ, Pascal), счет достаточно быстрый, но при этом теряется точность вычислений и удобство анализа, доступное в Maple и подобных пакетах. Распределение усилий в вантах (отношенных к нагрузке) в зависимости от высоты h при $a = 20$ м, $\gamma = 0.1$, $n = 8$ дано на рисунке 4 (высота дана в метрах). Выбранное значение коэффициента перераспределения $\gamma = 0.1$ означает увеличение жесткости вант слева направо от $1.1EF_0$ до $1.8EF_0$. Интересно отметить, что на увеличение высоты менее всего реагируют крайне правые (с большим номером) ванты.

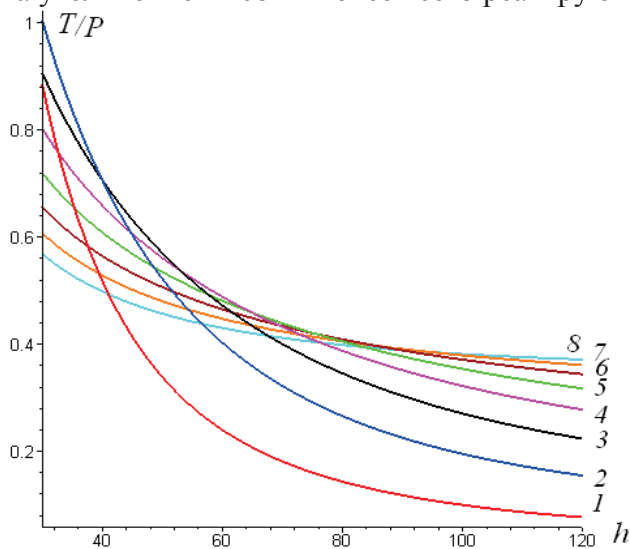


Рисунок 4. Усилия в вантах в зависимости от высоты

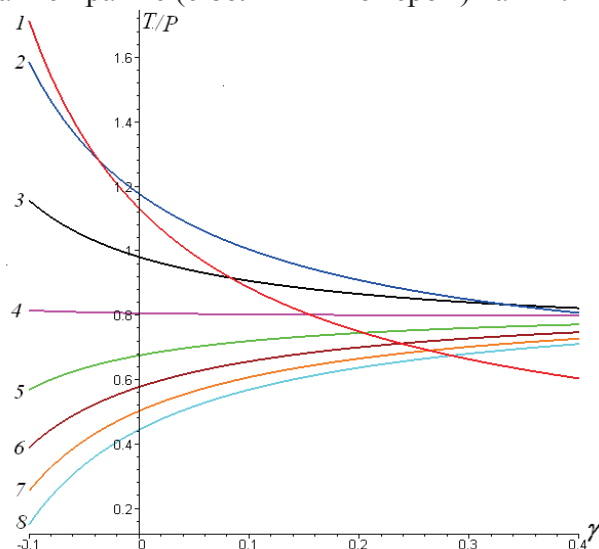


Рисунок 5. Усилия в вантах в зависимости от коэффициента перераспределения

На рисунке 5 показана зависимость от γ усилий в различных вантах при $a=20$ м, $h = 30$ м, $n = 8$. Наибольший и нежелательный с точки зрения экономии материала разброс усилий наблюдается при отрицательных γ , что соответствует уменьшению жесткости вант с увеличением номера (наиболее толстый канат слева, тонкий – справа, на конце консоли). Отрицательные значения коэффициента ограничены снизу естественным теоретическим значением $\gamma = -1/n$ (жесткость не может быть отрицательной). Эффект влияния перераспределения

жесткостей вант на равномерность значений усилий в них может быть использован для более рационального использования материала.

Выводы

На примере расчета модели вантовой конструкции показан алгоритм получения аналитического решения задачи статики. Анализ результатов показывает особенности системы при различных геометрических и упругих данных задачи. Аналогичные приемы с использованием системы Maple могут быть реализованы и в других проблемах, например, в задачах упругости массивных пространственных тел [11, 12].

Литература

1. Кирсанов Н.М. Висячие системы повышенной жесткости. Стройиздат, 1973, 116 с.
2. Konstantakopoulos T.G., Michaltsos G.T. A mathematical model for a combined cable system of bridges // *Engineering Structures*, V. 32, N 9. 2010, p. 2717-2728
3. Michel Virlogeux Recent evolution of cable-stayed bridges // *Engineering Structures*, V.21, Issue 8, August 1999, Pages 737-755
4. Hoon Yoo, Ho-Sung Na, Dong-Ho Choi Approximate method for estimation of collapse loads of steel cable-stayed bridges // *Journal of Constructional Steel Research*, V. 72, May 2012, Pages 143-154
5. Huu-Tai Thai, Seung-Eock Kim Second-order inelastic analysis of cable-stayed bridges // *Finite Elements in Analysis and Design*, V. 53, June 2012, Pages 48-55
6. Hassan M.M. Optimization of stay cables in cable-stayed bridges using finite element, genetic algorithm, and B-spline combined technique // *Engineering Structures*, V. 49, N4., 2013, pp.643-654
7. José J. Oliveira Pedro, António J. Reis Nonlinear analysis of composite steel–concrete cable-stayed bridges // *Engineering Structures*, V. 32, N9, 2010, pp. 2702-2716
8. Кирсанов М.Н. Индуктивный анализ влияния погрешности монтажа на жесткость и прочность плоской фермы // *Инженерно-строительный журнал*. 2012. №5(31). с. 38-42
9. Кирсанов М.Н. Maple и MapleT. Решение задач механики. СПб.: Лань, 2012. 512 с.
10. Голоскоков Д.П. Практический курс математической физики в системе Maple. СПб.: Изд-во ПаркКом, 2010. 644 с.
11. Матросов А.В. Расчет балочных перекрытий численно-аналитическим методом // *Журнал университета водных коммуникаций*. 2012. № 1. с. 8-15.
12. Матросов А.В. Численно-аналитический расчет балок-стенок на линейно-упругом основании // *Журнал университета водных коммуникаций*. 2011. № 2. с. 14-21.