

УДК 624.07

М.Н. Кирсанов

ФГБОУ ВО «НИУ "МЭИ"»

## О ВЛИЯНИИ НАКЛОНА ПОДВИЖНОЙ ОПОРЫ НА ЖЕСТКОСТЬ БАЛОЧНОЙ ФЕРМЫ

**Аннотация.** Для плоской, статически определимой упругой фермы с параллельными поясами методом индукции с применением системы компьютерной математики Maple получены аналитические выражения для прогиба в зависимости от числа панелей при равномерной и сосредоточенной нагрузке. Показано, что угол наклона подвижной опоры существенно влияет на жесткость конструкции. Кривые зависимости прогиба от числа панелей при фиксированной длине пролета и заданной нагрузке обнаруживают экстремум. Найдены асимптотические характеристики прогиба и выражения для усилий в наиболее сжатых и растянутых стержнях.

**Ключевые слова:** ферма, прогиб, индукция, Maple, наклон опоры, аналитическое решение

**DOI:** 10.22227/1997-0935.2016.10.35-44

Аналитические решения в механике имеют несомненные преимущества перед численными. Они могут быть использованы и как тестовые решения для сложных расчетов, и как оценочные для модельного представления реальных конструкций. Получение решений задач о напряженном и деформированном состоянии стержневых систем с конкретными характеристиками, заданными параметрически, не представляет особой сложности. С использованием современных систем компьютерной математики такие решения могут быть получены в рамках студенческого курса по теоретической или строительной механике.

Значительно сложнее и, безусловно, важнее нахождение решений для целого класса подобных конструкций, отличающихся числом стержней или панелей, если речь идет о балочных фермах. При этом решения, найденные в символической форме, могут быть аналитически исследованы в зависимости от всех параметров, характеризующих конструкцию. Это позволяет выявить характерные особенности систем, найти возможности оптимизации по массе, прочности или жесткости. В настоящее время наиболее продуктивным методом получения аналитических решений для ряда ферм является метод индукции.

В отличие от известных методов оптимизации, основанных на различных численных решениях [1–8], включая метод конечных элементов [9], генетические алгоритмы [10], экспериментальные подходы [11], системы автоматизированного проектирования [12], метод индукции применяется только для регулярных систем [13, 14]. Влияние конструкции подвижной опоры на прогиб изучено в [15]. Аналитические решения для смещения подвижной опоры в конструкциях некоторых статически определимых плоских ферм найдены в работах [16, 17]. Показана эффективность индуктивного метода вывода зависимости перемещения от числа панелей. Обзоры некоторых точных решений даны в работах [18–20]. Метод индукции, являющийся основой практически всех аналитических решений, в которые в качестве параметра входит число

стержней или панелей, применим как для плоских [21, 22], так и пространственных конструкций [23, 24]. Проблемы нахождения решений для регулярных статических систем, к числу которых относится исследуемая в настоящей работе ферма, образование таких систем и их существование рассмотрены в работах Р.Дж. Хатчинсона и Н.Э. Флика [13, 14].

*Схема фермы.* В большинстве работ, использующих аналитические подходы, получены решения задач о прогибе и усилий в фермах. На примере фермы с нисходящими раскосами (рис. 1) рассмотрим одну, еще не исследованную аналитически проблему, характерную для ферм с подвижной опорой.

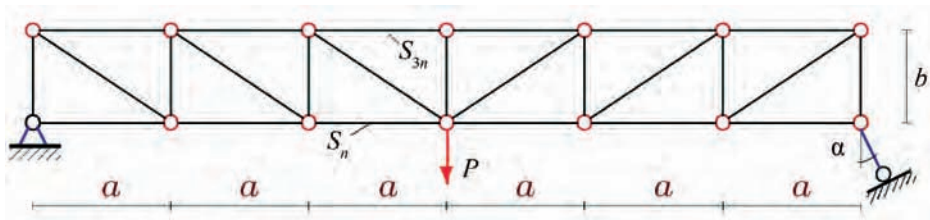


Рис. 1. Ферма с  $n = 3$  панелями в половине пролета:  $S_{3n}$ ,  $S_n$  — усилия в стернях;  $P$  — вертикальная нагрузка на ферму;  $b$  — ширина фермы;  $a$  — длина панели;  $\alpha$  — угол наклона опоры

Во всех постановках и решениях задачи о подобных фермах естественным и логичным образом предполагается, что подвижная опора имеет вертикальную реакцию. Если эта опора конструктивно выполнена в виде стержневого элемента, этот элемент будет вертикальным; если опора представляет собой каток, то основание катка проектируется строго горизонтально. Изучим *влияние наклона* подвижной опоры на жесткость фермы, тестируемой по прогибу середины пролета. Небольшой наклон может быть вызван либо просто накоплением деформаций за долгий срок работы (рис. 2), либо это является следствием аварийной ситуации (например, экстренное торможение тяжеловесного транспорта). В последнем случае наклон может быть весьма значительным и требующим немедленного устранения. Небольшими же наклонами, вероятно, можно пренебречь. Однако аналитические исследования могут выявить интересные особенности такого рода дефектов.

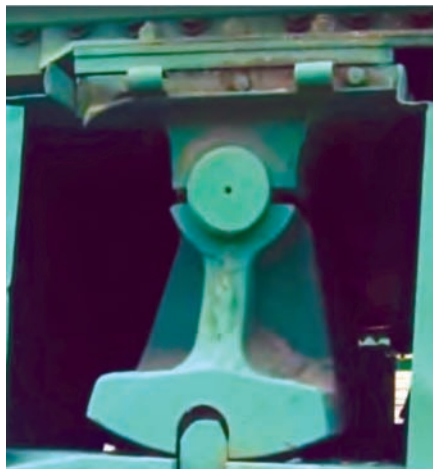


Рис. 2. Наклоненная подвижная опора путепровода, Казанское направление Московской ж. д., 19 км (Люберцы)

Примем число панелей четным. В этом случае за контрольную точку можно взять срединный шарнир нижнего пояса.

Вычисление усилий в стернях в символьной форме производится по программе, написанной на языке Maple [25]. Для ввода в программу configura-

ции фермы пронумеруем шарниры слева направо сначала по нижнему, затем по верхнему поясу. Начало координат выберем в левой неподвижной опоре. Имеем следующие координаты узлов:

$$x_i = x_{i+2n+1} = a(i-1), y_i = 0, y_{i+2n+1} = b, i = n, \dots, 2n+1.$$

Координаты концов опорных стержней левой (неподвижной) опоры:

$$x_{4n+3} = -1, y_{4n+3} = 0, x_{4n+4} = 0, y_{4n+4} = -1.$$

Координаты конца наклонного опорного стержня, моделирующего правую (наклонную) опору:

$$x_{4n+5} = x_{2n+1} + \sin \alpha, y_{4n+5} = -\cos \alpha.$$

Порядок соединения узлов и стержней решетки фермы введем двумерными векторами  $\bar{V}_i, i = 1, \dots, m$ , где  $m = 8n + 4$  — число стержней фермы, включая три опорных стержня. Первая компонента этих векторов — номер шарнира фермы в условном начале этого вектора, вторая — номер шарнира в его конце. Выбор направления векторов не связан с усилиями или знаками усилий, просто определяют структуру соединений стержней фермы, необходимую для составления уравнений равновесий узлов (шарниров).

Соединения стержней нижнего пояса с узлами (шарнирами) зададим следующими векторами:  $\bar{V}_i = [i, i+1], i = 1, \dots, 2n$ ; верхнего пояса:  $\bar{V}_{i+2n} = [i+2n+1, i+2n+2], i = 1, \dots, 2n$ ; раскосы решетки:  $\bar{V}_{i+4n} = [i+1, i+2n+1], \bar{V}_{i+5n} = [i+n, i+3n+2], i = 1, \dots, n$ , стойки решетки  $\bar{V}_{i+6n} = [i, i+2n+1], i = 1, \dots, 2n+1$ .

Для вычисления направляющих косинусов усилий в уравнениях равновесия при использовании метода вырезания узлов фермы потребуются длины стержней и проекции векторных представлений этих стержней:

$$l_i = \sqrt{l_{1,i}^2 + l_{2,i}^2}, l_{1,i} = x_{V_{2,i}} - x_{V_{1,i}}, l_{2,i} = y_{V_{2,i}} - y_{V_{1,i}}, i = 1, \dots, m.$$

Первый индекс в  $V_{j,i}$  принимает значения 1 или 2 и соответствует номеру компоненты вектора  $\bar{V}_i$  (условное начало — 1, конец — 2), второй — номер стержня. Матрица направляющих косинусов  $\mathbf{G}$  имеет следующие элементы ( $i = 1, \dots, m$ ):

$$G_{k,i} = -l_{j,i}/l_i, k = 2V_{i,2} - 2 + j, k \leq m, j = 1, 2;$$

$$G_{k,i} = l_{j,i}/l_i, k = 2V_{i,1} - 2 + j, k \leq m, j = 1, 2.$$

*Решение задачи.* Определение усилий в стержнях фермы сводится к решению системы линейных уравнений  $\mathbf{G}\bar{S} = \bar{B}$ , где  $\bar{B}$  — вектор нагрузок длиной  $m$ . Здесь  $\bar{S}$  — вектор неизвестных усилий. Горизонтальные нагрузки, приложенные к узлу  $i$ , заносятся в нечетные элементы  $B_{2i-1}$ , вертикальные — в четные  $B_{2i}$ . Для решения системы уравнений в символьной форме использовался метод обратной матрицы  $\bar{S} = \mathbf{G}^{-1}\bar{B}$ , который хорошо реализуется в системе Maple [25, 26], работает быстрее алгоритмов специализированного пакета LinearAlgebra и упрощает повторное решение системы при изменении нагрузки. Для определения перемещения по формуле Максвелла-Мора потребуется нахождение усилий при действии нагрузки и единичной вертикальной силы, приложенной к середине пролета. В случае одинаковых жесткостей стержней эта формула имеет вид

$$\Delta = \frac{1}{EF} \sum_{i=1}^{m-3} S_{i,p} S_{i,1} l_i, \quad (1)$$

где  $S_{i,p}$  — усилие в стержне  $i$  от действия внешней нагрузки;  $S_{i,1}$  — усилие в стержне  $i$  от действия единичной силы. Если по формуле (1) последовательно рассчитывать прогиб в фермах с различным числом панелей ( $n = 1, \dots, 8$ ), то можно заметить общий вид формулы для прогиба и получить последовательность коэффициентов при  $a^3, b^3, c^3, ab^2, ba^2$ . Оператор `rgf_findrecur` из пакета `genfunc` системы Maple позволяет получить рекуррентные уравнения для последовательности этих коэффициентов. Например, для коэффициента при  $a^3$ , который обозначим  $C_1$ , имеем последовательность 1, 6, 19, 44, 85, 146, 231, 344 и следующее однородное уравнение пятого порядка:

$$C_{1,n} = 4C_{1,n-1} - 6C_{1,n-2} + 4C_{1,n-3} - C_{1,n-4}.$$

Решение этого уравнения (общий член последовательности) находим с помощью оператора `rsolve` (этот оператор встроен в систему и не требует подключения специального пакета). В результате получаем искомую формулу для прогиба:

$$EF\Delta = Pn \frac{C_1 a^3 + C_2 b^3 + C_3 c^3 + C_4 ab^2 \operatorname{tg}^2 \alpha + C_5 ba^2 \operatorname{tg} \alpha}{2b^2}, \quad (2)$$

где  $C_1 = (1 + 2n^2)/3, C_2 = C_3 = C_4 = 1, C_5 = 1 - n$ .

Графики полученной зависимости обнаруживают минимумы (рис. 3). Кривые построены для безразмерного прогиба  $\Delta' = \Delta EF / (PL)$  при фиксированной длине пролета  $L = an = 40$  м. Отметим, что малый угол наклона опоры незначительно влияет на прогиб. При  $n = 10$  прогиб уменьшается на 1,2 % при увеличении угла наклона с 0 до 0,1 град. (или  $5,7^\circ$ ).

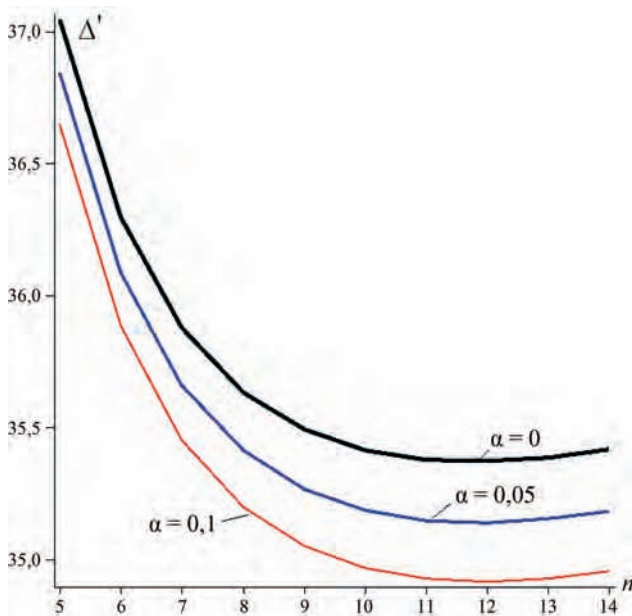


Рис. 3. Зависимость относительного прогиба от числа панелей,  $b = 4$  м

Зависимость прогиба от угла наклона опоры (рис. 4) демонстрирует известный и теоретически возможный эффект «прощелкивания» конструкции, который в данном случае наблюдается при угле около  $80^\circ$  и, безусловно, соответствует некоторой аварийной, недопустимой ситуации.

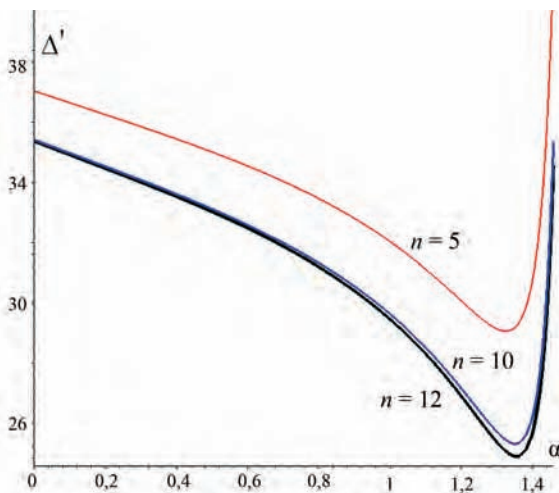


Рис. 4. Зависимость относительного прогиба от угла наклона опоры,  $L = 40$  м,  $b = 4$  м

С увеличением числа панелей (на заданной длине пролета) прогиб уменьшается, а экстремальная точка становится острее.

*Усилия в стержнях.* Аналогично индуктивным методом можно получить аналитические выражения для усилий в наиболее сжатом стержне (верхний пояс, середина пролета, см. рис. 1):  $S_{3n} = -Pna/(2b)$  и наиболее растянутом (нижний пояс, середина пролета):

$$S_n = P((n-1)a/b - \operatorname{tg}\alpha) / 2. \quad (3)$$

Таким образом, можно вычислить критический угол наклона подвижной опоры, при котором усилие в наиболее растянутом стержне нижнего пояса перейдет через нуль, и стержень будет воспринимать сжимающую нагрузку. Из формулы (3) имеем  $\operatorname{tg}\alpha = (n-1)a/b$ . При этом появления сжимающих усилий в нижнем поясе не следует ожидать, так как при фиксированной длине полупролета  $L = an$  и больших значениях  $n$  критический угол  $\operatorname{tg}\alpha = (n-1)L/(nb) \approx L/b$  больше угла наклона раскосов к вертикали в силу того, что в реальных конструкциях  $L > b$ . Полученные результаты могут быть расширены и на случай *равномерной нагрузки* фермы по *нижнему* поясу. Несколько длиннее при этом получается последовательность рассчитываемых ферм, необходимая для выявления закономерности. Здесь потребовалось рассчитать 10 ферм, начиная с  $n = 1$ . Формула для прогиба имеет прежний вид (2), где

$$C_1 = n(1 + 5n^2)/6, \quad C_2 = C_3 = n, \quad C_4 = 2n - 1, \quad C_5 = (1/3)(1 - n)(5n - 1).$$

Заметим, что указанное удлинение последовательности рассчитываемых ферм, необходимой для нахождения закономерности, является реальной и существенной во многих случаях проблемой. Дело в том, что в отличие от численного счета, аналитические преобразования выполняются значительно медленнее. Так при расчете прогиба фермы, имеющей в половине пролета 12

и более панелей, время преобразований в системе Maple растет в геометрической прогрессии, что не позволяет получить символьное решение (формулу) для прогиба непосредственно. Единственный вариант — обобщение решений, полученных для простых (или относительно простых) ферм. Проверку же всегда можно просто и быстро выполнить численно для любого реального числа панелей, вычислив сначала результат в численной моде той же программы и проверить его затем по найденной формуле. Такая проверка вполне заменяет традиционное доказательство методом математической индукции.

Усилия в наиболее сжатых и растянутых стержнях, также полученные по индукции, имеют вид

$$S_{3n} = -Pn^2 a / (2b), S_n = P \left( (n^2 - 1) a / b - (2n + 1) \operatorname{tg} \alpha \right) / 2.$$

Соответствующие графики зависимостей прогиба от числа панелей и угла наклона опоры отличаются лишь количественно. При этом вводится на ограничение на суммарную нагрузку на ферму, т.е. на каждый узел нижнего пояса действует вертикальная сила  $P = P_{sum} / (2n - 1)$ , где  $P_{sum}$  — общая нагрузка на ферму.

Для равномерной нагрузки по верхнему поясу имеем выражение вида (2), где  $C_1 = n(1 + 5n^2) / 6$ ,  $C_2 = n + 2$ ,  $C_3 = n$ ,  $C_4 = 2n + 1$ ,  $C_5 = (1/3)(1 - n)(5n + 2)$ .

Кривая относительного прогиба  $\Delta' = \Delta EF / (PL)$  в зависимости от действия сосредоточенной нагрузки в середине пролета (см. рис. 3) и числа панелей имеет асимптоту  $\lim_{n \rightarrow \infty} \Delta' / n = b / L$ . При равномерном нагружении верхнего или нижнего пояса асимптоты совпадают:  $\lim_{n \rightarrow \infty} \Delta' / n = b / (2L)$ .

**Выводы.** Аналитический подход к решению задачи о ферме с наклоненной опорой показал влияние величины наклона на напряженно-деформированное состояние конструкции при произвольном числе панелей. Выяснилось, прежде всего, что при малых углах влияние наклона на прогиб пренебрежимо мало, но большие углы могут привести к разрушению фермы. Показано также, что вид решения для прогиба при разных типах нагружения не меняется и имеет вид полинома степени не выше третьей в соответствии с числом панелей  $n$  в половине пролета. Получены и проанализированы зависимости усилий в наиболее сжатых и растянутых стержнях от  $n$ . Найденны некоторые асимптотические характеристики конструкции.

#### Библиографический список

1. Клюев С.В., Клюев А.В., Лесовик Р.В. Оптимальное проектирование стальной пространственной фермы // Вестник Томского государственного архитектурно-строительного университета. 2008. № 1. С. 74–79.
2. Pholdee N., Bureerat S. Comparative performance of meta-heuristic algorithms for mass minimisation of trusses with dynamic constraints // Advances in Engineering Software. 2014. Vol. 75. Pp. 1–13.
3. Farshi B., Alinia-ziazi A. Sizing optimization of truss structures by method of centers and force formulation // International Journal of Solids and Structures. 2010. Vol. 47. Issues 18–19. Pp. 2508–2524.
4. Toklu Y.C., Bekdas G., Temur R. Analysis of trusses by total potential optimization method coupled with harmony search // Structural Engineering and Mechanics. 2013. Vol. 45. No. 2. Pp. 183–199.

5. *Heyman J.* Design of a simple steel truss // *Proceedings of the Institution of Civil Engineers: Structures and Buildings*. 2010. Vol. 163. No. 1. Pp. 53–56.
6. *Biegus A.* Trapezoidal sheet as a bracing preventing flat trusses from out-of-plane buckling // *Archives of Civil and Mechanical Engineering*. 2015. Vol. 15. No. 3. Pp. 735–741.
7. *Игнатъев В.А., Игнатъев А.В., Галишников В.В., Онищенко Е.В.* Нелинейная строительная механика стержневых систем. Основы теории. Примеры расчета. Волгоград : ВолгГАСУ, 2014. 96 с.
8. *Vacinskas D., Kamaitis Z., Jatulis D., Kilikevicius A.* Field testing of old narrow-gauge railway steel truss bridge // *Procedia Engineering*. 2013. Vol. 57. Pp. 136–143.
9. *Игнатъев А.В., Игнатъев В.А., Онищенко Е.В.* Возможность использования метода конечных элементов в форме классического смешанного метода для геометрически нелинейного анализа шарнирно-стержневых систем // *Вестник МГСУ*. 2015. № 12. С. 47–58.
10. *Алексейцев А.В., Серпик И.Н.* Оптимизация плоских ферм на основе генетического поиска и итеративной процедуры триангуляции // *Строительство и реконструкция*. 2011. № 2 (34). С. 3–8.
11. *Еремин К.И., Матвейошкин С.А., Арутюнян Г.А.* Методика экспериментальных исследований блоков покрытий промышленных зданий при аварийных воздействиях // *Вестник МГСУ*. 2015. № 12. С. 34–46.
12. *Василькин А.А., Щербина С.В.* Построение системы автоматизированного проектирования при оптимизации стальных стропильных ферм // *Вестник МГСУ*. 2015. № 2. С. 21–37.
13. *Hutchinson R.G., Fleck N.A.* The structural performance of the periodic truss // *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*. 2006. Vol. 54. No. 4. Pp. 756–782.
14. *Hutchinson R.G., Fleck N.A.* Microarchitected cellular solids — the hunt for statically determinate periodic trusses // *ZAMM Z. Angew. Math. Mech.* 2005. Vol. 85. No. 9. Pp. 607–617.
15. *Тиньков Д.В.* Анализ влияния условий закрепления на прогиб плоской балочной фермы с нисходящими раскосами // *Trends in Applied Mechanics and Mechatronics*. М. : Инфра-М, 2015. Т. 1. С. 52–56.
16. *Комарова А.Р.* Аналитическое исследование горизонтального смещения опоры балочной фермы // *Научный альманах*. 2016. № 4–3 (18). С. 251–253.
17. *Хоанг Х.Ч.* Зависимость смещения подвижной опоры фермы типа «Butterfly» от числа панелей // *Научный альманах*. 2016. № 6–2 (19). С. 305–308.
18. *Тиньков Д.В.* Сравнительный анализ аналитических решений задачи о прогибе ферменных конструкций // *Инженерно-строительный журнал*. 2015. № 5 (57). С. 66–73.
19. *Тиньков Д.В.* Анализ точных решений прогиба регулярных шарнирно-стержневых конструкций // *Строительная механика инженерных конструкций и сооружений*. 2015. № 6. С. 21–28.
20. *Куйко Л.К.* Аналитическая оценка прогиба арочной фермы под действием ветровой нагрузки // *Научный вестник*. 2016. № 1 (7). С. 247–254.
21. *Kirsanov M.N.* Analytical calculation, marginal and comparative analysis of a flat girder // *Scientific Herald of the Voronezh State University of Architecture and Civil Engineering // Construction and Architecture*. 2016. No. 1 (29). Pp. 84–105. Режим доступа: <http://vestnikvgasu.wmsite.ru/ftpgetfile.php?id=519>.
22. *Кирсанов М.Н.* Формулы для расчета плоской балочной фермы с произвольным числом панелей // *Строительная механика и конструкции*. 2016. Т. 1. № 12. С. 19–24.
23. *Леонов П.Г., Кирсанов М.Н.* Аналитический расчет и анализ пространственной стержневой конструкции в системе Maple // *Информатизация инженерного образования ИНФОРИНО-2014 : тр. междунар. науч.-метод. конф. (г. Москва, 15–16 апреля 2014 г.)*. М., 2014. С. 239–242.

24. *Кирсанов М.Н.* Расчет пространственной стержневой системы, допускающей мгновенную изменяемость // *Строительная механика и расчет сооружений.* 2012. № 3. С. 48–51.

25. *Кирсанов М.Н.* Maple и Maple. Решения задач механики. СПб. : Лань, 2012. 510 с.

26. *Голоскоков Д.П.* Курс математической физики с использованием пакета Maple. 2-е изд., испр. СПб. : Лань, 2015. 575 с.

*Поступила в редакцию в августе 2016 г.*

Об авторе: **Кирсанов Михаил Николаевич** — доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры теоретической механики и мехатроники, **Национальный исследовательский университет «МЭИ» (ФГБОУ ВО «НИУ "МЭИ" )**, 111250, г. Москва, ул. Красноказарменная, д. 14, C216@ua.ru.

Для цитирования: *Кирсанов М.Н.* О влиянии наклона подвижной опоры на жесткость балочной фермы // *Вестник МГСУ.* 2016. № 10. С. 35–44. DOI: 10.22227/1997-0935.2016.10.35-44

**M.N. Kirsanov**

#### ON THE INFLUENCE OF A FREE SUPPORT RAKE ON THE RIGIDITY OF A GIRDER BEAM

**Abstract.** Analytical solutions have definite advantages over numerical ones. It is quite complicated to find solutions for a whole class of structures different in the number of bars or panels if we speak about girder trusses. The solutions obtained in a symbol form may be analytically investigated depending on all the parameters characterizing the structure. This allows educing the distinctive features of the systems and finding possibilities for optimization in terms of mass, strength and rigidity. At the present time the induction method is the most efficient to obtain analytical solutions for a number of trusses.

Using computer mathematics system Maple the author obtained analytical expressions for deflection of a flat statically determinate parallel-flanged elastic truss depending on the number of panels at uniform and concentrated load. It is shown that the rake angle of a free support greatly influences the stiffness of a structure. The graphic charts of the dependence of deflection from the number of panels at a fixed span length and a given load show extremum. The author obtains asymptotic characteristics of the deflection and expressions for stresses in the most compressed and tension bars. It is also shown that the solution type for a deflection isn't changed in case of different loading types and has a form of a polynomial of not more than third degree in correspondence with the number of panels in half of a span.

**Key words:** truss, deflection, induction, Maple, rake of a support, analytical solution

#### References

1. Klyuev S.V., Klyuev A.V., Lesovik R.V. Optimal'noe proektirovanie stal'noy prostranstvennoy fermy [Optimal Design of a Steel Space Truss]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo arkhitekturno-stroitel'nogo universiteta* [Vestnik Tomsk State University of Architecture and Building]. 2008, no. 1, pp. 74–79. (In Russian)
2. Pholdee N., Bureerat S. Comparative Performance of Meta-Heuristic Algorithms for Mass Minimisation of Trusses with Dynamic Constraints. *Advances in Engineering Software.* 2014, vol. 75, pp. 1–13. DOI: <http://dx.doi.org/10.1016/j.advengsoft.2014.04.005>.
3. Farshi B., Alinia-ziazi A. Sizing Optimization of Truss Structures by Method of Centers and Force Formulation. *International Journal of Solids and Structures.* 2010, vol. 47, issues 18-19, pp. 2508–2524. DOI: <http://dx.doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2010.05.009>.
4. Toklu Y.C., Bekdas G., Temur R. Analysis of Trusses by Total Potential Optimization Method Coupled with Harmony Search. *Structural Engineering and Mechanics.* 2013, vol. 45, no. 2, pp. 183–199. DOI: <http://dx.doi.org/10.12989/sem.2013.45.2.183>.



5. Heyman J. Design of a Simple Steel Truss. *Proceedings of the Institution of Civil Engineers: Structures and Buildings*. 2010, vol. 163, no. 1, pp. 53–56.
6. Biegus A. Trapezoidal Sheet as a Bracing Preventing Flat Trusses from Out-of-Plane Buckling. *Archives of Civil and Mechanical Engineering*. 2015, vol. 15, no. 3, pp. 735–741. DOI: <http://dx.doi.org/10.1016/j.acme.2014.08.007>.
7. Ignat'ev V.A., Ignat'ev A.V., Galishnikova V.V., Onishchenko E.V. *Nelineynaya stroitel'naya mekhanika sterzhnevyykh sistem. Osnovy teorii. Primery rascheta* [Nonlinear Structural Mechanics of Rod Systems. Fundamentals of the Theory. Examples of Calculation]. Volgograd, VolGASU Publ., 2014, 96 p. (In Russian)
8. Bacinskas D., Kamaitis Z., Jatulis D., Kilikevicius A. Field Testing of Old Narrow-Gauge Railway Steel Truss Bridge. *Procedia Engineering*. 2013, vol. 57, pp. 136–143. DOI: <http://dx.doi.org/10.1016/j.proeng.2013.04.020>.
9. Ignat'ev A.V., Ignat'ev V.A., Onishchenko E.V. Vozmozhnost' ispol'zovaniya metoda konechnyykh elementov v forme klassicheskogo smeshannogo metoda dlya geometricheski nelineynogo analiza sharnirno-sterzhnevyykh sistem [Possibility of Using Finite Element Method in the Form of Classical Mixed Method for Geometrical Nonlinear Analysis of Hinged Rod Systems]. *Vestnik MGSU* [Proceedings of Moscow State University of Civil Engineering]. 2015, no. 12, pp. 47–58. (In Russian)
10. Alekseytsev A.V., Serpik I.N. Optimizatsiya ploskikh ferm na osnove geneticheskogo poiska i iterativnoy protsedury triangulyatsii [Optimization of Flat Trusses Based on Genetic Search and Iterative Procedure of Triangulation]. *Stroitel'stvo i rekonstruktsiya* [Building and Reconstruction]. 2011, no. 2 (34), pp. 3–8. (In Russian)
11. Eremin K.I., Matveyushkin S.A., Harutyunyan G.H. Metodika eksperimental'nykh issledovaniy blokov pokrytiy promyshlennykh zdaniy pri avariynnykh vozdeystviyakh [Methodology of Experimental Investigations of Block Coverings of Industrial Buildings under Emergency Influences]. *Vestnik MGSU* [Proceedings of Moscow State University of Civil Engineering]. 2015, no. 12, pp. 34–46. (In Russian)
12. Vasil'kin A.A., Shcherbina S.V. Postroenie sistemy avtomatizirovannogo proektirovaniya pri optimizatsii stal'nykh stropil'nykh ferm [Development of a Computer-Aided Design System for Optimization of Steel Trusses]. *Vestnik MGSU* [Proceedings of Moscow State University of Civil Engineering]. 2015, no. 2, pp. 21–37. (In Russian)
13. Hutchinson R.G., Fleck N.A. The Structural Performance of the Periodic Truss. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*. 2006, vol. 54, no. 4, pp. 756–782. DOI: <http://dx.doi.org/10.1016/j.jmps.2005.10.008>.
14. Hutchinson R.G., Fleck N.A. Microarchitected Cellular Solids — the Hunt for Statically Determinate Periodic Trusses. *ZAMM Z. Angew. Math. Mech.* 2005, vol. 85, no. 9, pp. 607–617. DOI: <http://dx.doi.org/10.1002/zamm.200410208>.
15. Tin'kov D.V. Analiz vliyaniya usloviy zakrepleniya na progib ploskoy balochnoy fermy s niskhodyashchimi raskosami [Analysis of the Influence of Fixing Conditions on the Deflection of a Flat Girder Truss with Lowering Diagonals]. *Trends in Applied Mechanics and Mechatronics*. Moscow, Infra-M Publ., 2015, vol. 1, pp. 52–56. (In Russian)
16. Komarova A.R. Analiticheskoe issledovanie gorizontal'nogo smeshcheniya opory balochnoy fermy [Analytical Investigation of Horizontal Displacement of a Girder Truss Support]. *Nauchnyy al'manakh* [Science Almanac]. 2016, no. 4–3 (18), pp. 251–253. (In Russian)
17. Khoang Kh.Ch. Zavisimost' smeshcheniya podvizhnoy opory fermy tipa «Butterfly» ot chisla paneley [Dependence of a “Butterfly” Type Free Support Displacement from the Number of Panels]. *Nauchnyy al'manakh* [Science Almanac]. 2016, no. 6–2 (19), pp. 305–308. (In Russian)
18. Tin'kov D.V. Sravnitel'nyy analiz analiticheskikh resheniy zadachi o progibe fermykh konstruksiy [Comparative Analysis of Analytical Solutions of the Task on Deflection of Truss Structures]. *Inzhenerno-stroitel'nyy zhurnal* [Magazine of Civil Engineering]. 2015, no. 5 (57), pp. 66–73. (In Russian)
19. Tin'kov D.V. Analiz tochnyykh resheniy progiba regul'yarnyykh sharnirno-sterzhnevyykh konstruksiy [Analysis of Accurate Solutions for a Deflection of Regular Hinged-Rod Structures]. *Stroitel'naya mekhanika inzhenernykh konstruksiy i sooruzheniy* [Structural Mechanics and Analysis of Constructions]. 2015, no. 6, pp. 21–28. (In Russian)

20. Kiyko L.K. Analiticheskaya otsenka progiba arochnoy fermy pod deystviem vetrovoy nagruzki [Analytical Evaluation of Deflection of Arched Trusses Under the Action of Wind Loads]. *Nauchnyy vestnik* [Science Bulletin]. 2016, no. 1 (7), pp. 247–254. (In Russian)

21. Kirsanov M.N. Analytical Calculation, Marginal and Comparative Analysis of a Flat Girder. Scientific Herald of the Voronezh State University of Architecture and Civil Engineering. Construction and Architecture. 2016, no. 1. (29), pp. 84–105. Available at: <http://vestnikv-gasu.wmsite.ru/ftpgetfile.php?id=519>.

22. Kirsanov M.N. Formuly dlya rascheta ploskoy balochnoy fermy s proizvol'nym chislom paneley [Formulas for Calculation of a Flat Girder Truss with a Random Number of Panels]. *Stroitel'naya mekhanika i konstruktzii* [Structural Mechanics and Structures]. 2016, vol. 1, no. 12, pp. 19–24. (In Russian)

23. Leonov P.G., Kirsanov M.N. Analiticheskiy raschet i analiz prostranstvennoy sterzhnevoy konstruktzii v sisteme Maple [Analytical Calculation and Analysis of Space Rod Structure in Maple System]. *Informatizatsiya inzhenerenogo obrazovaniya INFORINO-2014 : trudy mezhdunarodnoy nauchno-metodicheskoy konferentsii (g. Moskva, 15–16 aprelya 2014 g.)* [Information of Engineering Education INFORINO-2014 : Works of International Science-Methodological Conference (Moscow, April 15–16, 2014)]. Moscow, 2014, pp. 239–242. (In Russian)

24. Kirsanov M.N. Raschet prostranstvennoy sterzhnevoy sistemy, dopuskayushchey mgnovennuyu izmenyaemost' [Calculation of Space Rod System Capable of Instant Alterability]. *Stroitel'naya mekhanika i raschet sooruzheniy* [Structural Mechanics and Analysis of Constructions]. 2012, no. 3, pp. 48–51. (In Russian)

25. Kirsanov M.N. *Maple i Maplet. Resheniya zadach mekhaniki* [Maple and Maplet. Solutions to Mechanics Problems]. Saint Petersburg, Lan' Publ., 2012, 510 p. (In Russian)

26. Goloskokov D.P. *Kurs matematicheskoy fiziki s ispol'zovaniem paketa Maple* [Course of Mathematical Physics with the Use of Software Maple]. 2nd edition, revised. Saint Petersburg, Lan' Publ., 2015, 575 p. (In Russian)

About the author: **Kirsanov Mikhail Nikolaevich** — Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Department Theoretical Mechanics and Mechatronics, **National Research University “Moscow Power Engineering Institute” (MPEI)**, 14 Krasnokazarmennaya str., Moscow, 111250, Russian Federation; C216@ya.ru.

For citation: Kirsanov M.N. O vliyani naklona podvizhnoy opory na zhestkost' balochnoy fermy [On The Influence of a Free Support Rake on the Rigidity of a Girder Beam]. *Vestnik MGSU* [Proceedings of Moscow State University of Civil Engineering]. 2016, no. 10, pp. 35–44. (In Russian) DOI: 10.22227/1997-0935.2016.10.35-44