

ТОЧНОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ДЕФОРМИРОВАНИЯ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ СТЕРЖНЕВОЙ СИСТЕМЫ

Кирсанов М.Н., Леонов П.Г.
НИУ МЭИ, sqrl@mail.ru

Приводится аналитическое решение задачи статики для пространственной статически определимой упругой фермы. Для получения решения системы при произвольном числе стержней используется метод вырезания узлов, проводится оценка предельных свойств конструкции и определяются характерные ее особенности. Используется система Maple, которая позволяет решить систему уравнений в символьной форме. Методом индукции определяются усилия и прогиб.

Ключевые слова: пространственная ферма, аналитическое решение, прогиб, Maple, индукция.

Конструкция

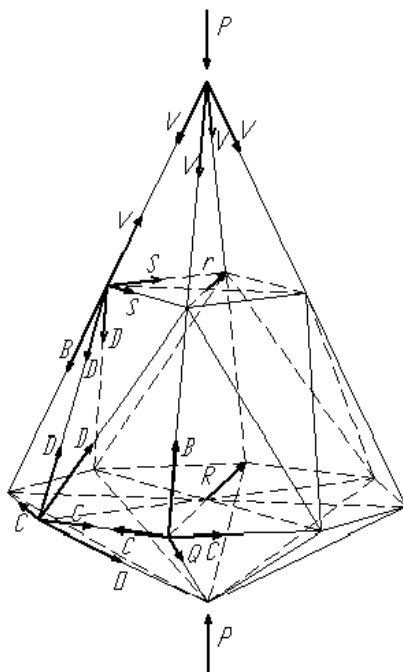


Рис. 1. Ферма при $n=4$

Статически определимые пространственные конструкции, в основе которых не лежит тетраэдр, достаточно редки. Данная ферма представляет собой конструкцию, состоящую из трёх ярусов: купол, средний пояс и основание. Основание фермы крепится на сферический шарнир. В верхней точке купола – цилиндрический шарнир. Третья опора, моделируемая горизонтальным стержнем в плоскости нижнего контура, предотвращает

вращение вокруг вертикальной оси. К вершине фермы приложена вертикальная сила P в результате чего, реакция опоры Z в сферическом шарнире равна ей по величине. Остальные реакции опор равны нулю. Опоры на рисунке не изображены.

Ферма содержит два контура: верхний представляет собой правильный n -угольник, а нижний правильный $2n$ -угольник. Усилия в стержнях верхнего контура обозначены как S , нижнего - C . Контуров соединены n и $2n$ (симметричными и равными по длине) стержнями, усилия в которых обозначим B и D соответственно. Шарниры верхнего контура присоединены n стержнями с усилиями V к верхней опоре. Нижний контур присоединен к основанию $2n$ стержнями с усилиями Q и O .

Стержни предполагаются упругими, возможность потери устойчивости и исчерпание прочности здесь не изучаются. Шарниры, соединяющие стержни, идеальные, ферма представляет собой статически определимую конструкцию.

Необходимо получить статические уравнения для расчета усилий в стержнях для произвольного значения n .

Расчет усилий в стержнях и прогиб

Для расчета усилий в стержнях воспользуемся методом вырезания узлов. Для проверки решения используем программу для Maple [3]. Все результаты получены в самом общем случае, но здесь для упрощения примем, что радиусы контуров и высоты ярусов равны. Так же введем обозначение:

$$\varphi = \pi / n. \quad (1)$$

Выпишем усилия в стержнях:

$$\begin{aligned} S &= \frac{Pr}{2nh \cos(\varphi(n-2)/2)}, \quad V = -\frac{P\sqrt{r^2+h^2}}{nh}, \quad B = -\frac{P(\sin \varphi - 2 \tan \varphi)}{n(\sin \varphi - 3 \tan \varphi)}, \\ D &= \frac{Ptg \varphi \sqrt{h^2+4r^2} \sin(\varphi/2)^2}{2nh(\sin \varphi - 3tg \varphi)}, \quad C = \frac{Pr(\sin \varphi - 2tg \varphi)}{2nh \cos(\varphi(n-1)/2)(\sin \varphi - 3tg \varphi)}, \\ O &= \frac{Ptg \varphi \sqrt{r^2+h^2}}{nh(\sin \varphi - 3tg \varphi)}, \quad Q = -\frac{P\sqrt{r^2+h^2}(\sin \varphi - 2tg \varphi)}{nh(\sin \varphi - 3tg \varphi)}, \end{aligned} \quad (2)$$

где r - радиус контура, h - высота яруса.

Прогиб (вертикальное перемещение точки приложения силы P) определяем по формуле Максвелла-Мора, принимая жесткость стержней постоянной:

$$\Delta = P \sum_{i=1}^{9n} \frac{S_i^2 l_i}{EF_i},$$

где S_i - усилия в стержнях от действия единичной вертикальной силы на вершину фермы, l_i - длины стержней, E - модуль упругости, F_i - площади сечений.

Обозначим:

$$a = \sin \varphi - 3tg \varphi, \quad b = \sin \varphi - 2tg \varphi, \quad c = \cos(\varphi(n-2)), \quad d = \cos(\varphi(n-1)).$$

Подставляя эти величины в (2), получаем выражение для прогиба:

$$\Delta = \frac{P}{EFn} \left(\frac{(r^2+h^2)^{3/2}}{h} + \frac{r^3 \sin \varphi}{2h^2 c^2} + \frac{h^2}{a^2} + \frac{b(b^2 + tg \varphi)(r^2+h^2)^{3/2}}{h^2 a^2} + \right.$$

$$+ \frac{\operatorname{tg}^2 \varphi (4r^2 \sin^2(\varphi/2) + h^2)^{3/2}}{2h^2 a^2} + \frac{r^3 b^2 \sin(\varphi/2)}{h^2 a^2 d^2}. \quad (3)$$

Выводы

Получено аналитическое решение для прогиба пространственной стержневой системы для произвольного количества стержней. Это позволяет выявлять особенности и анализировать оптимальные и предельные (по жесткости и прочности) характеристики конструкции.

Литература

1. *Кирсанов М. Н.* Статический расчет и анализ пространственной стержневой системы // Инженерно-строительный журнал. 2011. №6(24). С. 28-34
2. *Кирсанов М. Н.* Аналитический расчет пространственной стержневой системы // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2012. №1. С. 49-53
3. *Кирсанов М. Н.* Практика программирования в системе Maple. — М.: Издательский дом МЭИ, 2011. — 208 с.