Упрощенный метод Донкерлея для нахождения собственной частоты колебаний фермы

Лыонг К.Л., Кирсанов М.Н.
Национальный исследовательский университет «МЭИ», Москва, Россия
E-mail: luongcongluan96@gmai.com, c216@ya.ru

Аннотация

Приближенный расчет нижней границы основной (наименьшей) собственной частоты колебаний ферм по методу Донкерлея сводится к расчету парциальных частот. Решение предполагает суммирование квадратов обратных значений этих частот. Если для численного решения это не составляет труда, то при символьных преобразованиях с использованием систем компьютерной математики возникают трудности нахождения суммы достаточно громоздких выражений. С увеличением порядка регулярных ферм с периодическими структурами нахождение аналитического решения либо не всегда возможно, либо дает результат в виде сложной формулы. В работе предлагается суммирование прогибов, через которые вычисляются парциальные частоты. По теореме о среднем рассчитывая прогиб в наиболее податливом узле. Сравнение результата на примере решения задачи о колебании арочной фермы показывает, что расчетная формула по этому методу получается существенно проще, а приближенное значение частоты ближе к точному значению.

Ключевые слова: ферма, собственная частота, метод Донкерлея, приближенное аналитическое решение.

Схема конструкции. Рассматриваемая ферма представляет собой симметричную плоскую ферму, состоящую из соединенных между собой ферм с разным количеством панелей и разными уклонами (рис. 1).

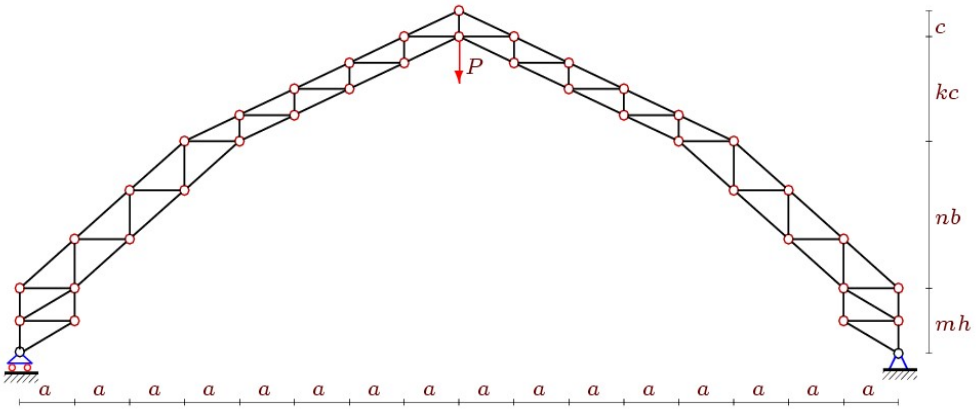

Рис 1. Ферма, $m=2, n=3, k=4$.

Ферма имеет подвижную шарнирную опору и неподвижный опорный шарнир. Высота фермы $H=mh+nb+c(k+1)$. Вся масса фермы условно сосредоточена в $N=4(m+n+k)+5$ узлах конструкции, за исключением двух опорных узлов. Ферма содержит $V=8(m+n+k)+4$ стержней. С помощью

уравнений равновесия узлов можно получить замкнутую систему уравнений для сил в стержнях и реакций опор. Необходимо решить задачу о первой частоте колебаний в аналитическом виде.

Упрощенный метод оценки первой частоты. Предложен упрощенный метод Донкерлея для расчета собственных частот. В этом методе приближенная оценка первой частоты колебаний имеет вид:

$$\omega_*^{-2} = m\sum_{p=1}^{K} u_p = mKu_* / 2. \qquad (1)$$

где u_* — максимальный прогиб некоторого узла фермы от действия единичной силы.

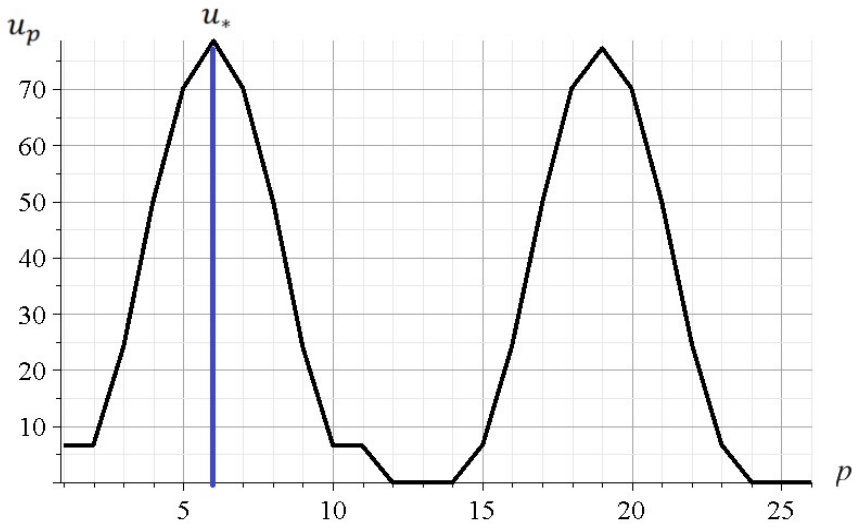

Рис 2.. Зависимость коэффициента u_p от номера узла фермы при $n = 2$

Сумму $\sum_{p=1}^{K} u_p$ можно интерпретировать как площадь, ограниченную кривой распределения. Эту площадь можно вычислить проще, отсортировав частоты в порядке возрастания и рассчитав площадь по формуле площади треугольника $\sum_{p=1}^{K} u_p = Ku_* / 2$ (рис. 3).

Величина максимального прогиба получается по формуле $u_* = \sum_{\alpha=1}^{V} \tilde{S}_\alpha^{(P)} \tilde{S}_\alpha^{(*)} l_\alpha / (EF)$, где $\tilde{S}_\alpha^{(*)}$ — сила в стержне с номером α от действия единичной вертикальной силы на узел, прогиб которой ориентировочно оценивается как максимальный. Для произвольного количества панелей прогиб узла имеет вид:

$$u_* = (C_1 a^3 + C_2 b^3 + C_3 g^3 + C_4 f^3) / (h^2 EF). \qquad (2)$$

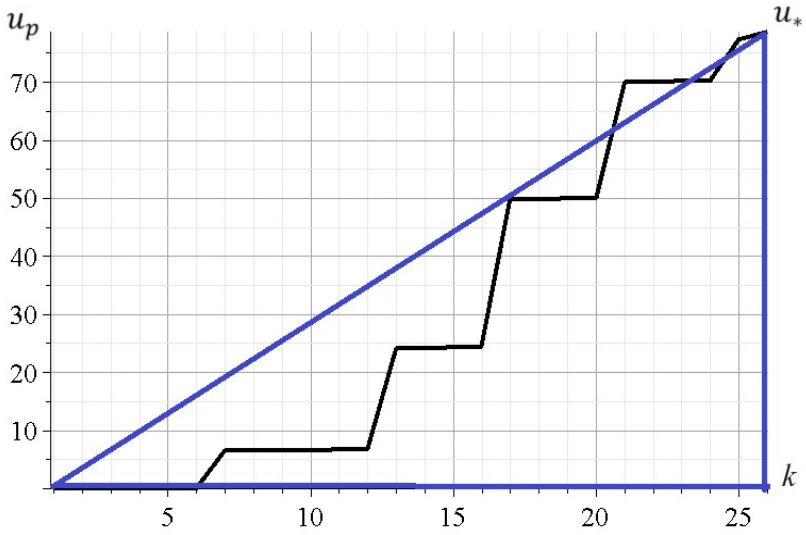

Рис 3. Коэффициенты u_p в порядке возрастания при $n=2$

Пусть $m=n=k$. Расчеты различных значений m,n и k показывают, что максимальное значение u_* приходится на узел в середине пролета с номером $m+n+k=3n$.

Вычисления прогиба производятся последовательно с $n=1,2,3...$. Обобщение этой серии формул на произвольное число n дает следующие окончательные формулы:

$$\begin{aligned} C_1 &= (6n^3+55n^2+33n+4)/8, \\ C_2 &= (48n^3+80n^2+30n+3)/16, \\ C_3 &= (84n^4+140n^3+99n^2+31n+3)/48, \\ C_4 &= (12n^4+20n^3+9n^2+n)/24. \end{aligned} \tag{3}$$

Для обобщения используются операторы Maple. Приближенное значение первой частоты (1) имеет вид:

$$\omega_* = h\sqrt{\frac{EF}{M(C_1a^3+C_2b^3+C_3g^3+C_4f^3)}} \tag{4}$$

Для сравнения приведем формулы для коэффициентов, рассчитанные по методу Донкерлея:

$$\begin{aligned} C_1 &= (36n^5+286n^4+511n^3+317n^2+74n+6)/(3(2n+1)^2), \\ C_2 &= (128n^5+540n^4+652n^3+333n^2+60n+3)/(6(2n+1)^2), \\ C_3 &= (1624n^6+4872n^5+6760n^4+4815n^3+1651n^2+213n)/(90(2n+1)^2), \\ C_4 &= (424n^6+1272n^5+2200n^4+1065n^3+31n^2-42n)/(45(2n+1)^2). \end{aligned} \tag{5}$$

Результаты и обсуждение. Для иллюстрации зависимости частоты собственных колебаний от количества панелей, найденной методом Донкерлея и методом, а также для оценки точности аналитического решения определяется первая частота в частотном спектре системы. Рассматриваемой ферме соответствует размеры $a=b=2$м, $h=c=1$м. Площадь поперечного сечения стержней решетки и опорных стержней принимается одинаковой: $F=4\text{см}^2$. Модуль упругости стали $E=2\cdot10^5$МПа, массы в узлах $M=150$кг. На

рис. 4 показаны зависимости от количества панелей частоты ω_D по стандартной формуле Донкерлея, частоты ω_* по упрощенной формуле (4) и численно найденного значения первой частоты ω_1 спектра системы с $K = 12n + 2$ степеней свободы.

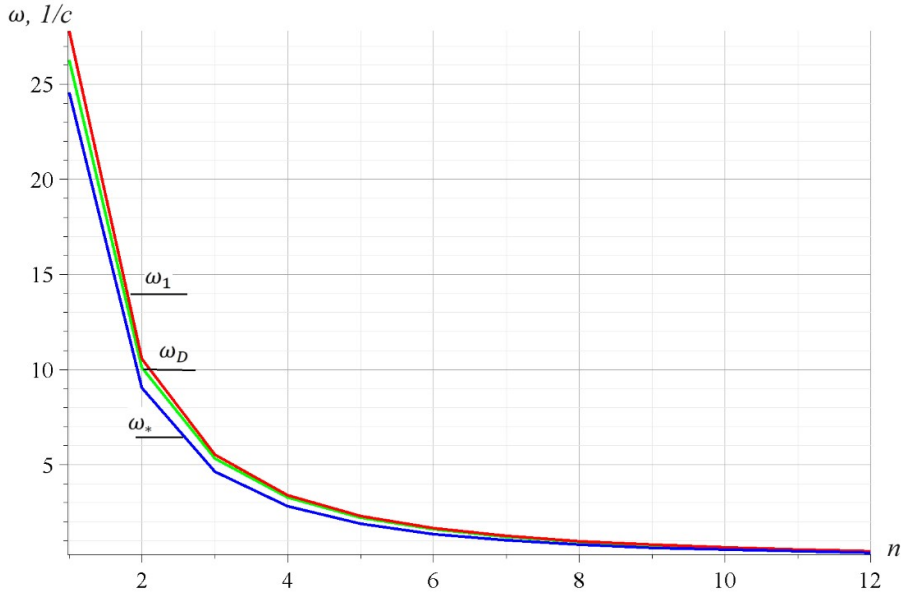

Рис 4. Сравнение аналитических решений с численными, $n = 2$. Первая частота колебаний фермы ω_1 и ее нижняя оценка ω_D по Донкерлею, ω_* – нижняя оценка по упрощенной формуле.

Метод Донкерлея и упрощенный метод показывают относительно не большие различия по сравнению с численным методом. Из рисунка 4 можно сделать вывод, что чем больше количество стержней в ферме, тем меньше погрешность.

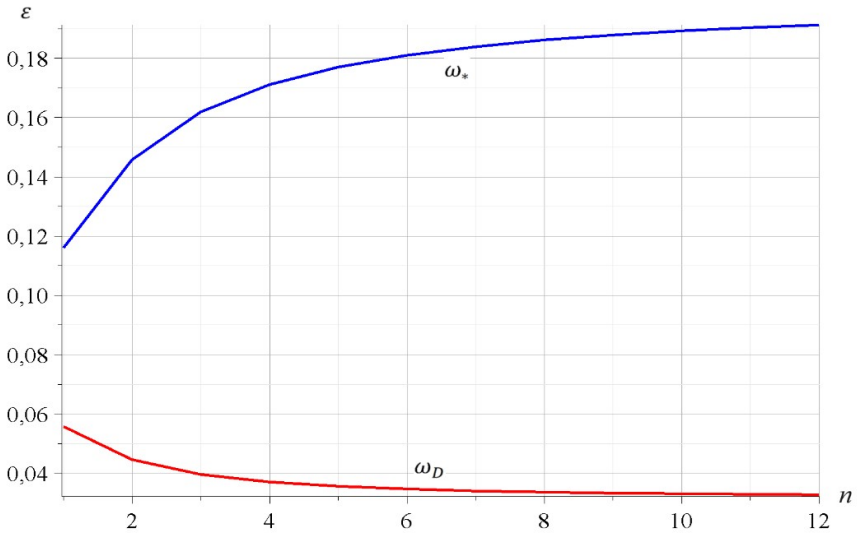

Рис 5. Погрешность упрощенного метода Донкерлея, $n = 2$

На рис. 5 показано, как меняется ошибка приближенного решения при изменении количества панелей. Относительное значение погрешности рассчитывается по формуле: $\varepsilon = (\omega_* - \omega_1)/\omega_1$. По мере увеличения числа панелей

в ферме, для упрощенного метода, при $n<3$, погрешность сначала увеличивается, при $n>3$ эта ошибка постепенно, хотя и незначительно, уменьшается.

Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ 22-21-00473

Литература

1. Kirsanov, M. Trussed Frames and Arches: Schemes and Formulas. Cambridge Scholars Publishing Lady Stephenson Library. Newcastle upon Tyne, GB https://cambridgescholars.com/product/978-1-5275-5976-9, 2020.
2. Kirsanov, M. Planar Trusses: Schemes and Formulas. Cambridge Scholars Publishing Lady Stephenson Library. Newcastle upon Tyne, GB, 2019.
3. Komerzan, E. V., Maslov, A.N. Estimation of the L-shaped spatial truss fundamental frequency oscillations. Structural Mechanics and Structures. 2023. 37(2). Pp. 35–45. DOI:10.36622/VSTU.2023.37.2.004.
4. Komerzan, E. V., Maslov, A.N. Analytical evaluation of a regular truss natural oscillations fundamental frequency. Structural Mechanics and Structures. 2023. 37(2). Pp. 17–26. DOI:10.36622/VSTU.2023.37.2.002.

Simplified Dunkerley method for finding the natural vibration frequency of a truss

Luong Cong Luan, Kirsanov M.N
National Research University "Moscow Power Engineering Institute", Moscow, Russia
E-mail: luongcongluan96@gmai.com, c216@ya.ru

Annotation

An approximate calculation of the lower limit of the main (smallest) natural frequency of oscillations of trusses using the Dunkerley method is reduced to the calculation of partial frequencies. The solution involves summing the squares of the reciprocals of these frequencies. If this is not difficult for a numerical solution, then with symbolic transformations using computer mathematics systems, difficulties arise in finding the sum of rather cumbersome expressions. As the order of regular trusses with periodic structures increases, finding an analytical solution is either always possible or gives the result in the form of a complex formula. The work proposes to calculate the summation of deflections through which partial frequencies are calculated using the mean value theorem, calculating the deflection in the most compliant node. Comparison of the result using the example of solving the problem of oscillation of an arched truss shows that the calculation formula using this method is much simpler, and the approximate frequency value is closer to the exact value.

Key words: truss, natural frequency, Dunkerley method, approximate analytical solution.