

ЧИСЛЕННО-АНАЛИТИЧЕСКИЙ РАСЧЕТ ПРОГИБА УПРУГОЙ БАЛОЧНОЙ ФЕРМЫ РЕГУЛЯРНОГО ТИПА

М. Н. Кирсанов

Национальный исследовательский университет МЭИ

Москва, Россия

Предлагается схема статически определимой плоской балочной фермы с крестообразной решеткой. Ферма опирается на две опоры и состоит из одинаковых панелей шестиугольной формы, соединенных по боковым сторонам. Верхний и нижний пояс фермы не прямолинейные. Площади сечений стержней верхнего, нижнего пояса и решетки приняты разными. В аналитической форме находится решение для прогиба конструкции при равномерном нагружении вертикальными силами в узлах верхнего пояса в зависимости от числа панелей. Для определения прогиба применена формула Максвелла - Мора, справедливая для упругой стадии работы стержней. Усилия в стержнях фермы найдены из системы уравнений равновесия узлов всей конструкции. Решение уравнений находилось методом обратной матрицы. Вычисление усилий по описанному алгоритму при различном числе панелей выявило особенность конструкции: для нечетного числа панелей и при определенном выборе размеров фермы определитель системы уравнений равновесия оказывается равным нулю. Для фермы, состоящей из одной панели, построена схема виртуальных скоростей узлов фермы в этом случае, объясняющая кинематическую изменяемость конструкции. Решение для произвольного числа панелей получено методом индукции. Для коэффициентов в выражении прогиба найдены рекуррентные уравнения, которым они удовлетворяют. Использованы операторы `rgf_findrecur` и `rsolve` системы компьютерной математики Maple. Форма полученного результата позволила выявить асимптотику решения кубического типа.

Введение

Аналитические решения в механике имеют значение как тестовые для сложных численных методов и как простые оценки, где реальный объект с множеством свойств и характеристик заменяется на простую модель,

отражающую основные черты своего прообраза. Известны некоторые точные решения для упругих статически определимых плоских [1-5] и пространственных ферм [6,7], полученных методом индукции с использованием системы компьютерной математики Maple [8-10]. В настоящей работе предлагается схема балочной фермы и расчет ее прогиба для произвольного числа панелей. Особенность конструкции и возникающей при этом задачи — невозможность получения усилий в отдельных стержнях простыми, принятыми в таких задачах, способами (методом вырезания узлов или методом Риттера). Конфигурация решетки фермы такова, что для решения этой задачи расчетчик вынужден составлять полную систему уравнений равновесия всех узлов фермы. Для значительного числа панелей это приводит к несоразмерно большим потерям в точности и времени счета, если вычисления проводятся численно. В символьной форме время преобразований значительно больше, чем в численной форме, и время это быстро растет с увеличением числа стержней так, что уже для ферм с десятью и более панелями результат практически недостижим. Остается единственный метод получения решения — метод индукции, как раз и предназначенный для регулярных конструкций. Вторая особенность предлагаемой конструкции — ее нестандартная архитектурная выразительность, выгодно отличающая эту ферму от более простых в конструкции и расчете известных и хорошо изученных балочных ферм. Число и разнообразие схем статически определимых ферм ограничено. Не случайно поиск новых схем таких конструкций в [11] назван "охотой".

Постановка задачи

Рассмотрим конструкцию фермы на рис. 1. Верхний и нижний пояс представляют собой ломаные линии, а ячейкой периодичности фермы — панелью (на рис. 1 первая панель выделена утолщением) является шестиугольник. В отличие от известных ферм, в которых конструкция строится по принципу присоединения каждого следующего узла двумя

стержнями к уже готовой части, и в которых поэтому всегда имеются жесткие стержневые треугольники, в данной ферме таких треугольников нет. Однако ферма статически определима. Для фермы с числом панелей n число стержней, включая три опорные, равно $n_s = 8n + 4$, число шарниров — $m = 4n + 5$. Вырезая все $4n + 2$ узла (равновесия трех опорных узлов не рассматриваются), можно получить необходимые для определения всех усилий уравнения.

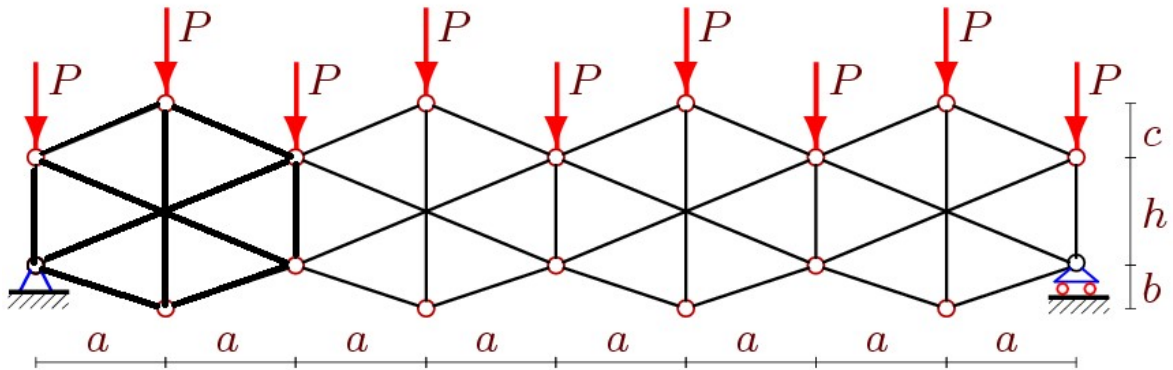


Рис. 1. $n = 2k = 4$

Расчет усилий выполняется по алгоритму и программе [8], составленной на языке системы компьютерной математики Maple. Будем рассматривать фермы с четным числом панелей $n = 2k$. Это дает возможность однозначно выбрать среднюю точку на ферме, смещение которой будем ассоциировать с прогибом фермы. Для задания схемы конструкции необходимо ввести в программу координаты шарниров и порядок соединения стержней. Пронумеруем шарниры фермы (нижний пояс слева направо, затем верхний пояс). Выбирая начало координат в левой неподвижной шарнирной опоре, зададим положения шарниров:

$$x_i = x_{i+2n+1} = (i-1)a, \quad y_i = -((-1)^i + 1)b/2,$$

$$y_{i+2n+1} = h + ((-1)^i + 1)c/2, \quad i = 1, \dots, 2n+1.$$

Координаты опорных узлов:

$$x_{m-2} = -2, \quad y_{m-2} = 0, \quad x_{m-1} = x_1, \quad y_{m-1} = -1, \quad x_m = x_{2n+1}, \quad y_m = -1.$$

Конфигурацию стержней решетки фермы определим условными векторами $\bar{V}_i, i=1, \dots, n_s$. Координаты этих векторов задают номера шарниров по концам стержня. Выбор начала и конца векторов произволен и не связан со знаками усилий в стержнях. Для стержней нижнего пояса имеем следующие векторы:

$$\bar{V}_i = [i, i+1], \quad i=1, \dots, 2n,$$

верхнего пояса:

$$\bar{V}_{i+2n} = [i+1+2n, i+2+2n], \quad i=1, \dots, 2n,$$

раскосы решетки

$$\bar{V}_{i+4n} = [2i-1, 2i+2n+1], \quad \bar{V}_{i+5n-2} = [2i+1, 2i+2n], \quad i=1, \dots, n,$$

стойки решетки:

$$\bar{V}_{i+6n} = [2i, 2i+2n+1], \quad i=1, \dots, n,$$

$$\bar{V}_{i+7n} = [2i-1, 2i+2n], \quad i=1, \dots, n+1.$$

В уравнения равновесия узлов фермы входят направляющие косинусы, вычисленные через длины стержней и проекции их векторных представлений на оси координат

$$l_i = \sqrt{l_{1,i}^2 + l_{2,i}^2}, \quad l_{1,i} = x_{V_{2,i}} - x_{V_{1,i}}, \quad l_{2,i} = y_{V_{2,i}} - y_{V_{1,i}}, \quad i=1, \dots, n_s.$$

Первый индекс в номере $V_{j,i}$ означает номер компоненты вектора \bar{V}_i (номер начала или конца стержня), второй – номер стержня. Матрица направляющих косинусов \mathbf{G} имеет следующие элементы

$$\begin{aligned} G_{k,i} &= -l_{j,i} / l_i, \quad k = 2V_{i,2} - 2 + j, \quad k \leq n_s, \quad j=1,2, \quad i=1, \dots, n_s, \\ G_{k,i} &= l_{j,i} / l_i, \quad k = 2V_{i,1} - 2 + j, \quad k \leq n_s, \quad j=1,2, \quad i=1, \dots, n_s. \end{aligned}$$

Полученную систему линейных уравнений равновесия запишем в матричной форме

$$\mathbf{G}\bar{S} = \bar{B}. \quad (1)$$

Здесь \bar{S} – вектор усилий в стержнях, включая три опорные, \bar{B} – вектор нагрузок. Горизонтальные нагрузки, приложенные к узлу i , записываются в нечетные элементы B_{2i-1} , вертикальные – в четные B_{2i} . Решение системы линейных уравнений находим с помощью обратной матрицы $\bar{S} = \mathbf{G}^{-1}\bar{B}$.

Решение

Вычисление усилий по описанному алгоритму при различном числе панелей сразу выявило одну особенность: для нечетного числа панелей n при $b=c$ определитель системы уравнений равновесия оказывается равным нулю [8, с. 38]. Объяснение этому эффекту оказалось простым. Фермы с обозначенным свойством геометрически изменяемы. Для $n=1$ можно привести допустимую картину распределения скоростей узлов (рис. 2). Неподвижными остаются узлы 1 и 6, стержни 1-4, 1-2 и 5-6 совершают мгновенно вращательное движение, стержень 2-3 — плоское, стержни 4-3 и 5-2 — мгновенно поступательное. Скорости узлов 4 и 3, 2 и 5 попарно равны. Очевидно выполняется и теорема о проекциях скоростей: $u' = u \cos \alpha = v' = v \cos(\pi/2 - 2\alpha) = v \sin \alpha$, где $\operatorname{tg} \alpha = h/(2a)$. Равенство $b=c$ обеспечивает параллельность стержней 5-6 и 1-2 и 4-5 и 2-3, откуда и вытекают эти соотношения.

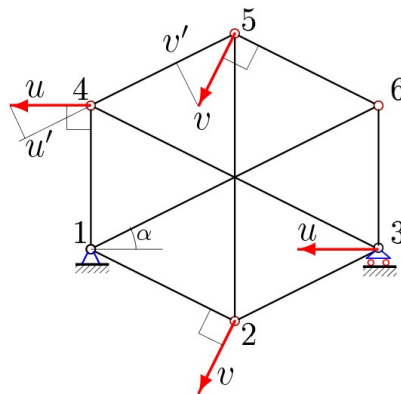


Рис. 2. Виртуальные скорости узлов, $n=1$

Прогиб

Прогиб центрального узла нижнего пояса фермы определяем по формуле Максвелла – Мора

$$\Delta = \sum_{k=1}^{n_s-3} \frac{S_k s_k l_k}{EF_k}. \quad (2)$$

Здесь введены обозначения: S_k — усилия в стержнях фермы от действия внешней нагрузки, s_k — усилия от единичной нагрузки, приложенной к центральному узлу в середине пролета, l_k — длины стержней.

Материал стержней предполагается одинаковым, для всех стержней модуль упругости равен E . Площадь сечения стержней нижнего пояса принята $F_1 = F_0 / \gamma_1$, верхнего пояса — $F_2 = F_0 / \gamma_2$, стержней (наклонных и вертикальных) решетки — $F_3 = F_0 / \gamma_3$, где F_0 — площадь некоторого условного сечения.

Прогиб представим в виде суммы, выделив отдельно сумму для стержней нижнего пояса Δ_1 , верхнего Δ_2 и стержней решетки Δ_3

$$\Delta EF = P(\gamma_1 \Delta_1 + \gamma_2 \Delta_2 + \gamma_3 \Delta_3) / (b - c)^2,$$

где:

$$\Delta_1 = 2C_1 c^2 g^3 / h^2,$$

$$\Delta_2 = 2b(C_2 b + C_3 c) d^3 / h^2,$$

$$\Delta_3 = (C_4 d^3 c^2 + C_5 d^3 c b + C_6 d^3 b^2 + C_7 c^3 b^2 + C_1 b^3 c^2 + C_8 c^4 b + C_9 c^5) c^2.$$

Коэффициенты $C_k, k = 1, \dots, 9$ получены при $h = 2c$ индуктивным методом при обработке последовательности решений 16 ферм:

$$C_1 = 2k^2(10k^2 - 7) / 3, \quad C_2 = 4k^2(5k^2 - 2) / 3,$$

$$C_3 = -2k^2, \quad C_4 = C_2 / 4,$$

$$C_5 = k^2(10k^2 - 13) / 3, \quad C_6 = k^2(5k^2 + 1) / 3,$$

$$C_7 = 50k^2(k^2 - 1) + 8(2k + 1), C_8 = 4(5k^4 - 7k^2 + 1),$$

$$C_9 = 2k^2(5k^2 - 8) / 3.$$

Заметим, что полученное решение оказалось существенно сложнее аналогичных решений, полученных также индуктивным методом для более простых ферм (балочных, арочных и пространственных), где число коэффициентов редко превышало три.

Изменение прогиба в зависимости от размеров фермы и числа панелей отражено на рисунке 3. Кривые безразмерного прогиба $\Delta' = \Delta EF_0 / P_s$ построены при фиксированной длине пролета $L = 2an = 10m$, заданной суммарной нагрузке $P_s = (2n + 1)P$, $b = 1m$ и одинаковых сечениях стержней $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma_3$, размер c на рисунке указан в метрах. Отметим пересечение

кривых, свидетельствующее о возможности выбрать подходящие размеры при одинаковых прогибах фермы.

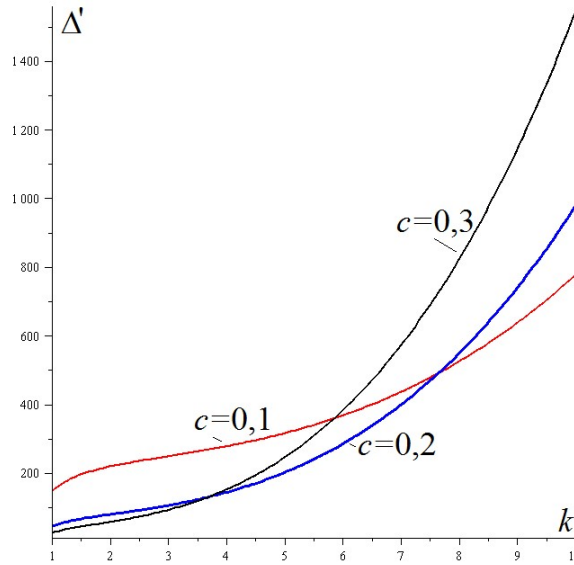


Рис. 3. Зависимость прогиба от числа панелей

Любопытную особенность полученного решения можно заметить, если построить зависимость прогиба от высоты фермы при различных комбинациях площадей сечений нижнего и верхнего пояса (рис. 4). Введем параметр λ перераспределения площади сечений: $\gamma_1 = 2\lambda, \gamma_2 = 2(1 - \lambda)$. Таким образом, при $\lambda = 1/2$ площади сечений поясов одинаковые, при увеличении λ от 0 до 1 жесткость нижнего пояса увеличивается, а верхнего уменьшается до нуля. Очевидно, крайние значения этого интервала рассматривать не имеет практического смысла. Для стержневой решетки принято $\gamma_3 = 1$. Кривые на рисунке 4 построены при $L = 2an = 10\text{ м}$, $c = 0,2\text{ м}$. Три верхние кривые соответствуют $k = 7$, нижние — $k = 6$. Одна особенность этого решения — наличие минимума прогиба при определенной высоте фермы предсказуема и была замечена в аналогичных решениях для ферм [4]. Другая особенность несколько неожиданна. Пересечения кривых, соответствующих различным λ , указывают на устойчивую закономерность в решении: при одной и той же высоте фермы возможно различное распределение жесткостей стержней, соответствующее одному и тому же прогибу фермы. Отсюда вытекает еще один вывод: при одних значениях высот фермы (при $k = 6$ это $b < b^* = 2,4\text{ м}$) увеличение λ приводит к уменьшению прогиба фермы, при других ($b > b^*$) — к увеличению. Как

видно из решения, критическое значение b^* растет с уменьшением числа панелей.

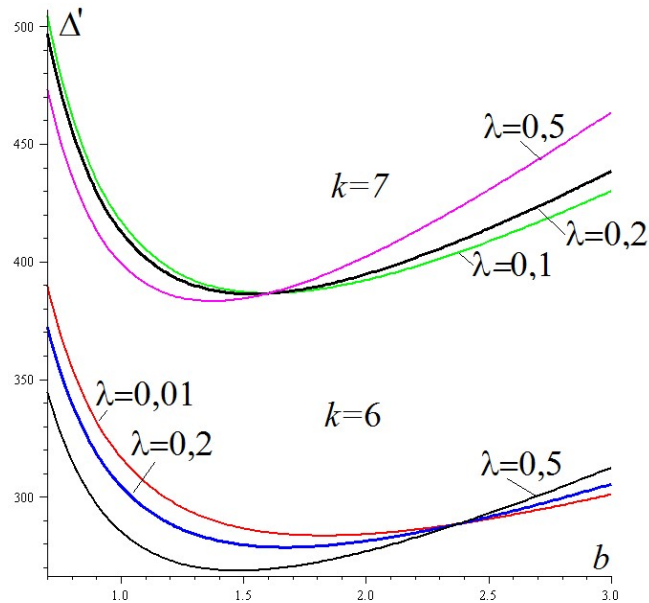


Рис. 4. Зависимость прогиба от высоты фермы

Аналитическая форма полученного результата позволяет выявить асимптотику решения. В системе Maple легко вычисляется предел

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \Delta' / k^3 = \frac{5(2b^3(\gamma_1 + 2\gamma_3) + b^2c(2\gamma_2 + 31\gamma_3) + c^2(14b + 3c)\gamma_3)}{12(b - c)^2 L}.$$

Значение этого предела чисто теоретическое, необходимое для сравнения различных конструкций ферм и оценки их деформативности [2,3].

Выводы

Полученное выражение для прогиба имеет достаточно простую структуру, легко анализируется и может быть использовано в практических инженерных расчетах для выбора оптимальных размеров фермы, распределения материала по поясам и числа панелей. Выразительная архитектурная форма предлагаемой схемы позволяет применять ее в декоративных целях, а однотипность элементов конструкции упрощает изготовление и монтаж. При этом аналитическое решение предупреждает проектировщика об опасной особенности фермы: в знаменателе выражения для прогиба стоит разность $b-c$, свидетельствующая о возможности роста прогиба при неправильном выборе размеров. Численные расчеты эту особенность выявить не могут.

Литература

1. Тиньков Д. В. Анализ влияния условий закрепления на прогиб плоской балочной фермы с нисходящими раскосами// Trends in Applied Mechanics and Mechatronics. М: Инфра-М. 2015. Т. 1. С. 52-56.
2. Тиньков Д. В. Сравнительный анализ аналитических решений задачи о прогибе ферменных конструкций // Инженерно-строительный журнал. 2015. №5(57). С. 66–73.
3. Тиньков Д. В. Анализ точных решений прогиба регулярных шарнирно-стержневых конструкций// Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2015. №6. С. 21-28.
4. Ахмедова Е. Р. Аналитический расчет прогиба плоской фермы со шпренгельной решеткой// Trends in Applied Mechanics and Mechatronics. М: Инфра-М. 2015. Т. 1. С. 62-65.
5. Заборская Н. В. О горизонтальном смещении опоры плоской балочной фермы // Перспективы развития науки и образования: сборник научных трудов по материалам Международной научно-практической конференции 28 февраля 2015 г.: в 13 частях. Часть 9. Тамбов: ООО «Консалтинговая компания Юком». 2015. С. 58 - 60. DOI: 10.17117/2015.02.28.09
6. Кирсанов М.Н. Изгиб, кручение и асимптотический анализ пространственной стержневой консоли // Инженерно-строительный журнал. 2014. № 5 (49). С. 37-43.
7. Ларичев С. А. Индуктивный анализ влияния строительного подъема на жесткость пространственной балочной фермы// Trends in Applied Mechanics and Mechatronics. М: Инфра-М. Т. 1. С. 4-8.
8. Кирсанов М. Н. Maple и MapleT. Решение задач механики. СПб.: Изд-во Лань, 2012. 512 с.
9. Дьяконов В. П. Maple 10/11/12/13/14 в математических расчетах. М.: ДМК Пресс, 2011. 800 с.
10. Голоскоков Д.П. Практический курс математической физики в системе Maple. СПб.: Изд-во ПаркКом, 2011 644 с.
11. Hutchinson R. G., Fleck N.A. Microarchitected cellular solids – the hunt for statically determinate periodic trusses//ZAMM Z. Angew. Math. Mech. 2005. 85, No. 9, p. 607 – 617.