



УДК 539.376

© 1993 г. М. Н. КИРСАНОВ, В. Д. КЛЮШНИКОВ

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОСОБЫХ ТОЧЕК ПРОЦЕССА
ДЕФОРМИРОВАНИЯ СЖАТОГО СТЕРЖНЯ
В УСЛОВИЯХ ПОЛЗУЧЕСТИ**

Под действием сжимающих нагрузок конструкции имеют тенденцию к выпучиванию. При упругих и пластических деформациях это явление связывается с бифуркацией состояния или процесса нагружения. Бифуркационный метод выделения условия выпучивания выгодно отличается от метода начальных несовершенств линейностью уравнений и независимостью от выбора начальных условий. Поэтому первые критерии предназначенные для реономных сред, основывались на частных гипотезах по аналогии с упругой [1] или пластической [2] неустойчивостью. Предлагались также критерии, в которых анализировалось нелинейное поведение конструкции с начальными несовершенствами [3—5]. Подробные обзоры работ по этой теме содержатся в [5, 6].

Первый подход к проблеме выпучивания при ползучести близкий по смыслу к бифуркационному был осуществлен в [7], где анализировались прогиб конструкции и его скорость. Впоследствии в [8] этот подход обобщается на высшие производные прогиба. Полученное в результате целое множество особых точек — точек псевдобифуркации включает в себя известные решения [5, 7]. В дальнейшем [9] устанавливается соответствие между экспериментом и расчетным порядком точки псевдобифуркации. Математический формализм, использованный в [8, 9], исходил из определения точек псевдобифуркации как моментов смены знаков возмущений производных по времени перемещений возрастающих порядков. Задача сильно упрощалась предположением о независимости таких возмущений и сводилась, по существу, к задаче упругости.

В настоящей работе предлагается другой подход к определению особых точек процесса деформирования как моментов, в которых возмущение одной из производных перемещения приводит к неограниченному росту других производных. Этот вариант псевдобифуркационного подхода можно рассматривать как уточнение теории [8, 9] в отношении учета взаимозависимости возмущений производных.

1. Рассмотрим ползучесть шарнирно опертого стержня длиной l , сжатого продольной силой T . Зададимся определяющим соотношением ползучести [10]:

$$\dot{p}h(p) = f(\sigma), \quad p = \varepsilon - \sigma/E \tag{1.1}$$

где p — деформация ползучести. Функция $h(p)$ характеризует упрочнение материала. Для степенной зависимости $h(p)$ соотношение (1.1) соответствует условию подобия кривых ползучести [10].

При отклонении стержня от прямолинейного состояния в результате некоторого возмущения, природа которого не исследуется, все компоненты напряженно-деформированного состояния получают приращения. Для малых приращений из (1.1) после линеаризации получим

$$h\Delta\dot{p} + \dot{p}h'\Delta p = f'\Delta\sigma \tag{1.2}$$

Штрихом обозначена производная от функции по своему аргументу. На основании гипотезы плоских сечений и уравнения равновесия (моментов) имеем

$$\int_{\Omega} \Delta \varepsilon z d\Omega = J\Delta v_{yy}, \quad \int_{\Omega} \Delta \sigma z d\Omega = -T\Delta v \tag{1.3}$$

Здесь z — поперечная координата, Δv — прогиб стержня, J — момент инерции сечения, $\Delta v_{,yy}$ — вторая производная прогиба по продольной координате y . Учитывая, что $\Delta p = \Delta \varepsilon - \Delta \sigma/E$, получим

$$\int_{\Omega} \Delta p z d\Omega = T \Delta v/E + J \Delta v_{,yy} \quad (1.4)$$

С помощью (1.3) и (1.4) запишем (1.2) в терминах прогиба и его скорости. Для этого умножим (1.2) на z и проинтегрируем по площади сечения. Учитывая, что при однородном докритическом состоянии величины без значков Δ не зависят от z , получим

$$J \Delta \dot{v}_{,yy} + T \Delta \dot{v}/E + \dot{p} (T \Delta v/E + J \Delta v_{,yy}) h'/h = - T \Delta v f'/h \quad (1.5)$$

Форму прогиба выберем в виде $\Delta v = U_0 \sin(\mu y)$, удовлетворяющем граничным условиям $\Delta v = \Delta \dot{v} = 0$ при $y = 0, l$, если $\mu = m\pi/l$ ($m = 1, 2, \dots$). Из (1.5) следует, что скорость прогиба должна иметь такой же вид $\Delta \dot{v} = U_1 \sin(\mu y)$. Введем функции

$$\lambda(\sigma) = (f'/f) E \sigma / (\sigma_0 - \sigma), \quad \sigma_0 = EJ \mu^2 / \Omega \quad (1.6)$$

$$k(p) = h'/h \quad (1.7)$$

где σ_0 — эйлерово критическое напряжение упругого стержня. После подстановки формы прогиба в (1.5) получим уравнение для амплитудных значений U_0 и U_1 :

$$(k - \lambda) \dot{p} U_0 + U_1 = 0 \quad (1.8)$$

Таким образом, приращение прогиба U_0 и приращение скорости U_1 связаны между собой уравнением (1.8). Равенство нулю коэффициента при U_0 представляет критерий Работнова — Шестерикова $k = \lambda$ и задает особую точку процесса, характеризуемую значением деформации ползучести p_0 . Критический смысл этого состояния проистекал из того обстоятельства, что до состояния p_0 прогиб в последующем движении уменьшался, а заданный после p_0 увеличивался. Впоследствии [8] такая точка смены знака скорости прогиба была названа точкой псевдобиуркации нулевого порядка (ПБО) (по порядку производной прогиба, имеющей неопределенное значение в критической точке) и были обнаружены точки подобного типа для высших производных прогиба.

Для дальнейшего решающим является то, что точки типа p_0 имеют и другую интерпретацию, а именно: в такой точке задание скорости прогиба на основании (1.8) приводит к неограниченному возрастанию прогиба. Следующую особую точку процесса такого типа естественно определять из условия, что задание ускорений в ней приведет к неограниченному росту скорости.

Для выполнения этой задачи надо иметь соотношение, содержащее ускорение, что достигается простым повышением порядка исходного определяющего соотношения

$$\ddot{p} h + \dot{p}^2 h' = f' \dot{\delta} \quad (1.9)$$

Ограничиваясь рассмотрением ползучести стержня при постоянных нагрузках ($\dot{T} = \int \dot{\sigma} d\Omega = 0$), для малых приращений имеем

$$h \Delta \ddot{p} + 2 h' \dot{p} \Delta \dot{p} + (\ddot{p} h' + \dot{p}^2 h'') \Delta p = f' \Delta \dot{\delta} \quad (1.10)$$

При $\dot{\delta} = 0$ из (1.9) следует зависимость для параметров основного процесса

$$\ddot{p} = - \dot{p}^2 h' / h \quad (1.11)$$

Подставляя эту зависимость в (1.10), и повторяя вышеописанную процедуру с использованием равенства (1.3), (1.4), получим

$$k_1 \dot{p}^2 U_0 + (2k - \lambda) \dot{p} U_1 + U_2 = 0, \quad k_1 = dk/dp \quad (1.12)$$

Амплитудная величина ускорения прогиба введена по правилу

$$\Delta \ddot{v} = U_2 \sin(\mu y) \quad (1.13)$$

Два уравнения (1.8) и (1.12) образуют систему уравнений для трех величин U_0, U_1, U_2 . Систему (1.8), (1.12) с учетом (1.13) запишем в матричном виде

$$\begin{vmatrix} k - \lambda & 1 \\ k_1 & 2k - \lambda \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \dot{p}^2 U_0 \\ \dot{p} U_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ -U_2 \end{vmatrix} \quad (1.14)$$

Откуда следует, что искомая точка процесса p_1 при заданном U_2 отвечает равенству нулю определителя этой системы, т. е. условию

$$\lambda = (3k \pm \sqrt{k^2 + 4k_1})/2 \quad (1.15)$$

причем, одновременно с возмущением скорости U_1 становится неограниченным и возмущение самого перемещения U_0 .

Поднимая порядок определяющего соотношения можно расширить систему (1.14) для получения следующей особой точки p_2 процесса. Для этого продифференцируем (1.9) и после линеаризации воспользуемся упрощающим тождеством, справедливым при $\dot{\delta} = 0$:

$$\ddot{p} = \dot{p}^3 (3h'^2 - hh'')/h^2 \quad (1.16)$$

По аналогии с (1.13) будем вводить амплитудные значения высших производных прогиба U_i ($i = 0, 1, \dots$). После преобразований получим

$$(k_2 - kk_1) \dot{p}^3 U_0 + 3k_1 \dot{p}^2 U_1 + (3k - \lambda) \dot{p} U_2 + U_3 = 0 \quad (1.17)$$

$$k_i = d^i k / dp^i \quad (i = 1, 2, \dots)$$

Из анализа матричной записи системы (1.8), (1.12), (1.17):

$$\begin{vmatrix} k - \lambda & 1 & 0 \\ k_1 & 2k - \lambda & 1 \\ k_2 - kk_1 & 3k_1 & 3k - \lambda \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \dot{p}^3 U_0 \\ \dot{p}^2 U_1 \\ \dot{p} U_2 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ U_3 \end{vmatrix} \quad (1.18)$$

следует, что при заданном U_3 искомой особой точке p_2 отвечает момент обращения в нуль определителя этой системы

$$-\lambda^3 + 6\lambda^2 k - \lambda(11k^2 - 4k_1) - 7k_1 k + k_2 + 6k^3 = 0 \quad (1.19)$$

причем вместе с U_2 в этом момент становятся неограниченными U_1 и U_0 .

Эта же система позволяет выявить и две ранее полученные особые точки. Если задано ускорение U_2 , то из тождественного преобразования (1.18) к виду

$$\begin{vmatrix} k - \lambda & 1 & 0 \\ k_1 & 2k - \lambda & 0 \\ k_2 - kk_1 & 3k_1 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \dot{p}^3 U_0 \\ \dot{p}^2 U_1 \\ U_3 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \\ 3k - \lambda \end{vmatrix} \dot{p} U_2 \quad (1.20)$$

следует, что U_0, U_1, U_3 становятся неограниченными при равенстве нулю определителя системы (1.20), совпадающего с определителем системы (1.14), т. е. в особой точке p_1 . Аналогично этому при задании U_1 из (1.18) следует, что U_0, a

вместе с ним и U_2, U_3 становятся неограниченными в точке p_0 . Других особых точек системы (1.18) не выделяет.

Таким же образом выведем четвертое уравнение системы

$$F_4 \dot{p}^4 U_0 + 4F_3 \dot{p}^3 U_1 + 6F_2 \dot{p}^2 U_2 + (4F_1 - \lambda) \dot{p} U_3 + U_4 = 0 \quad (1.21)$$

Введены функции $F_i = F_i(p)$, выражающие коэффициенты в уравнениях системы

$$F_0 = 1, \quad F_1 = k, \quad F_2 = k_1, \quad F_3 = k_2 - kk_1, \dots$$

$$F_{N+1} = F_N' - (N-1) F_N F_1 \quad (N = 1, 2, \dots) \quad (1.22)$$

Систему (1.18), (1.12), (1.17), (1.21) запишем в матричном виде

$$\begin{pmatrix} F_1 - \lambda & 1 & 0 & 0 \\ F_2 & 2F_1 - \lambda & 1 & 0 \\ F_3 & 3F_2 & 3F_1 - \lambda & 1 \\ F_4 & 4F_3 & 6F_2 & 4F_1 - \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -U_4 \end{pmatrix} \quad (1.23)$$

$$V_i = U_{i-1} \dot{p}^{N-i+1} \quad (i = 1, 2, \dots, N) \quad (1.24)$$

Здесь и далее суммирование по индексам нет.

Систему (1.23) можно расширить до произвольного порядка. Для порядка $N+1$ система примет вид

$$(M - \lambda I) \bar{V} = \bar{Z} \quad (1.25)$$

Все компоненты Z_i правой части равны нулю, кроме $Z_{N+1} = -U_{N+1}$. Вектор \bar{V} введен равенством (1.24), а элементы матрицы M имеют вид (I — единичная матрица):

$$M_{ij} = C_{j-1}^i F_{i-j+1}, \quad C_j^i = i! / [j! (i-j)!] \quad (i, j = 1, 2, \dots, N+1)$$

$$F_n = 0 \quad \text{при } n < 0 \quad (1.26)$$

Нетрудно проверить, что каждое повышение порядка системы (1.25) дополняет найденное до этого множество особых точек p_0, p_1, \dots, p_{N-1} , лишь одной новой p_N , причем вместе с этим определяет и ранее найденное множество объединенным условием: при заданном U_i , все остальные возмущения неограничены. Значение $i = N+1$ отвечает точке p_N , значения $1 \leq i \leq N$ — остальным точкам указанного выше множества.

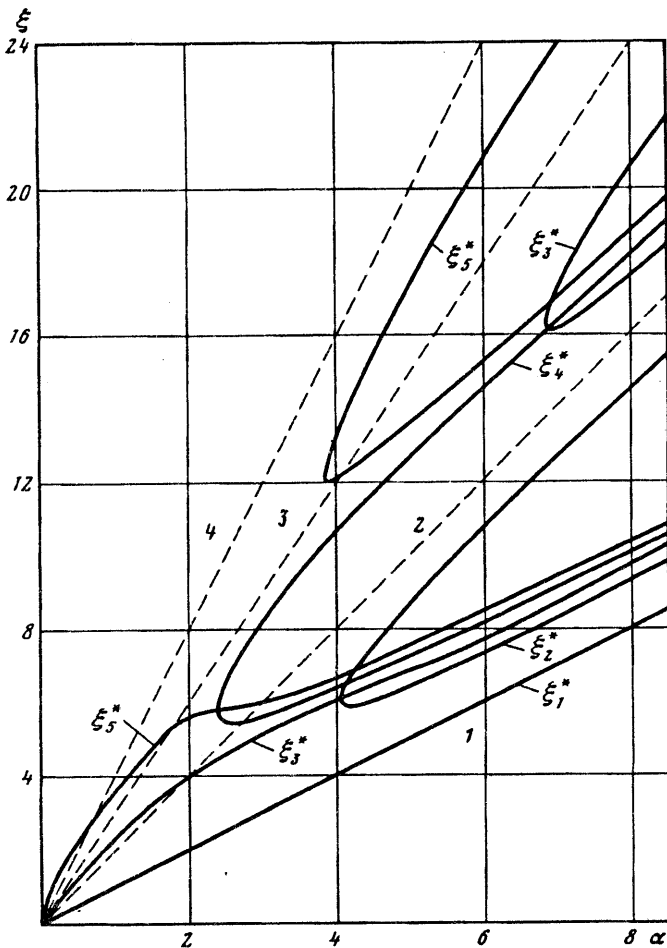
Все такие точки не являются бифуркационными и относятся к разряду псевдобифуркационных, как и множество точек, выделенных в [8, 9], которые в принятых здесь терминах отвечают условию: при заданном U_i все остальные возмущения равны нулю¹. В дальнейшем наименования псевдобифуркационной точки N -го порядка в принятом здесь смысле будем давать в квадратных скобках [ПБ N], а в наименовании таковых из [8, 9] будем использовать круглые скобки (ПБ N).

Характеристические полиномы матрицы M порядка 1, 2, 3 имеют вид:

$$B_1 = -\lambda + F_1, \quad B_2 = \lambda^2 - 3\lambda F_1 + 2F_1^2 - F_2$$

$$B_3 = -\lambda^3 + 6\lambda^2 F_1 - (11F_1^2 - 4F_2) \lambda + 6F_1^3 - 6F_1 F_2 + F_3 \quad (1.27)$$

¹ Отметим, что в математическом плане выделение таких точек эквивалентно приравнению нулю диагональных элементов матрицы системы (1.25).



Справедлива рекуррентная связь

$$B_N = -\lambda B_{N-1} - \sum_{i=0}^{N-1} (-1)^i B_i F_{N-i} C_i^N, \quad B_0 = 1 \quad (N = 1, 2, \dots) \quad (1.28)$$

Корень полинома B_{N+1} является точкой [ПБН].

Разрешим (1.25) относительно $U_i (i = 0, 1, \dots, N)$ по правилу Крамера

$$U_i = -U_{N+1} \dot{p}^{i-N-1} B_i / B_{N+1}$$

Обращение знаменателя B_{N+1} в нуль при заданной величине U_{N+1} приводит к неограниченному росту $U_i (i = 0, 1, \dots, N)$.

2. Рассмотрим частный случай соотношения (1.1). Наиболее распространенным вариантом функции упрочнения является степенная зависимость $h(p) = p^\alpha$. Введем новую переменную, критическое в смысле [ПБН] значение которой будем разыскивать

$$\xi = \lambda p = (f'/f) E p \sigma / (\sigma_0 - \sigma) \quad (2.1)$$

Замечая, что в соответствии с (1.7) $k = \alpha/p$ и кроме того $k_1 = dk/dp =$

	γ	γ_n	$\alpha = 1, n = 3$
1	1	1	1,000
2	$(1 + \alpha)f/(\epsilon f')$	$(1 + \alpha)/n$	0,667
5	$2\alpha f/(\epsilon f')$	$2\alpha/n$	0,667
	$(1 + 2\alpha)f/(\epsilon f')$	$(1 + 2\alpha)/n$	1,000
7	$\alpha f/(\epsilon f')$	α/n	0,333
8	$(N + 1)\alpha f/(\epsilon f')$	$(N + 1)\alpha/n$	
		α/n	0,333
		$2\alpha/n$	0,667
		$3\alpha/n$	1,000
(2.7)	$\xi_N^* + f/\epsilon f'$	$\xi_N^* + 1/n$	
		ξ_1^*/n	0,333
		ξ_3^*/n	0,774
		ξ_5^*/n	1,216

$= -\alpha/p^2$, $k_2 = dk_1/dp = 2\alpha/p^3$, запишем несколько первых полиномов B_N (1.27) — (1.28), опуская общий множитель p^{-N} , несущественный при поиске корней

$$\begin{aligned}
 B_1 &= -\xi + \alpha, \quad B_2 = \xi^2 - 3\alpha\xi + \alpha(2\alpha + 1) \\
 B_3 &= -\xi^3 + 6\alpha\xi^2 - (4 + 11\alpha)\xi + \alpha(2\alpha + 1)(3\alpha + 2) \\
 B_4 &= \xi^4 - 10\alpha\xi^3 + 5\alpha(2 + 7\alpha)\xi^2 - \\
 &\quad - 5\alpha(2\alpha + 1)(5\alpha + 2)\xi + \alpha(2\alpha + 1)(3\alpha + 2)(4\alpha + 3)
 \end{aligned}
 \tag{2.2}$$

Корни ξ_N^* полиномов B_N в зависимости от α представлены в виде кривых на фигуре. Прямые 1—4 на той же фигуре отвечают точкам (ПБ0) — (ПБ3) соответственно. Нечетные полиномы всегда имеют хотя бы по одному корню при любых α , четные — в зависимости от α . Например, B_2 имеет корни $\xi_2^* = (3\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - 4\alpha})/2$ при $\alpha \geq 4$, полином B_4 — при $\alpha \geq 2,4$.

Графики $\xi_N^*(\alpha)$ подсказывают наличие асимптот решений. Замечая, что предполагаемые асимптоты проходят через начало координат, введем для их нахождения переменную $e = \xi/\alpha$. Полиномы примут вид

$$B_1 = -\alpha(e - 1), \quad B_2 = \alpha^2 [(e - 1)(e - 2) + 1/\alpha] \tag{2.3}$$

$$B_3 = -\alpha^3 [(e - 1)(e - 2)(e - 3) + 4e/\alpha - 2/\alpha^2 - 7/\alpha]$$

Отсюда при $\alpha \rightarrow \infty$ имеем представление

$$B_N \sim (e - 1)(e - 2) \dots (e - N) \tag{2.4}$$

Корни $e = i$ ($i = 1, 2, \dots, N$) предельных полиномов дают уравнения асимптот решений исходных полиномов порядка N :

$$\xi = i\alpha \quad (i = 1, 2, \dots, N) \tag{2.5}$$

Эти же значения являлись решениями задачи о псевдобифуркации без учета взаимосвязи возмущений — (ПБ). Таким образом, имеет место асимптотическое совпадение решений для точек (ПБ) и [ПБ].

Сравним полученные результаты с известными критериями. Можно показать, что для большинства из них предсказываемая критическая деформация ползучести имеет вид

$$p = \gamma(\sigma_0 - \sigma)/E \tag{2.6}$$

Безразмерный коэффициент γ из разных работ представлен в таблице. В отдельных строках показаны оба варианта критерия [5], точки (ПБ0), (ПБ1), (ПБ2) и [ПБ0], [ПБ2], [ПБ4] ($\gamma_n = \gamma$ при $f = A\sigma^n$).

Для [ПБ N] в соответствии с (2.1) имеем

$$\gamma = \xi^* f / \sigma f \quad (2.7)$$

где ξ_{N+1}^* корни полиномов B_{N+1} .

Критерии [3] и [4] не дают точных решений в форме (2.7), однако при больших α имеется асимптотика $\xi_{[3]} \rightarrow 2\alpha$, $\xi_{[4]} \rightarrow \alpha$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Gerard G. A creep buckling hypothesis//J. Aeron. Sci. 1956. V. 23. № 9. P. 879—882.
2. Shanley R. F. Weight-strength analysis of aircraft structures. N.-Y.: Mc Graw-Hill. 1952. 253 p.
3. Шестериков С. А. О критерии устойчивости при ползучести//ПММ. 1959. Т. 23. Вып. 6. С. 1101—1106.
4. Иванов Г. В. Об устойчивости равновесия сжато-изогнутых тонких стержней при неупругих деформациях//ПМТФ. 1961. № 3. С. 74—84.
5. Куршин Л. М. Об устойчивости стержней и пластин в условиях ползучести//ДАН СССР. 1961. Т. 140. № 3. С. 125—128.
6. Арутюнян Н. Х., Дроздов А. Д., Колмановский В. Б. Устойчивость вязкоупругих тел и конструкций//Итоги науки и техники. Мех. деф. твердого тела. М.: ВИНТИ. 1987. Т. 19. С. 3—77.
7. Работнов Ю. Н., Шестериков С. А. Устойчивость стержней и пластинок в условиях ползучести//ПММ. 1957. Т. 21. Вып. 3. С. 406—412.
8. Ключников В. Д. Устойчивость упругопластических систем. М.: Наука, 1980. 240 с.
9. Ключников В. Д. Лекции по устойчивости деформируемых систем. М.: Изд-во МГУ, 1986. 224 с.
10. Работнов Ю. Н. Ползучесть элементов конструкций. М.: Наука, 1966. 752 с.

Москва

Поступила в редакцию
11.22.1993