

УДК 624.04

АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О ПРОГИБЕ ПЛОСКОЙ РЕШЕТЧАТОЙ БАЛОЧНОЙ ФЕРМЫ С ПРОИЗВОЛЬНЫМ ЧИСЛОМ ПАНЕЛЕЙ

Курсанов М.Н.

Национальный исследовательский университет «МЭИ»

Предложена схема решетки статически определимой фермы. Верхний пояс фермы прямой, нижний имеет по концам подъемы. Выводится формула зависимости прогиба фермы от ее размеров и числа панелей. Рассмотрена равномерная нагрузка по узлам верхнего пояса и сосредоточенная в середине пролета. Усилия в стержнях рассчитываются в символьной форме методом вырезания узлов в системе компьютерной математики Maple. Для нахождения прогиба середины пролета используется формула Максвелла-Мора в предположении, что все стержни упругие и имеют одинаковую жесткость. Обнаружен случай вырождения системы уравнений равновесия при некотором числе панелей.

Ключевые слова: ферма, индукция, прогиб, Maple, точное решение, произвольное число панелей.

Наиболее простая конструкция, кроме простой балки, используемая в строительстве – это плоская статически определимая балочная ферма. В основном расчет ферм производится методом конечных элементов [1]. Аналитические решения для расчета прогиба ферм в зависимости от числа панелей появились лишь в последнее время с развитием методов символьной математики (Maple, Mathematica, Maxima, Derive, Reduce). Методом индукции в системе Maple получен ряд решений для арочных ферм [2], шпренгельной фермы [3, 4], консольных [5, 6] и ферм с различными видами решетки [7-13]. Есть и решения для анализа прогиба пространственных ферм [14], а также для определения частот собственных колебаний плоских ферм [15, 16].

Рассмотрим схему симметричной фермы с $2n$ панелями с двойной решеткой. Высота фермы неравномерная по пролету (рис. 1).

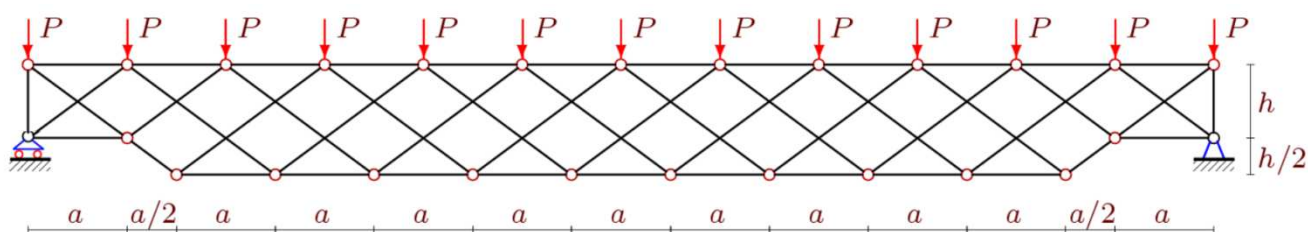


Рис. 1. Распределенная нагрузка, $n = 5$

По концам фермы в ее опорных частях высота фермы меньше. Очевидно, ферма со сложной двойной решеткой не может быть рассчитана простыми аналитическими методами, например методом сечений.

Расчет усилий в стержнях фермы вместе с определением реакций опор произведем по программе, написанной на языке символьной математики Maple [17]. В программу вводятся координаты узлов. Соответствующий фрагмент программы имеет вид:

```
> for i to 2*n+1 do x[i]:=(i-1)*a; y[i]:=3*h/2; end:
> x[2*n+2]:=0: y[2*n+2]:=h/2: x[2*n+3]:=a: y[2*n+3]:=h/2:
> x[4*n+2]:=2*n*a-a: y[4*n+2]:=h/2: x[4*n+3]:=2*n*a: y[4*n+3]:=h/2:
> for i to 2*n-2 do x[2*n+3+i]:=a*i+a/2:y[2*n+3+i]:=0: end:
```

Порядок соединения стержней задается списками стержней $\mathbf{N}[i]$ с номерами концевых точек (шарниров). Номер конца и начала стержня выбирается произвольно и на знак и величину усилия в стержне не влияет. Для стержней верхнего пояса, например, эта часть программы имеет вид:

```
> for i to 2*n do N[i]:=[i,i+1]; end:
```

Также вводится информация и для других стержней.

Матрица системы уравнений равновесия узлов фермы в форме проекций на оси составляется по данным решетки и координатам узлов. Размер матрицы равен числу стержней. В систему уравнений входят и усилия в трех стержнях, моделирующих опоры. Решение системы линейных алгебраических уравнений дают операторы системы Maple. Эти формулы для усилий необходимы при вычислении прогиба по формуле Максвелла-Мора

$$\Delta = \sum_{j=1}^{K-3} \frac{S_j s_j l_j}{EF}, \quad (1)$$

где $K = 8n + 6$ – число стержней в ферме; S_j – усилия в стержнях фермы от действия внешней нагрузки; s_j – усилия от единичной вертикальной силы, приложенной к среднему узлу верхнего пояса; l_j – длина стержня j ; EF – жесткость стержней.

Расчет ряда ферм с различным числом панелей показал, что при $n = 4, 7, 10...$ определитель системы уравнений равновесия обращается в ноль. Это соответствует мгновенной кинематической изменяемости конструкции [17]. Примем

$$n = (6k + 1 - (-1)^k) / 4, \quad k = 1, 2, 3, \dots \quad (2)$$

В этом случае при последовательном увеличении k значение n не будет принимать критические величины $3k + 1$, $k = 1, 2, 3, \dots$, при которых определитель системы уравнений равновесия обращается в ноль. Расчет прогиба ферм с разным числом k дает формулу вида:

$$\Delta = P(C_1 a^3 + C_2 c^3 + C_3 h^3) / (EFh^2), \quad (3)$$

где $c = \sqrt{a^2 + h^2}$. Зависимость от числа k входит только в коэффициенты $C_1(k), C_2(k), C_3(k)$. Эти функции определяются методом индукции [17]. Вычисляются последовательности коэффициентов, полученных из решения задачи для ряда ферм с увеличивающимся числом панелей, и определяются общие члены этих последовательностей. Оператор **rgf_findrecur** из системы Maple дает рекуррентное уравнение, которому должен удовлетворять общий член последовательности. Для коэффициента C_1 в случае равномерной нагрузки по верхнему поясу (рис. 1) однородное рекуррентное уравнение девятого порядка имеет вид:

$$C_{1,k} = C_{1,k-1} + 4C_{1,k-2} - 4C_{1,k-3} - 6C_{1,k-4} + 6C_{1,k-5} + 4C_{1,k-6} - 4C_{1,k-7} - C_{1,k-8} + C_{1,k-9}.$$

Решение уравнения дает оператор **rsolve**

$$C_1 = (30k^4 + 20(1 - (-1)^k)k^3 + 6(21 - 23(-1)^k)k^2 + 112(1 - (-1)^k)k + 9 - 9(-1)^k) / 32. \quad (4)$$

Аналогично рассчитываются и два других коэффициента:

$$\left. \begin{aligned} C_2 &= (6(13 - 12(-1)^k)k^2 + 2(29 - 37(-1)^k)k - 3(-1)^k + 3) / 16; \\ C_3 &= (2(7 - 8(-1)^k)k - 5(-1)^k + 7) / 4. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

В случае действия одной вертикальной силы в середине пролета (рис. 2) коэффициенты имеют вид:

$$\left. \begin{aligned} C_1 &= (4k^3 + 2(1 - (-1)^k)k^2 + 2(12 - 11(-1)^k)k - 17(-1)^k + 17) / 8; \\ C_2 &= (6(5 - 4(-1)^k)k + 17 - 17(-1)^k) / 8; \\ C_3 &= (5 - 4(-1)^k) / 2. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

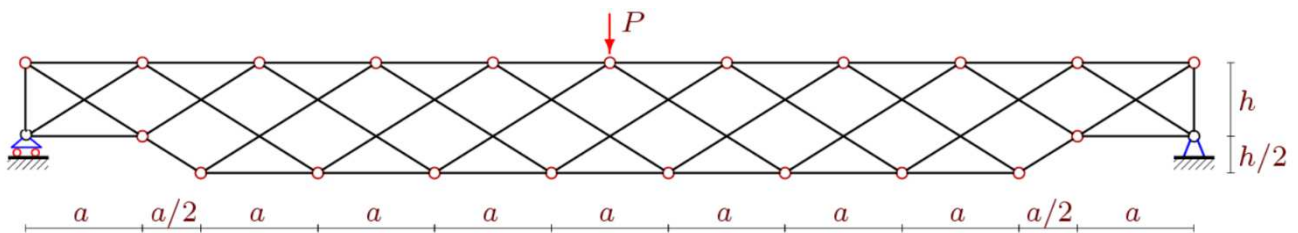


Рис. 2. Ферма. Сосредоточенная нагрузка, $n = 5$

Формулы (3), (4), (5) или (3), (6) дают решение поставленной задачи для распределенной и сосредоточенной нагрузки соответственно. Допускается и линейная комбинация этих решений.

Асимптотику решений по числу k , монотонно связанному с числом панелей n соотношением (2), можно выявить средствами Maple. Оператор **limit** дает следующий предел для случая распределенной нагрузки

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \Delta / k^4 = 15a^3 P / (16EFh^2).$$

Для сосредоточенной нагрузки имеем

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \Delta / k^3 = a^3 P / (2EFh^2).$$

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Ufimtsev E., Voronina M. Research of Total Mechanical Energy of Steel Roof Truss during Structurally Nonlinear Oscillations // *Procedia Engineering*. 2016. Vol. 150. Pp. 1891-1897.
2. Voropay R.A., Domanov E.V. Analytical solution of the problem of shifting a movable support of a truss of arch type in the Maple system // *Postulat*. 2019. № 1.
3. Rakhmatulina A.R., Smirnova A.A. Analytical calculation and analysis of planar springel truss // *Structural mechanics and structures*. 2018. № 2 (17). С. 72-79.
4. Суд И.Б. Формулы для прогиба шпренгельной балочной фермы с произвольным числом панелей // *Строительная механика и конструкции*. 2020. № 2 (25). С. 25-32.
5. Терзе С.В. Аналитический расчет зависимости деформаций консольной стойки от числа панелей в системе Maple // *Строительная механика и конструкции*. 2020. № 2 (25). С. 16-24.
6. Rakhmatulina A.R., Smirnova A.A. Two-parameter derivation of the formula for deflection of the console truss // *Postulat*. 2018. № 5-1 (31). P. 22.
7. Белянкин Н.А., Бойко А.Ю. Формулы для прогиба балочной фермы с произвольным числом панелей при равномерном нагружении // *Строительная механика и конструкции*. 2019. № 1 (20). С. 21-29.
8. Ткачук Г.Н. Формула зависимости прогиба несимметрично нагруженной плоской фермы с усиленными раскосами от числа панелей // *Строительная механика и конструкции*. 2019. № 2 (21). С. 32-39.
9. Pyushin A.S. The formula for calculating the deflection of a compound externally statically indeterminate frame // *Строительная механика и конструкции*. 2019. № 3 (22). С. 29-38.
10. Тимофеева Т.А. Формулы для расчета прогиба плоской решетчатой рамы с произвольным числом панелей // *Строительная механика и конструкции*. 2019. № 4 (23). С. 26-33.
11. Бойко А.Ю., Ткачук Г.Н., Плясова А.А. Зависимость прогиба плоской шарнирно-стержневой рамы от числа панелей // *Механизация и автоматизация строительства: сборник статей*. Самара: Самар. гос. техн. ун-т, 2019. С. 31-36.
12. Ткачук Г.Н., Бойко А.Ю. Аналитический расчет прогиба рамной фермы с произвольным числом панелей в системе Maple // *Механизация и автоматизация строительства: сборник статей*. Самара: Самар. гос. техн. ун-т, 2019. С. 48-53.
13. Чинченко А.М. Analytical calculation of the size of the bend of rectangular shape frame truss with a random number of panels in the Maple system // *Механизация и автоматизация строительства: сборник статей*. Самара: Самар. гос. техн. ун-т, 2019. С. 54-58.
14. Кирсанов М.Н. Аналитический расчет пространственной стержневой регулярной структуры с плоской гранью // *Строительная механика и расчет сооружений*. 2015. № 2 (259). С. 2-6.
15. Воробьев О.В. О методах получения аналитического решения для проблемы собственных частот шарнирных конструкций // *Строительная механика и конструкции*. 2020. № 1 (24). С. 25-38.
16. Vorobev O.V. Bilateral analytical estimation of first frequency of a plane truss // *Construction of Unique Buildings and Structures*. 2020. Vol. 92. Article No 9204 doi: 10.18720/CUBS.92.4
17. Бука-Вайваде К., Кирсанов М.Н., Сердюк Д.О. Calculation of deformations of a cantilever frame planar truss model with an arbitrary number of panels // *Вестник МГСУ*. 2020. Т. 15. Вып. 4. С. 510-517.

ANALYTICAL SOLUTION OF THE PROBLEM OF DEFLECTION OF A PLANAR LATTICE GIRDER TRUSS WITH AN ARBITRARY NUMBER OF PANELS

Kirsanov M.N.

National Research University «Moscow Power Engineering Institute»

A lattice scheme for a statically definable truss is proposed. The upper belt of the truss is straight, the lower one has lifts at the ends. The formula for the dependence of the deflection of the truss on its size and the number of panels is derived. The uniform load on the nodes of the upper belt and concentrated in the middle of the span are considered. The forces in the rods are calculated in symbolic form by cutting out nodes in the Maple computer mathematics system. To find the deflection of the mid – span, the Maxwell-Mohr's formula is used, assuming that all the rods are elastic and have the same stiffness. The case of degeneracy of the system of equilibrium equations for certain numbers of panels is found.

Keywords: *truss, induction, deflection, Maple, exact solution, arbitrary number of panels.*

ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРЕ

Кирсанов Михаил Николаевич

д-р физ.-мат. наук, профессор, профессор кафедры
робототехники, мехатроники, динамики
и прочности машин
Национальный исследовательский университет
«МЭИ»
111250, Россия, г. Москва,
ул. Красноказарменная, 14
E-mail: c216@ya.ru

INFORMATION ABOUT AUTHOR

Kirsanov Mikhail Nikolaevich

Doctor of Sciences, Professor, Professor of Robotics,
Mechatronics, Dynamics and Strength of Machines
Department
National Research University «Moscow Power
Engineering Institute»
111250, Russia, Moscow, Krasnokazarmennaya st., 14
E-mail: c216@ya.ru