М. Н. Кирсанов
Национальный исследовательский университет МЭИ,
mpei2004@yandex.ru

КРИВЫЕ НЕСТАБИЛЬНОСТИ В ЗАДАЧАХ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ И ИХ ЭВОЛЮЦИЯ

Нестабильность дифференциальных уравнений, где в качестве переменной является время и соответствующие прикладные задачи, в том числе и задача о выпучивании сжатого стержня из реологического материала, рассмотрены в [1]. Аналогичная постановка задачи о вырождении связи между производными возможна и в пространственных переменных.

Постановка задачи. Рассмотрим плоскую задачу теории упругости для изотропной неоднородной среды. Предположим, что модуль упругости и коэффициент Пуассона зависят от координат $\nu = \nu(x, y)$, $E = E(x, y)$. Функцию напряжений F введем по формуле $\sigma_{ij} = \delta_{ij}\nabla^2 F - F_{,xy}$, где $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$. Справедливо уравнение [2]:

$$\nabla^2(\gamma\nabla^2 F) = q_{,xx}F_{,yy} - 2q_{,xy}F_{,xy} + q_{,yy}F_{,xx}, \tag{1}$$

где $q = (1 + \nu)/E$, и $\gamma = 1/E$ для плоской деформации, $\gamma = (1 - \nu^2)/E$ для плоского напряженного состояния.

Запишем систему трех уравнений, первое из которых — уравнение (1), второе получается дифференцированием первого по x, третье — дифференцированием по y. Отнесем в левую часть системы величины $F_{,xx}$, $F_{,xy}$, $F_{,yy}$, в правую — все остальные слагаемые. Система примет вид

$$A\vec{X} = \vec{B}, \tag{2}$$

где $\vec{X} = \{F_{,xx}, F_{,xy}, F_{,yy}\} = \{\sigma_{xx}, -\sigma_{xy}, \sigma_{yy}\}$ — вектор напряжений, а вектор правой части $\vec{B}$ зависит от частных производных третьего, четвертого и пятого порядка от функции напряжений. Равенство нулю определителя системы (2) означает вырождение связи между напряжениями и производными напряжений. В общем случае неоднородности определитель зависит от координат, следовательно, вблизи некоторых кривых, определяемых уравнением $\det A = 0$, напряжения могут неограниченно расти, если на этих кривых задана правая часть системы (2). Рассмотрим случай малой неоднородности. Пусть $\nu = \nu_0 + f(x, y)$, $E = E_0(1 + h(x, y))$, где $\nu_0 =$const и $E_0 =$const — упругие характеристики некоторого однородного тела.

Пример. Уравнение $\det A = 0$ в общем случае является нелинейной неявной связью x и y. В системе Maple [3] для построения таких кривых предусмотрен оператор implicitplot из пакета plots. Рассмотрим следующие функции: $h = b\exp(-cx)$, $f = ay^2x$. Из $\det A = 0$ следует кривая нестабильности: $y = \sqrt{\frac{\nu(1-\xi(3\xi^2+5\xi+1))}{\xi^3(a-2c^2)+\xi^2(3a+2c^2)+3a\xi+a}}$, где $\xi = b\exp(-cx)$. Эволюция этих кривых при $\nu_0 = 0.2$, $a = 0.001$, $b = 0.002$ и изменении параметра $0.1 < c < 0.5$. изображена на рисунке 1.

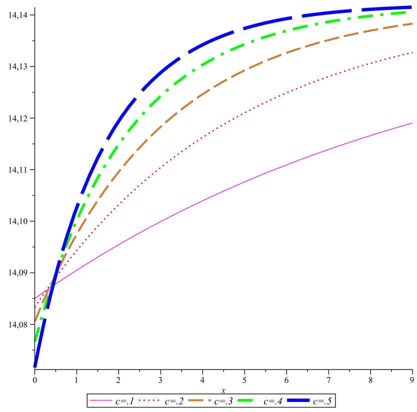

Рис. 1

ЛИТЕРАТУРА

1. Кирсанов М. Н. *Точки нестабильности дифференциального уравнения* // Вестник ЧГПУ, Механика предельного состояния. – 2010. – № 2(8). – С. 191–197.

2. Ломакин В. А. *Теория упругости неоднородных тел/* – М.: Изд-во МГУ, 1976. – 368 с.

3. Кирсанов М. Н. *Практика программирования в системе Maple* – М.: Издательский дом МЭИ, 2011. – 208 с.