И.В. Орлов

eagleIV@yandex.ru

ФГБОУ ВО Национальный исследовательский университет «МЭИ», Москва

МОДЕЛИРОВАНИЕ МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ В СРЕДЕ СИМВОЛЬНЫХ ВЫЧИСЛЕНИЙ «MATHEMATICA»

АННОТАЦИЯ

С помощью программы «Mathematica» строится математическая модель манипулятора на подвижном основании. определяются программные управления как результат наложения неголономных связей на движение системы. Проведено численное моделирование программного движения манипулятора по заданной траектории.

ВВЕДЕНИЕ

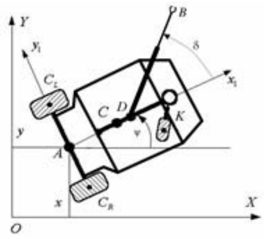
Задача об управлении движением манипулятора, установленного на подвижном шасси, имеет большое теоретическое и прикладное значение. В работе рассматривается автономный мобильный манипулятор на колёсном шасси. Исследования в этой области стимулируются многочисленными проблемами, возникающими в процессе деятельности человека. Исследование динамики мобильных манипуляторов осложняется большим числом степеней свободы и громоздкостью системы уравнений. Сложность расчёта манипуляторов приводит к развитию матричных методов составления уравнений движения [1—4]. Эти методы реализуются на компьютере с помощью системы символьных вычислений «Математика».

1. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ МОБИЛЬНОГО МАНИПУЛЯТОРА

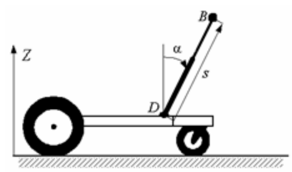
Манипулятор установлен на трёхколесном подвижном основании. Два колеса ведущих и одно пассивное — самоориентирующееся (рояльное). Каждое ведущее колесо приводится во вращение мотор-редуктором постоянного тока. Самоориентирующееся колесо закреплено в свободно вращающейся относительно вертикальной оси вилке.

Манипулятор прикреплён к средней части шасси. Штанга манипулятора телескопическая, собрана из двух трубок соответствующих диаметров. Трубка меньшего диаметра приводится в движение при помощи винтового устройства, вращаемого мотор-редуктором. Трубка большего диаметра закреплена на шасси так, что может вращаться относительно вертикальной и горизонтальной осей. Вращения обеспечиваются мотор-редукторами постоянного тока с различными передаточными числами.

Платформа мобильного манипулятора движется в горизонтальной плоскости. Предполагается, что колеса не проскальзывают в точках контакта с поверхностью. Введём в рассмотрение следующие системы координат (рис. 1): $OXYZ$ — неподвижная система координат; $Ax_1y_1z_1$ — подвижная система, жестко связанная с платформой, координаты точки A в неподвижной системе $(x, y, 0)$; ψ — угол поворота МР вокруг оси Az_1 относительно неподвижной системы координат; δ — угол поворота штанги относительно вертикальной оси (угол между осью Ax_1 и проекцией вектора **DB** на горизонтальную плоскость); α — угол отклонения вектора **DB** от вертикали; s — удлинение штанги. При построении математической модели мобильного манипулятора люфты в редукторах не учитывались: было сделано допущение о том, что углы поворотов роторов двигателей пропорциональны соответствующим угловым или линейной координатам.



а)



б)

Рис. 1. Мобильный манипулятор: *а* — вид сверху; *б* — вид сбоку

Напишем уравнения мобильного манипулятора в виде уравнений Аппеля [1]. Условие отсутствия бокового скольжения в проекции на ось Ay_1 соответствует равенству нулю проекции скорости точки A на эту ось:

$$V_{A_{y_1}} = -\dot{x}\sin\psi + \dot{y}\cos\psi = 0.$$

В уравнениях будем учитывать только массу платформы и массу схвата. Колеса и звенья штанги манипулятора считаем невесомыми. Переходными процессами в двигателях привода пренебрегаем.

Положение системы абсолютно твёрдых тел в этом случае определяется вектором обобщённых координат:

$$\mathbf{q} = (x,\ y,\ \psi,\ \delta,\ \alpha,\ s)^T\ ,$$

вектор обобщённых скоростей

$$\dot{\mathbf{q}} = (\dot{x},\ \dot{y},\ \dot{\psi},\ \dot{\delta},\ \dot{\alpha},\ \dot{s})^T\ .$$

Вектор псевдоскоростей будет иметь вид

$$\boldsymbol{\pi} = (V,\ \Omega,\ \omega_3,\ \omega_4,\ u)^T \ .$$

Кинематические уравнения, устанавливающие связь между обобщёнными скоростями и псевдоскоростями:

$$\dot{x} = V\cos\psi,\ \dot{y} = V\sin\psi,\ \ \dot{\psi} = \Omega,\ \dot{\delta} = \omega_3,\ \dot{\alpha} = \omega_4,\ \dot{s} = u\ .$$

Выпишем выражение для функции Аппеля:

$$S = \frac{1}{2}((m((\dot{V} - a\Omega)^2 + (a\dot{\Omega} + V\Omega)^2) +$$
$$+ J\dot{\Omega}^2 + m_b \mathbf{w}_B^2(\dot{\boldsymbol{\pi}}, \boldsymbol{\pi}, \mathbf{q})),$$

где $\mathbf{w}_B^2(\dot{\boldsymbol{\pi}}, \boldsymbol{\pi}, \mathbf{q})$ — квадрат абсолютного ускорения схвата манипулятора.

Уравнения Аппеля в матричной форме имеют вид

$$\left(\frac{\partial S}{\partial \pi}\right)^T = \mathbf{Q}\,,$$

где $\mathbf{Q} = (Q_V, Q_\Omega, Q_\delta, Q_\alpha, Q_S)^T$ — вектор обобщённых сил. С учётом веса схвата компоненты вектора обобщённых сил в определяются выражениями

$$Q_V = \frac{n(M_{1\text{дв}} + M_{2\text{дв}})}{r},$$
$$Q_\Omega = \frac{nl(M_{1\text{дв}} - M_{2\text{дв}})}{r},$$
$$Q_\delta = n_\delta M_{3\text{дв}},$$
$$Q_\alpha = mgs\sin\alpha + n_\alpha M_{4\text{дв}},$$
$$Q_s = -mg\cos\alpha + n_s M_{5\text{дв}} / r_s.$$

Момент, развиваемый двигателем постоянного тока, определяется выражением

$$M_{i\,\text{дв}} = c_1 U_i - c_2 \omega_i\ ,$$

где i — номер двигателя; c_1, c_2 — постоянные двигателя; U_i — напряжение на i-м двигателе; ω_i — угловая скорость ротора i-го двигателя.

2. ПРОГРАММНОЕ ДВИЖЕНИЕ КАК НАЛОЖЕНИЕ НОВЫХ СВЯЗЕЙ

Пусть **AD** = b, тогда координаты точки B будут определяться формулами

$$\begin{aligned} x_B &= x + b\cos\psi + s\cos(\psi + \delta)\sin\alpha; \\ y_B &= y + b\sin\psi + s\sin(\psi + \delta)\sin\alpha; \\ z_B &= s\cos\alpha. \end{aligned} \qquad (1)$$

Для нахождения скорости и ускорения точки B продифференцируем выражения (1) по времени и заменим обобщённые скорости через псевдоскорости. Тогда

$$\mathbf{V}_{\boldsymbol{B}}(t) = \mathbf{B}\pi\,, \qquad (2)$$

где матрица **B** достаточно громоздка и в явном виде здесь не приводится.

Дифференцирование равенства (2) приводит к следующему выражению для ускорения точки B:

$$\mathbf{w}_{\boldsymbol{B}}(t) = \mathbf{B}\pi + \tilde{\mathbf{w}}\,,$$

где $\tilde{\mathbf{w}} = \tilde{\mathbf{w}}(\pi, \mathbf{q})$ — вектор, компоненты которого не зависят от псевдоускорений.

Пусть в неподвижной системе координат задан вектор скорости схвата $\mathbf{V}_{\boldsymbol{B}}(t)$. Тогда левые части выражений (2) будут известными функциями времени и, следовательно, уравнения можно рассматривать как неголономные связи для вектора псевдоскоростей $\boldsymbol{\pi}$ [1].

Рассмотрим свободное движение мобильного манипулятора при наличии связей (2). Для этого запишем уравнения Аппеля с неопределёнными множителями:

$$\left(\frac{\partial S}{\partial \dot{\boldsymbol{\pi}}}\right)^T = \mathbf{Q} + \mathbf{B}^T\boldsymbol{\lambda}\ ,\ \boldsymbol{\lambda} = \begin{pmatrix}\lambda_1\\ \lambda_2\\ \lambda_3\end{pmatrix}, \qquad (3)$$

где λ — вектор неопределённых множителей.

Введём матрицу $\tilde{\mathbf{B}}$, которая является обратной к матрице, полученной добавлением слева к матрице $\mathbf{B}^T$ двух единичных столбцов.

Умножим слева уравнения (3) на матрицу $\tilde{\mathbf{B}}$:

$$\tilde{\mathbf{B}}\left(\left(\frac{\partial S}{\partial \dot{\boldsymbol{\pi}}}\right)^T - \mathbf{Q} - \mathbf{B}^T\boldsymbol{\lambda}\right) = 0\ . \qquad (4)$$

Так как $\tilde{\mathbf{B}}\mathbf{B}^T\boldsymbol{\lambda} = (0,\ \ 0,\ \ \lambda_1,\ \ \lambda_2,\ \ \lambda_3)^T$, то первые два уравнения системы (4) не содержат компонент вектора **λ**. Эти два уравнения можно рассматривать как уравнения мобильного манипулятора, на движение которого наложена неголономная связь (2).

Знание неопределённых множителей λ_1, λ_2, λ_3, позволяет вычислить программные значения управляющих воздействий по формуле

$$\mathbf{Q}_{\text{пр}} = \mathbf{B}^T(t)\lambda(t)\,. \qquad (5)$$

После подсчёта обобщённых сил по формуле (5) можно вычислить напряжения, при подаче которых на двигатели будут реализованы требуемые моменты. Предполагается, что манипулятор приводится в движение такими же двигателями, какие вращают ведущие колеса платформы.

Из выражений, описывающих обобщённые силы Q_V и Q_Ω, получим следующие формулы для вычисления напряжений U_1 и U_2, которые необходимо подать на ведущие двигатели платформы в процессе движения схвата по заданной траектории:

$$U_1=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{a_1}\left(Q_V+\frac{2c_2n^2V}{r^2}\right)+\frac{1}{a_2}\left(Q_\Omega+\frac{2c_2n^2l^2\Omega}{r^2}\right)\right];$$
$$U_2=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{a_1}\left(Q_V+\frac{2c_2n^2V}{r^2}\right)-\frac{1}{a_2}\left(Q_\Omega+\frac{2c_2n^2l^2\Omega}{r^2}\right)\right]. \qquad (6)$$

В формулах (6) использованы следующие обозначения: $a_1=\frac{c_1n}{r}$, $a_2=\frac{c_1nl}{r}$.

Вычислим напряжения, которые необходимо подать на двигатели:

$$U_3=\frac{1}{c_1}\left(\frac{Q_\delta}{n_\delta}+c_2n_\delta\omega_3\right),$$
$$U_4=\frac{1}{c_1}\left(\frac{Q_\alpha-m_2gs\sin\alpha}{n_\alpha}+c_2n_\alpha\omega_4\right), \qquad (7)$$
$$U_5=\frac{1}{c_1}\left(\frac{Q_s+m_2g\cos\alpha}{n_s}r_s+c_2n_s\frac{u}{r_s}\right).$$

3. МОДЕЛИРОВАНИЕ ДВИЖЕНИЯ МОБИЛЬНОГО МАНИПУЛЯТОРА

Исследование рассматриваемой системы проводится в среде символьных вычислений «Mathematica». На первом этапе в символьном виде строятся уравнения движения с учётом кинематических соотношений, выражающих неголономную связь, наложенную на движение системы. Далее задаётся закон движения схвата и вычисляется выражение неголономной связи (2). Дальнейшие преобразования позволяют вычислить вектор неопределённых множителей λ_1, λ_2, λ_3, обеспечивающих реализацию программного движения (2). Зная неопределённые множители, вычисляем программные значения управляющих воздействий по формуле (5). Далее выписываются выражения (6), (7) для напряжений, которые необходимо подать на двигатели для реализации заданного программного движения.

Далее приводятся результаты численного моделирования (рис. 2—13) движения мобильного манипулятора по винтовой линии. Винтовая линия задается следующими равенствами с параметрами, где:

$$x_B=\frac{6}{5}\cos\frac{t}{k};\ y_B=\frac{6}{5}\sin\frac{t}{m};\ z_B=\frac{1}{5}+\frac{3t}{n},$$

где $k=m=5$, $n=250$.

На рисунках приведены результаты численного моделирования для трёх различных наборов начальных условий.

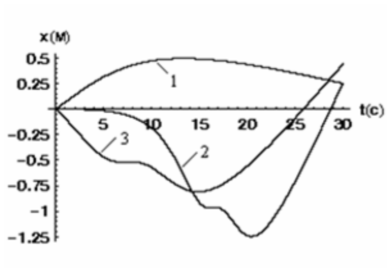


Рис. 2. Изменение координаты x точки *A*

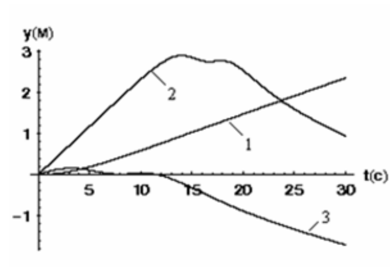


Рис. 3. Изменение координаты *y* точки *A*

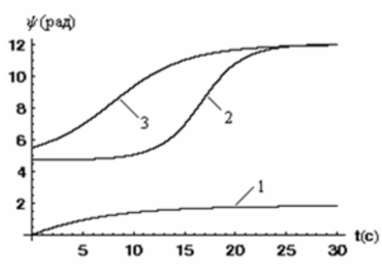


Рис. 4. Изменение угла ψ

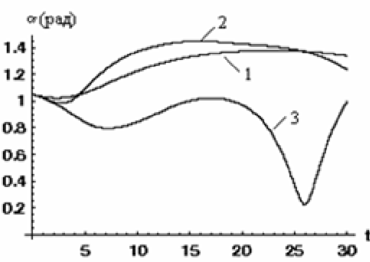


Рис. 5. Изменение угла α

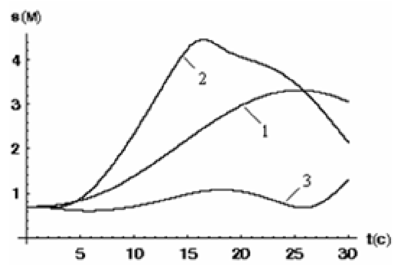


Рис. 6. Изменение длины манипулятора *s*

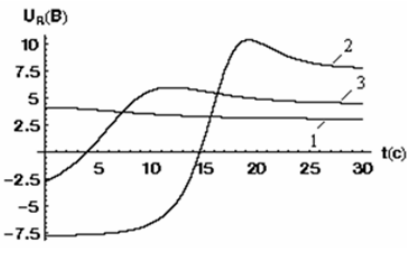


Рис. 7. Изменение U_1

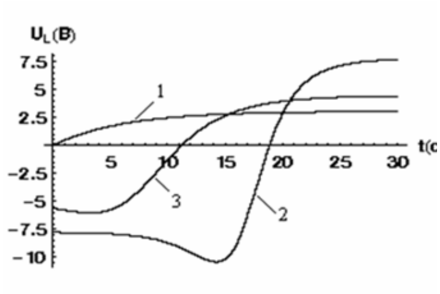


Рис. 8. Изменение U_2

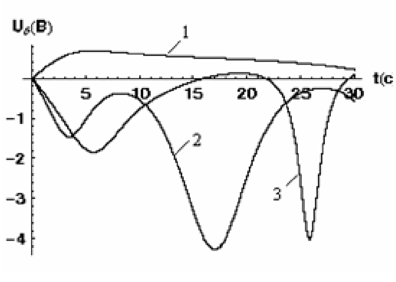


Рис. 9. Изменение U_3

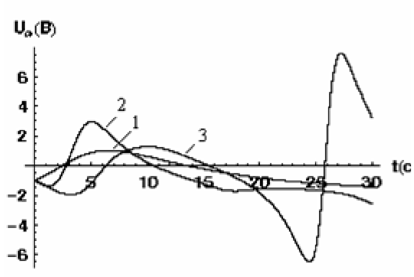


Рис. 10. Изменение U_4

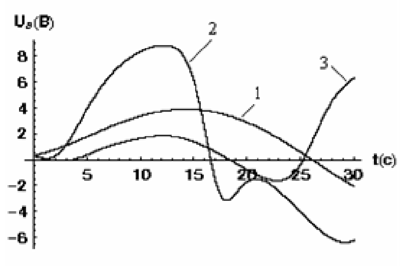


Рис. 11. Изменение U_5

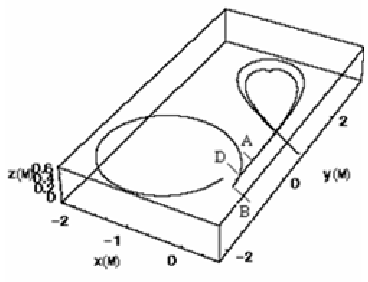


Рис. 12. Траектории движения точек *A, B, D* в случае 2

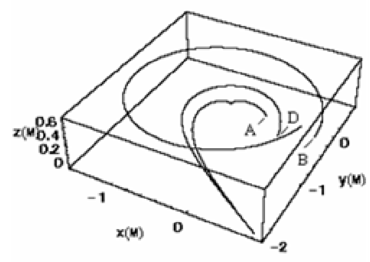


Рис. 13. Траектории движения точек *A, B, D* в случае 3

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

С помощью программы «Mathematica» построена математическая модель мобильного телескопического манипулятора. Проведено численное моделирование программного движения схвата, заданого в виде неголономной связи, накладывающей ограничение на скорость схвата.

По результатам численных расчётов представлены графики изменения координат, управляющих напряжений и траекторий точек системы. Полученная информация позволяет судить о реализуемости заданного программного движения схвата.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Мартыненко Ю.Г., Орлов И.В.** Программное управление движением телескопического манипулятора на подвижной платформе // Вестник МЭИ. 2003. № 5. С. 60—70.
2. **Мартыненко Ю.Г., Орлов И.В.** Алгоритмы управления мобильным манипулятором //Материалы научной школы-конференции «Мобильные роботы и мехатронные системы». Москва, Россия, 2—3 декабря 2002 г. М.: Изд-во Моск. ун-та, 2002. С. 142—155.
3. **Орлов И.В., Чунг Ч.Т.** Управление мобильным двухзвенным манипулятором с ангулярной системой координат // Вестник Московского энергетического института. 2011. № 5. С. 90—94.
4. **Адамов Б.И., Орлов И.В.** Управление мобильным манипулятором, работающим в цилиндрической системе координат// Вестник Московского энергетического института. 2012. № 1. С. 28—35.

I.V. Orlov

eagleIV@yandex.ru

National Research University «Moscow Power Engineering Institute», Moscow

MODELING OF MECHANICAL SYSTEM IN THE SYMBOLIC COMPUTING ENVIRONMENT OF MATHEMATICA

SUMMARY

Using program Mathematica, we construct a mathematical model of the manipulator on a moving base. defines program management as a result of imposition of non-holonomic relations on the motion of the system. A numerical simulation program movement of the manipulator along a predetermined path.