

**АНАЛИТИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ О ПРОГИБЕ ПЛОСКИХ ФЕРМ
АРЧНОГО ТИПА**Н.В. Осадченко¹Национальный исследовательский университет “МЭИ”
Россия, г. Москва

¹Канд. физ.-мат. наук, доцент, тел.: +7(495)362-73-14; e-mail: osadchenkonv@yandex.ru

Дан обзор значительного числа публикаций последнего времени, посвящённых получению точных аналитических решений разнообразных задач о прогибе плоских ферм арочного типа. Такие решения, справедливые при произвольном числе панелей в ферме, были найдены методом индукции с привлечением системы компьютерной математики Maple (как в однопараметрическом, так и в двухпараметрическом вариантах). Аналитические решения задач о прогибе могут быть использованы при анализе и проектировании различных арочных конструкций (в частности, арочных мостов).

Ключевые слова: арка, плоская ферма, арочный мост, прогиб, метод индукции, Maple, аналитическое решение

**ANALYTICAL SOLUTIONS OF PROBLEMS ON THE DEFLECTION OF
PLANAR TRUSSES OF ARCH TYPE**N.V. Osadchenko¹*National Research University “MPEI”,
Russia. Moscow*

¹Assistant Professor tel.: +7(495)3627314; e-mail: osadchenkonv@yandex.ru

A review of a significant number of recent publications devoted to the obtaining accurate analytical solutions of various problems on the deflection of flat trusses of arch type is given. Such solutions, which are valid for an arbitrary number of panels in the truss, were found by the induction method involving the Maple computer mathematics system (both in one-parameter and two-parameter versions). Analytical solutions of the problems on deflection can be used in the analysis and design of various arch structures (in particular, arch bridges).

Keywords: arch, planar truss, arch bridge, deflection, induction method, Maple, analytical solution

Введение

Статья включает обзор ряда точных аналитических решений задач о прогибе плоских ферм арочного типа, характеризующихся регулярной структурой и произвольным числом n панелей (однотипных конструктивных ячеек). Сравнительный анализ некоторых публикаций по данной тематике был ранее дан Л.К. Кийко [1]; ещё две работы проанализированы в обзоре Д.В. Тинькова [2], где основное внимание уделено балочным и решётчатым фермам. Здесь мы рассматриваем ряд работ последнего времени, не вошедших в упомянутые обзоры.

Арки (как сплошные, так и образованные из ферм) – один из важнейших базовых элементов в несущих конструкциях зданий и сооружений (в частности, мостов) [3,4]. Их применения разнообразны; в порядке обсуждения практического значения арочных конструкций здесь мы наметим лишь некоторые этапы эволюции арочных мостов.

Использование арочных конструкций в строительстве восходит к древности: уже древним шумерам и египтянам был известен арочный свод. Римляне впервые стали возводить арочные конструкции значительных размеров; до наших дней дошло несколько сотен древнеримских арочных мостов и акведуков, включая построенный в I веке каменный акведук Пон-дю-Гар высотой 47 м – самое значительное арочное сооружение вплоть до конца XII века, когда во Франции был возведён мост Сен-Бенезе [5,6]. С начала I тысячелетия нашей эры строительство арочных каменных мостов было развёрнуто также в Китае; примером может служить построенный в самом начале VII века под руководством Ли Чуня пешеходный мост Аньцзи, отличавшийся рядом новаторских инженерных решений [7].

В России одним из старейших сохранившихся доныне арочных каменных мостов является построенный в 1516 г. шестипролётный Троицкий мост через реку Неглинная, обеспечивавший проход в Кремль; доступ к мосту прикрывала крепостная Кутафья башня. Среди каменных московских мостов позднейшего времени следует упомянуть и пятипролётный арочный Дворцовый мост через реку Яузу (построен в 1777 г. мастером Семёном Яковлевым; существенно реконструирован в 1940 г. и переименован в Лефортовский мост) [8].

Столь же длительную историю имеют и деревянные арочные мосты; при этом уже римляне начинают широко применять в мостостроении деревянные фермы (ярким примером служит многопролётный мост через Дунай, построенный в 104 г. Аполлодором Дамасским во время похода Траяна против даков) [8].

С 1779 года (когда по проекту архитектора Т. Притчарда был возведён чугунный однопролётный мост через реку Северн в западной Англии) началось строительство металлических арочных мостов. Во 2-й половине XIX века на смену чугуну приходит сталь; первым крупным стальным мостом (и самым длинным для своего времени арочным мостом) стал мост Идса через реку Миссисипи в американском городе Сент-Луисе (строительство моста, проходившее под руководством инженера Дж.Б. Идса, завершено в 1874 г.) [5].

Начиная с 40-х гг. XIX века, при строительстве металлических мостов начинают применять фермы (первые из них во многом копировали конструкцию современных им деревянных ферм). Задачи мостостроения сделали актуальной разработку обоснованных методов расчёта ферм, и в 1840-х – 1870-х годах основы теории ферм были заложены в трудах таких учёных, как С. Уиппл, Д.И. Журавский, И.В. Шведлер, А. Риттер, А. Клебш, Дж.К. Максвелл, К. Кульман, Л. Кремона, О. Мор, А. Кастильяно (заметьте, что ещё в 1776 г. И.П. Кулибин выполнил математически корректный расчёт статически определимой ферменной конструкции применительно к предложенному им и оставшемуся нереализованным проекту деревянного арочного моста через Неву с пролётом около 300 м) [4, 8].

В 1875 г. изобретатель Ж. Монье впервые применил для строительства мостов железобетон: он построил небольшой (длиной 16 м) арочный пешеходный мост, перекинутый через ров замка маркиза де Тилиэра во французском городке Шазле [8]. В XX веке рекордными по длине нередко становились именно железобетонные мосты [5]; однако с мая 2010 г. крупнейшим в мире арочным мостом является стальной трёхпролётный мост Чаотьяньмэнь через реку Янцзы в Чунцине (КНР) с рекордной (552 м) длиной центрального пролёта (длина боковых пролётов – по 190 м, а общая длина моста с подъездными эстакадами составляет 1741 м). По двухъярусному полотну моста осуществляется железнодорожное и автомобильное движение, а над полотном расположена арочная ферма, середина которой поднята над полотном на 142 м (при этом края арки опущены ниже полотна) [9,10].

В России крупнейшим с октября 2014 г. является автомобильный Бугринский мост через реку Обь в Новосибирске. По типу мост является комбинированным, включая пойменные пролётные строения балочного типа и арочное русловое пролётное строение с длиной пролёта 380 м, которое состоит из плиты проезжей части, располагающейся по металлической затяжке арок, и двух слегка наклонённых друг к другу стальных арок высотой 70 м

каждая; арки объединены системой поперечных связей, а балки затяжки подвешены к аркам вантами. Общая длина моста – 2091 м [8,11].

В настоящее время завершается строительство Крымского моста через Керченский пролив. Его самыми габаритными элементами являются возведённые в 2017 г. арочные пролётные строения (железнодорожное и автодорожное) протяжённостью 227 м, каждое из которых является комбинацией из сквозной главной фермы (по которой движется транспорт) и арки высотой 45 м, выполняющей поддерживающую функцию. Ширина судоходного пролёта моста составляет 185 м, высота над водой – 35 м. Остальные пролётные строения моста – балочные, а общая длина всего мостового перехода равна 19 км [12,13].

Метод индукции

Вернёмся к проблеме расчёта арочных ферм. Как отмечают С.Н. Кривошапко и В.В. Галишникова, “в последнее время практически все расчёты оболочечных конструкций и стержневых структур выполняются численными методами”; при этом обычно используют программные комплексы общего назначения ANSYS, COSMOS, NASTRAN и подобные им, реализующие метод конечных элементов [3]. Однако численные расчёты не позволяют выявить скрытые возможности конструкции и не всегда обеспечивают требуемую точность для конструкций, содержащих большое число элементов. Этому недостатка лишены точные аналитические решения, получение которых для регулярных стержневых систем с произвольным числом n конструктивных ячеек стало возможным с появлением современных систем компьютерной математики (Maple, Mathematica, Maxima) [2].

В частности, применительно к плоским фермам регулярной структуры М.Н. Кирсановым в работе [14] был впервые использован метод индукции с привлечением системы Maple. Впоследствии данным методом было получено значительное число явных аналитических формул, дающих зависимость каких-либо характеристик исследуемого семейства ферм от числа n [15,16].

Рассматриваемый метод, согласно [14,15], включает:

- нумерацию узлов фермы и задание в программе для Maple структуры фермы и параметров задачи (геометрические параметры, жёсткости стержней и параметры, характеризующие внешнюю нагрузку);
- задание элементов матрицы G и столбца B записываемой в матричной форме $GS = B$ системы уравнений равновесия фермы, составляемой методом вырезания узлов (S – столбец усилий в стержнях);
- аналитическое решение при нескольких пробных (небольших) значениях n данной системы и получение по найденным выражениям для усилий формулы, определяющей зависимость искомой характеристики от параметров задачи (в частности, прогиб в исследуемом узле можно найти по формуле Максвелла – Мора);
- выявление структуры полученной формулы (последняя обычно имеет вид линейной комбинации нескольких выражений, зависящих от параметров задачи, с числовыми коэффициентами, изменяющимися от пробы к пробе) и получение с помощью оператора **rgf_findrecur** из пакета genfunc системы Maple рекуррентных уравнений для каждого из данных коэффициентов;
- решение с помощью оператора **rsolve** системы Maple полученных уравнений, что даёт для каждого из данных коэффициентов общий вид его аналитической зависимости от n .

Хорошо известно [4], что предметом исследования в строительной механике являются не сами реальные конструкции, а заменяющие их расчётные схемы – математические модели этих конструкций. Поэтому под “точным аналитическим решением” здесь понимается точное решение соответствующей математической задачи, постановка которой предполагает использование традиционных для строительной механики допущений. В применении к ре-

альным конструкциям решение, полученное методом индукции, даёт для инженеров-практиков лишь простую оценку (опираясь на которую, они могут выбрать, например, конкретное число n панелей конструкции и геометрические размеры её элементов).

Далее можно провести численный расчёт с учётом уточнённой математической модели – например, методом конечных элементов. Следует также проверить элементы конструкции на прочность, а сжатые – также и на устойчивость [2]. В некоторых случаях при расчёте приходится принимать во внимание эффекты геометрической и физической нелинейности [6]. В системе Maple имеются средства для проведения таких расчётов [17]; в работе [2] проверка формул, полученных методом индукции, выполнялась в многофункциональном программном комплексе Lira.

Коснёмся также вопроса терминологии. В строительной механике “арочной системой” называют системы криволинейного или ломаного очертания с несмещаемыми опорами, в которых от вертикальной нагрузки возникают наклонные реакции (горизонтальные составляющие последних именуют распорами) [3,4]. В практике же расчёта ферм данный термин нередко используют в более широком смысле, считая определяющим признаком арочной фермы наличие выраженного подъёма конструкции над горизонтальной линией, соединяющей опоры [1,18]. При такой трактовке данное понятие охватывает и некоторые балочные фермы (“безраспорные арочные фермы”, у которых одна опора неподвижная, а другая – подвижная), и ряд внешне статически неопределимых ферм, у которых число опор больше двух.

В нашем обзоре мы будем рассматривать и такие фермы; во избежание путаницы мы, однако, будем (следуя [19]) говорить о “фермах арочного типа”.

Однопараметрическая индукция

Рассмотрим некоторые публикации, в которых описанным в предыдущем разделе методом найдены точные аналитические решения задач о прогибе плоских ферм арочного типа. Заметим, что не во всех этих решениях параметр n обязательно (как предполагалось выше) совпадает с общим числом панелей в анализируемой ферме; в каждом конкретном случае мы будем указывать смысл данного параметра. В некоторых случаях мы, чтобы добиться большей унификации, изменяем использованные в оригинальных работах обозначения и при необходимости подвергаем формулы несложным алгебраическим преобразованиям.

В работе [20] получена формула для прогиба Δ в центральном узле трёхшарнирной арочной фермы, которая состоит из двух полуарок – ферм с треугольной решёткой, соединённых шарниром. Через n обозначено число панелей в каждой полуарке; жесткости EF стержней фермы одинаковы. Арочная ферма нагружена распределённой нагрузкой по нижнему поясу; подобная нагрузка здесь и в других работах моделируется равными силами, приложенными к узлам нижнего пояса (рис. 1).

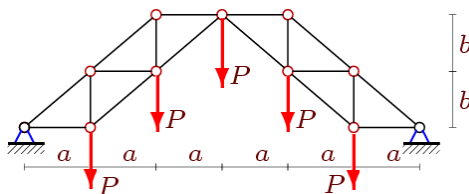


Рис. 1. Арочная ферма [20]: $n = 2$

После расчёта по методу индукции для прогиба получено выражение:

$$\Delta = \frac{P}{EF} (A_n a^3 + B_n b^3 + C_n c^3) / (2nb^2), \quad (1)$$

где $A_n = (n+1)^2/n$, $B_n = 2n+1$, $C_n = (2n+1)(n+1)^2$; $c = \sqrt{a^2+b^2}$.

Особенность задачи – в том, что определитель матрицы G зависит от n , что и привело к появлению n в знаменателях выражений для Δ и A_n (это имело место и в более ранней работе [21], где решалась задача о прогибе данной фермы под действием единственной силы P , приложенной к центральному узлу). В подавляющем большинстве других рассматриваемых здесь решений задач о прогибе ферм зависимость Δ от n является полиномиальной.

При сравнении значений прогиба при разных n автор статьи [20], считая постоянными длину пролёта $L = 2na$ и модуль главного вектора сил нагрузки $P^s = (2n+1)P$, переходит к относительному прогибу $\Delta' = \Delta EF / P^s$ и строит график зависимости Δ' от n . Полученная функция с ростом n сначала убывает, потом возрастает; точное положение точки минимума зависит от значения b .

В работе [19] аналогичная задача решалась для безраспорной арочной фермы несколько иного очертания; n – число панелей в половине пролёта (рис. 2). По-прежнему расстояние между узлами по горизонтали обозначено a , по вертикали – b .

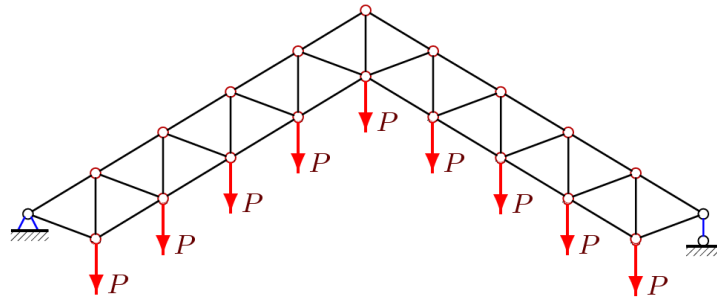


Рис. 2. Безраспорная арочная ферма [19]: $n = 5$

В данном случае для прогиба получено выражение:

$$\Delta = \frac{P}{EF} (A_n b^4 + B_n c b^3 + C_n c^4) / (8bc^2), \quad (2)$$

где $A_n = 16n^3$, $B_n = 8n^2(5n^2+1)/3$, $C_n = 4n^2 - 10n + 11$.

Поведение относительного прогиба Δ' в зависимости от n было в этой задаче примерно таким же, как и в предыдущей задаче.

Автор работы [22] рассматривала безраспорную арочную ферму с треугольной решёткой несколько отличной формы под действием приложенной к центральному узлу силы P (рис. 3). Здесь n – по-прежнему число панелей в каждой полуарке.

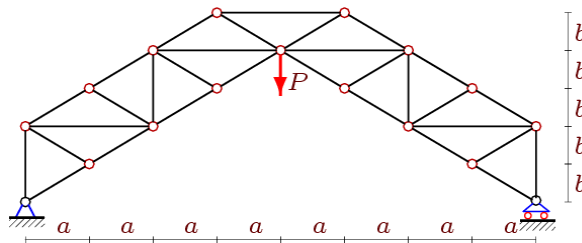


Рис. 3. Ферма [22]: $n = 2$

Найденная по методу индукции формула для Δ сходна с (1):

$$\Delta = \frac{P}{EF} (A_n a^3 + B_n b^3 + C_n c^3) / b^2, \quad (3)$$

но здесь $A_n = n(2n+1)$, $B_n = n$, $C_n = n(2n^2+1)/3$.

Относительный прогиб Δ' ведёт себя при возрастании n так же, как и в обсуждавшихся выше задачах.

Для той же фермы в работе [23] была решена о прогибе центрального узла при равномерном нагружении по верхнему поясу. Вновь решение описывалось формулой (3), но с такими коэффициентами: $A_n = 4n^3$, $B_n = 2n(n+1)$, $C_n = n(20n^3 - 8n^2 - 7n - 7)/12$.

Несколько отличная конструкция безраспорной арочной фермы, равномерно нагруженной по верхнему поясу, была рассмотрена в [24] (рис. 4). Вычисленный для центрального узла фермы прогиб также описывается формулой (3), но теперь $A_n = (3n-2)(4n^2-2n+1)$, $B_n = n(2n+1)$, $C_n = (20n^4 - 40n^3 + 43n^2 - 17n + 6)/12$. Относительный прогиб Δ' с возрастанием n в этой задаче растёт монотонно по кубическому закону.

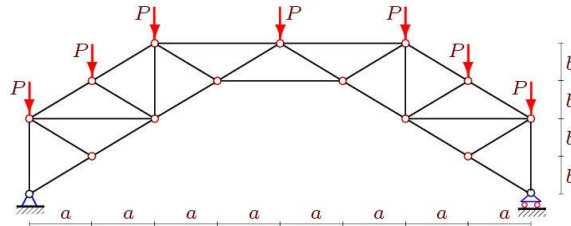


Рис. 4. Ферма [24,25]: $n = 2$

Заметим, что в работе [25] тем же методом для этой фермы была получена формула для горизонтального смещения подвижной опоры фермы. Правая часть данной формулы отличается от (3) лишь знаменателем (который теперь равен ab), а коэффициенты таковы: $A_n = 2(3n-2)(4n^2-2n+1)$, $B_n = 2n(2n+1)$, $C_n = (20n^3 - 24n^2 + 7n + 3)/6n$. Относительное смещение опоры при возрастании n также растёт монотонно по кубическому закону.

В работе [26] для той же фермы была решена задача о прогибе центрального узла при равномерном нагружении по нижнему поясу. Полученная формула совпала с (3), но коэффициенты оказались такими: $A_n = 4n^2(3n-2)$, $B_n = 2n^2$, $C_n = n(20n^3 - 32n^2 + 31n - 7)/12$. Для относительного прогиба Δ' в этом варианте задачи также имел место монотонный рост при увеличении n , но график зависимости имел в начальной части точку перегиба.

Прогиб безраспорной арочной фермы с треугольной решёткой из конгруэнтных прямоугольных треугольников был предметом анализа в работе [27] (рис. 5).

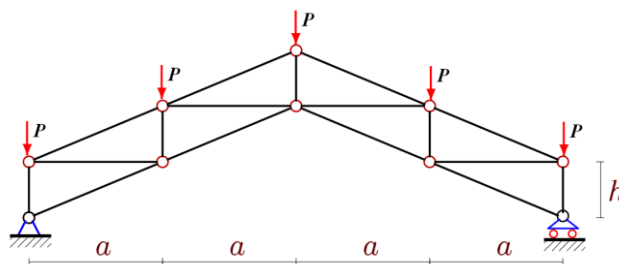


Рис. 5. Ферма [27]: $n = 2$

Методом индукции была получена формула, совпадающая с (2) с точностью до обозначений:

$$\Delta = \frac{P}{EF} (A_n a^3 + B_n h^3 + C_n c^3) / h^2; \quad (4)$$

здесь $A_n = n^2/2$, $B_n = (2n+1)n^2/2$, $C_n = (5n^2+1)n^2/6$; $c = \sqrt{a^2+h^2}$.

Отметим, что в [27] данная формула приведена с двумя опечатками. Правильное выражение дано в работе [28], где указано также, что при возрастании n относительный прогиб

Δ' монотонно растёт по квадратичному закону. В статье [29] для этой же фермы была получена формула для горизонтального смещения подвижной опоры фермы; её анализ выявил монотонный рост относительного смещения опоры при возрастании n .

Вернёмся к работе [28]. В ней анализ изображённой на рис. 5 фермы проводился для сравнения, а основное внимание уделялось анализу безопорной арочной фермы с крестообразной решёткой (рис. 6). Ферма состоит из двух полуарок, соединённых шарниром и горизонтальным стержнем, длина которого определяет подъём фермы.

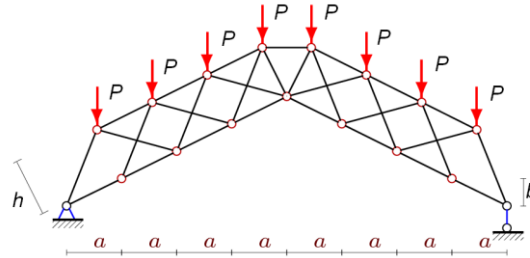


Рис. 6. Ферма № 1 из [28]: $n = 4$

Предполагается, что жёсткости всех стержней нижнего пояса равны EF_1 , стержней верхнего пояса – EF_2 , стержней решётки – EF_3 . В соответствии с этим выражение для прогиба Δ , даваемое формулой Максвелла – Мора, разделяется на три слагаемых, в которые входят усилия соответственно в нижнем и верхнем поясах и в решётке. Методом индукции получен следующий результат:

$$\Delta = \Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3, \quad \Delta_1 = \frac{P}{EF_1} (C_1 a^2 c / h^2 - C_2 ab / h + C_3 b^2 / c),$$

$$\Delta_2 = \frac{2P}{EF_2} (C_4 a^2 c / h^2 - C_5 ab / h + C_6 cb / h - C_3 b^2 / a),$$

$$\Delta_3 = \frac{P}{EF_3} (C_7 a^2 g^3 / c^2 h^2 - C_8 ab / c + C_9 b^2 / h - C_{10} b^3 / ac + C_{11} a^2 h / c^2 + C_{12} b^2 h / c^2),$$

где $c = \sqrt{a^2 + b^2}$, $g = \sqrt{a^2 + h^2}$ – длины стержней в поясах и решётке. Коэффициенты здесь таковы:

$$C_1 = (10n^4 + 8n^3 + 14n^2 - 8n + 3 - 3(6n^2 + 1)(-1)^n) / 48,$$

$$C_2 = (20n^3 + 6n^2 + 16n - 3 + 3(1 - 4n)(-1)^n) / 24, \quad C_3 = n^2,$$

$$C_4 = (10n^4 + 8n^3 + 2n^2 - 8n + 3 + 3(6n^2 - 1)(-1)^n) / 96,$$

$$C_5 = (8n^3 - 6n^2 - 2n + 3 + 3(2n - 1)(-1)^n) / 48, \quad C_6 = n^2(n + 1) / 2,$$

$$C_7 = (6n^2 + 1 - (-1)^n) / 8, \quad C_8 = n^2(3(-1)^n - 1) / 8, \quad C_9 = n^2(n + 1) / 4,$$

$$C_{10} = n^2 / 2, \quad C_{11} = (n - 1)(1 - (-1)^n) / 8, \quad C_{12} = n((-1)^n - 1) / 4.$$

Сложность полученной для прогиба фермы формулы предопределена двумя факторами – зависимостью решения от трёх независимых геометрических параметров (a, b, h) и неодинаковой жёсткостью стержней.

Дальнейший анализ этой формулы выполнялся уже в предположении, что жёсткости всех стержней одинаковы. Оказалось, что (в отличие от фермы, изображённой на рис. 5) относительный прогиб Δ' при возрастании n монотонно убывает, и для большинства значений n ферма, представленная на рис. 6, является более жёсткой.

Задачи с двумя натуральными параметрами

Во всех перечисленных работах регулярно повторяющиеся панели ферм были однотипными. Начиная с 2017 года метод индукции с привлечением системы Maple стали приме-

нять для анализа прогиба таких ферм арочного типа, у которых повторяющиеся панели принадлежат к двум группам. Различия между панелями различных групп могут выражаться как в различных условиях нагружения, так и в геометрии или даже структуре конструктивных ячеек. В результате общее число панелей выражается через два независимых натуральных числовых параметра: m и n .

Начнём с анализа таких работ, в которых после описания конструкции фермы числу m придавалось конкретное значение, после чего индукция велась по параметру n уже рассмотренным способом; полученное решение носило, таким образом, частный характер.

Например, в работе [30] рассмотрена арочная ферма с крестообразной решёткой, нагруженная в центральном узле нижнего пояса силой P . Ферма включает по m панелей в боковых частях и $2n$ панелей в ригеле (рис. 7).

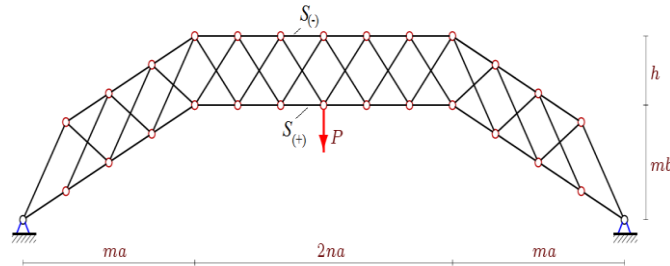


Рис. 7. Ферма [30]: $n = 3, m = 4$

Формулу для прогиба фермы автор работы получил индукцией по параметру n , придав m фиксированное значение: $m = 4$ (предполагалось также, что $h = b$). Она имеет вид:

$$\Delta = \frac{P}{EF} (A_n a^3 + C_n c^3 + U_n u^3) / h^2; \quad (5)$$

здесь

$$A_n = n^3/3 - n^2(5(-1)^n - 1)/8 - (-1)^n n/16 + 35n/48 - 3((-1)^n/2 - 1)/16,$$

$$C_n = n/2 + (-1)^n/4 + 3/4, \quad U_n = (1 - (-1)^n)/16; \quad c = \sqrt{a^2 + b^2}, \quad u = \sqrt{a^2 + 4b^2}.$$

Относительный прогиб Δ' при возрастании n в этой задаче сначала убывает, а затем растёт по линейному закону, обнаруживая небольшие колебания в зависимости от четности-нечётности n .

В работе [31] была исследована раскосная ферма арочного типа с равномерной нагрузкой по верхнему поясу. В верхней части каждой полуарки число панелей равно n , в нижней – m (рис. 8).

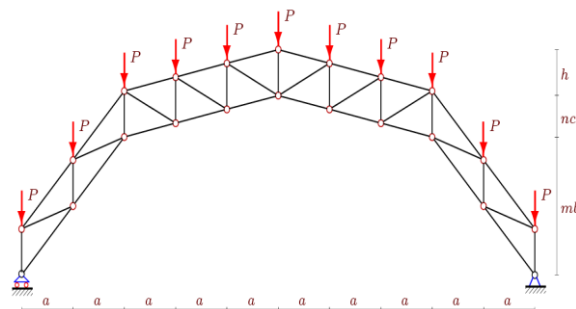


Рис. 8. Ферма [31]: $n = 3, m = 2$

Индукцию по параметру n автор работы провела, ограничившись случаем $m = 2$. В результате была получена следующая формула для прогиба:

$$\Delta = \frac{P}{EF} (A_n h^3 + B_n g^3 + C_n d^3 - D_n h^2 b + R_n h^2 c + Q_n (2hb^2 - 4hbc + v^3) + H_n hc^2 + J_n u^3) / h^2;$$

здесь

$$A_n = 4 + 3n + n^2/2, \quad B_n = n(5n^3 + 40n^2 + 121n + 92)/12, \quad C_n = 7 + 6n, \\ D_n = 3 + 4n, \quad R_n = 1 + 3n, \quad Q_n = 2(n+1), \quad H_n = n^3 + 6n^2 + 16n + 12, \\ J_n = n^2/2; \quad d = \sqrt{a^2 + b^2}, \quad g = \sqrt{a^2 + c^2}, \quad u = \sqrt{a^2 + (h-c)^2}, \quad v = \sqrt{a^2 + (h-b)^2}.$$

В данной задаче относительный прогиб Δ' при возрастании n обнаруживает небольшой участок убывания, а затем растёт монотонно.

Арочная ферма П-образной формы с крестообразной решёткой, нагруженная силой P в центральном узле нижнего пояса, была исследована в [32]. Ферма имеет по m панелей в боковых частях и $2n$ панелей в горизонтальной средней части (рис. 9).

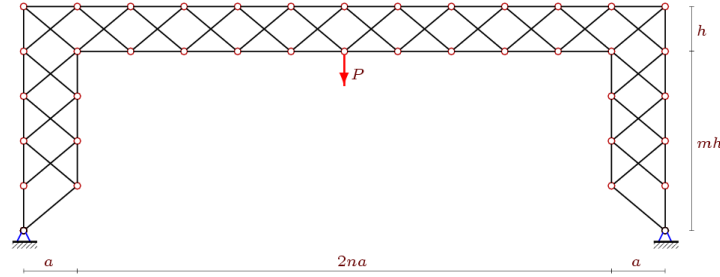


Рис. 9. Ферма [32]: $n = 5, m = 4$

При проведении индукции по n авторы работы ограничились случаем $m = 5$, получив такую формулу для прогиба:

$$\Delta = \frac{P}{EF} (A_n a^3 + C_n c^3 + H_n h^3) / h^2, \quad (6)$$

где

$$A_n = (4n^3 - 15n^2 + 27(-1)^n n^2 + 83n - 69(-1)^n n - 48(-1)^n + 54) / 12, \\ C_n = (n - 10(-1)^n + 11) / 2, \quad H_n = (53 - 43(-1)^n) / 4; \quad c = \sqrt{a^2 + h^2}.$$

В этой задаче относительный прогиб Δ' с ростом n убывает, обнаруживая колебания в зависимости от четности-нечётности n .

В работе [33] рассмотрена внешне статически неопределимая ферма П-образной формы с четырьмя опорами, имеющая по m панелей в боковых частях и $2n$ панелей в ригеле и нагруженная силой P в центральном узле нижнего пояса (рис. 10).

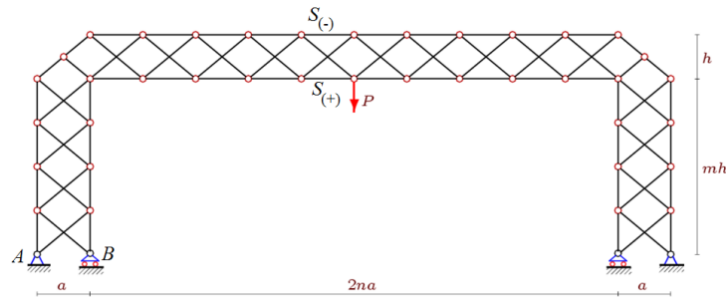


Рис. 10. Ферма [33]: $n = 5, m = 4$

При расчёте прогиба индукцию авторы работы проводили по n , ограничились случаем $m = 4$. Решение вновь выражается формулой (6), но с такими коэффициентами:

$$A_n = (4n^3 + 3n^2(1 - (-1)^n) + n(5 - 3(-1)^n) + 3 - 3(-1)^n) / 12, \\ C_n = (2n + 5 - 5(-1)^n) / 4, \quad H_n = 17 - 15(-1)^n.$$

Здесь относительный прогиб Δ' с ростом n возрастает; колебания в зависимости от четности-нечётности n также имеют место, причём они носят резкий характер.

Безраспорная арочная ферма П-образной формы с крестообразной решёткой, равномерно нагруженная по верхнему поясу, исследована в [34]. У этой фермы в нижнем поясе горизонтальной средней части имеется n панелей (причём n нечётно: $n = 2k - 1$), а в боковых частях – по m панелей (рис. 11).

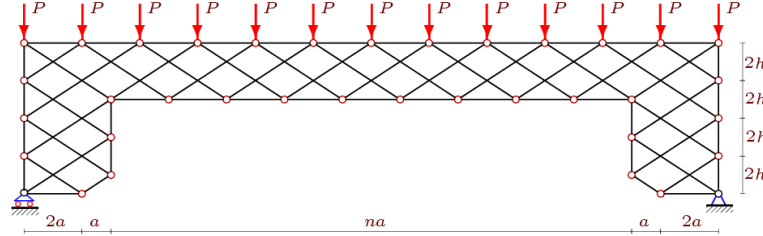


Рис. 11. Ферма [34]: $n = 9$, $m = 4$

При проведении индукции (авторы работы ограничились случаем $m = 4$) было обнаружено, что для ферм с k , кратным 3, определитель матрицы G обращается в нуль, и в этих случаях ферма превращается в кинематически изменяемую систему.

Случаи вырождения матрицы G при некоторых значениях числа панелей имеют место и для ряда других плоских ферм (например, для балочной фермы с ромбической решёткой и дополнительной подвижной опорой в центральном узле нижнего пояса, рассмотренной в статье [16], вырождение наступает при чётном числе панелей, а для решётчатой фермы с n панелями в половине пролёта и шестью опорами, изучавшейся в статье [35], вырождение происходит, если остаток от деления n на 3 равен 0 или 1).

С целью исключить случаи вырождения индукция в [34] велась по параметру j , пробегавшему значения 1, 2, 3, ... и связанному с k формулой $k = (6j - (-1)^j - 3) / 4$. Для прогиба фермы была получена формула, сходная с (6):

$$\Delta = \frac{P}{EF} (A_j a^3 + C_j c^3 + H_j h^3) / h^2, \quad (7)$$

где

$$\begin{aligned} A_j &= 15j^4/8 + 5(1 - (-1)^j)j^3/4 + (63 - 69(-1)^j)j^2/8 + 7(1 - (-1)^j)j + 9(1 - (-1)^j)/16, \\ C_j &= (39 - 36(-1)^j)j^2/4 + (69 - 81(-1)^j)j/4 + 3(1 - (-1)^j)/8, \\ H_j &= 8(3 - 2(-1)^j)j + 8 - 4(-1)^j. \end{aligned}$$

Поведение относительного прогиба Δ' при возрастании k обнаруживает значительные колебания. Фактически точки графика, соответствующие нечётным и чётным значениям j , ложатся на две различные плавные кривые; при этом кривая, отвечающая нечётным j , соответствует монотонной возрастающей функции, а кривая, отвечающая чётным j , располагается выше первой кривой и соответствует такой функции, которая первоначально убывает, а с дальнейшим увеличением j растёт.

В работе [36] выполнен анализ фермы арочного типа с крестообразной решёткой в горизонтальной средней части, содержащей $2n$ панелей, и треугольной решёткой в боковых частях, каждая из которых содержит m панелей. Нижний пояс фермы закреплён на вертикальных вантах, соединяющих его с затяжкой (при расчёте ванты и стержни затяжки моделируются стержнями той же жёсткости, что и стержни в решётках). К затяжке приложена распределённая нагрузка (рис. 12).

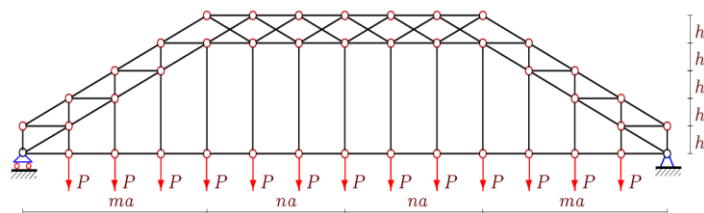


Рис. 12. Ферма [36]: $n = 3, m = 4$

Автор работы провёл индукцию по n , ограничившись сначала случаем $m = 4$. Полученная для прогиба формула совпала с (6); коэффициенты оказались такими:

$$A_n = (120n^4 + (30 - 96(-1)^n)n^3 - (3 - 27(-1)^n)n^2 + (1743 + 513(-1)^n)n + 2196 + 108(-1)^n) / 288,$$

$$C_n = (36n^2 + 9(39 + 5(-1)^n)n + 540 - 108(-1)^n) / 144, \quad H_n = (9(1 - (-1)^n)n + 576) / 144.$$

Относительный прогиб Δ' в этой задаче при увеличении n растёт по линейному закону, обнаруживая небольшие колебания в зависимости от четности-нечётности n .

Был рассмотрен также случай $m = 3$. Результаты оказались аналогичными, а коэффициенты в (6) имели вид:

$$A_n = (30n^4 + (10 - 28(-1)^n)n^3 - (10 - 8(-1)^n)n^2 + (311 + 109(-1)^n)n + 306 + 18(-1)^n) / 72,$$

$$C_n = (18n^2 + 16(8 + (-1)^n)n + 177 + 3(-1)^n) / 72, \quad H_n = (6(1 - (-1)^n)n + 216) / 72.$$

Задача о прогибе безраспорной арочной фермы с раскосной решёткой в горизонтальной средней части, содержащей $2n$ панелей, и треугольной решёткой в боковых частях, каждая из которых содержит m панелей, была рассмотрена в [37]. Ферма нагружена силой P в центральном узле нижнего пояса (рис. 13).

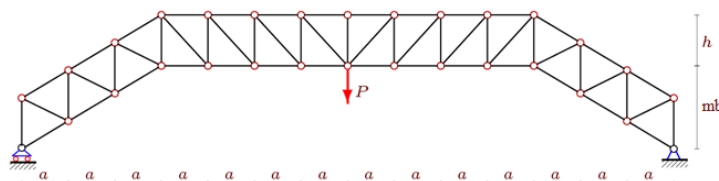


Рис. 13. Ферма [37]: $n = 4, m = 3$

Сначала автор работы провёл индукцию по параметру n , придав m фиксированное значение $m = 3$. Для прогиба в нагруженном узле была получена следующая формула:

$$\Delta = \frac{P}{EF} (A_n a^3 + C_n c^3 + H_n h^3 + G_n g^3 + B) / h^2, \quad (8)$$

где

$$A_n = n(2n^2 + 18n + 55) / 6, \quad C_n = n / 2, \quad H_n = (n + m) / 2, \quad G_n = m / 2,$$

$$B = (9b^2h - 6bh^2 + 19f^3) / 2; \quad c = \sqrt{a^2 + h^2}, \quad f = \sqrt{a^2 + b^2}, \quad g = \sqrt{a^2 + (h - b)^2}.$$

Относительный прогиб Δ' в данной задаче с увеличением n монотонно растёт.

Затем были рассмотрены ещё два случая. При $m = 2$ получились такие коэффициенты:

$$A_n = n(2n^2 + 12n + 25) / 6, \quad C_n = n / 2, \quad H_n = (n + m) / 2,$$

$$G_n = m / 2, \quad B = (4b^2h - 4bh^2 + 6f^3) / 2.$$

В случае $m = 4$ выражения для этих коэффициентов оказались следующими:

$$A_n = n(2n^2 + 24n + 97) / 6, \quad C_n = n / 2, \quad H_n = (n + m) / 2,$$

$$G_n = m / 2, \quad B = (16b^2h - 8bh^2 + 44f^3) / 2.$$

Общего решения для прогиба, справедливого для произвольных m и n , и в этой работе найдено не было.

Двухпараметрическая индукция

Найти общие формулы для прогиба ферм арочного типа в задачах с двумя натуральными параметрами удалось в тех работах (появившихся в том же 2017 году), где была применена двухпараметрическая индукция. Такая индукция включает два этапа. На первом индукцию проводят по одному из параметров при фиксированном значении другого, получая частное решение задачи. Данный этап повторяют несколько раз, последовательно увеличивая значение фиксированного параметра, после чего по серии полученных частных решений выполняют индукцию по этому второму параметру, находя искомое общее решение.

Отметим, что впервые двухпараметрическая индукция такого типа с привлечением системы Maple была применена М.Н. Кирсановым в 2015 году при вычислении одного из коэффициентов формулы для прогиба в центральном узле фермы прямоугольного пространственного покрытия [38].

В работе [39] двухпараметрическая индукция проведена при расчёте безраспорной арочной фермы с треугольной решёткой, имеющей по m панелей в боковых частях и $2n$ панелей в нижнем поясе горизонтальной средней части. Ферма нагружена одной силой P в центральном узле нижнего пояса; прогиб в этом узле и подлежал вычислению (рис. 14).

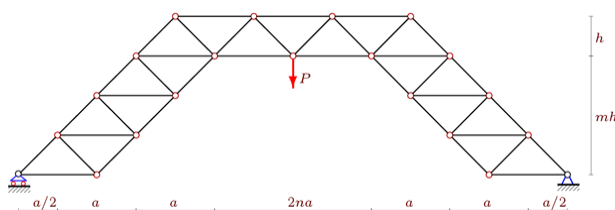


Рис. 14. Ферма [39]: $n = 1$, $m = 3$

При вычислении прогиба первоначально значение m фиксировалось, а индукция проводилась по параметру n . Обобщение полученных частных решений позволило при последующей индукции по m прийти к следующей общей формуле:

$$\Delta = \frac{P}{EF} (A_{mn} a^3 + C_{mn} c^3) / h^2, \quad (9)$$

где

$$A_{mn} = n(16n^2 + 24(m+2)n + 12m^2 + 48m + 50) / 48 + (m^2 + 6m + 6) / 16,$$

$$C_{mn} = n/8 + (m^3 + 6m^2 + 17m + 2) / 96; \quad c = \sqrt{a^2 + h^2}.$$

Относительный прогиб Δ' в данной задаче с увеличением n монотонно убывает.

Аналогичная безраспорная арочная ферма исследована и в [40], но здесь решётка в горизонтальной средней части – крестообразная с центральной стойкой; ферма равномерно нагружена по верхнему поясу (рис. 15).

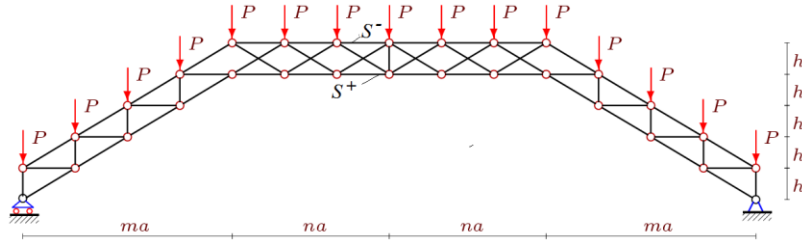


Рис. 15. Ферма [40]: $n = 3, m = 4$

Найденное двухпараметрической индукцией общее решение для прогиба имеет вид:

$$\Delta = \frac{P}{EF} (A_{mn} a^3 + B_{mn} h^3 + C_{mn} c^3) / h^2, \quad (10)$$

где

$$\begin{aligned} A_{mn} &= (5n^4 + 20mn^3 + (54m^2 - 24m + 4)n^2 + 2(12m^3 - 3m^2 - m + 3)n + \\ &\quad + m(2m - 1) + 3(1 - (-1)^n)/2 + 3(-1)^n m) / 12, \\ B_{mn} &= (((2m - 1)((-1)^n - 1) + 4m^2)n + 2m^3 + (-1)^n(m^2 - 1) + 1) / 2, \\ C_{mn} &= ((24m^2 - 24m + 9)n^2 + 2(10m^3 - 3m^2 - 4m + 3)n + \\ &\quad + 5m^4 + m^2 - 3m + 3(1 - (-1)^n)/2 + 3(-1)^n m) / 12. \end{aligned}$$

При увеличении n относительный прогиб Δ' в данной задаче сначала убывает, а затем монотонно растёт по линейному закону. При увеличении же m относительный прогиб растёт по кубическому закону.

Ферма похожего вида (но уже арочная в собственном значении этого слова) была исследована в работе [41]. Первоначально был рассмотрен случай, когда ферма нагружена одной силой P , приложенной в центральном узле нижнего пояса (рис. 16).

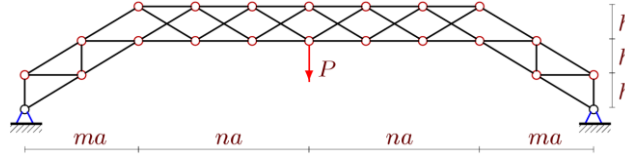


Рис. 16. Ферма [41]: $n = 3, m = 2$

Общее решение для прогиба, найденное двухпараметрической индукцией, в этой задаче также даётся формулой (10), но коэффициенты получились такими:

$$\begin{aligned} A_{mn} &= n^3/3 + (1 - (2m + 1)(-1)^n)n^2/(4m) + (1 + 8m^2/3 - (-1)^n)n/(4m^2) + (1 - (-1)^n)/4, \\ B_{mn} &= (1 - (-1)^n)/(4m), \quad C_{mn} = (6n + (5m^2 + 1)/m + (m^2 - 1)(-1)^n/m) / 12. \end{aligned}$$

Примечательно, что в этой задаче при стремлении n к бесконечности значение относительного прогиба Δ' стремится к конечному пределу; к конечному пределу (уже другому) оно стремится также, если, зафиксировав n , устремить к бесконечности параметр m .

Был рассмотрен также случай, когда данная ферма равномерно нагружена по верхнему поясу; однако в этом случае анализ удалось провести лишь для случая $m = n$. Коэффициенты в формуле (10) при этом оказались следующими:

$$\begin{aligned} A_{mn} &= (10n^5 - 2(3 + 4(-1)^n)n^4 + 2(18 + (-1)^n)n^3 - (9 + 13(-1)^n)n^2 + 4(2 - 5(-1)^n)n + \\ &\quad + 9(1 - (-1)^n)) / (24n), \quad B_{mn} = (1 - (-1)^n)(3n + 1) / (4n), \\ C_{mn} &= -((1 - (-1)^n)n^4 - 4(8 + (-1)^n)n^3 + 10n^2 + 2(1 + 2(-1)^n)n + 2(1 - (-1)^n)) / (24n). \end{aligned}$$

В работе [42] был проведён анализ раскосной фермы арочного типа с равномерной нагрузкой по верхнему поясу. У данной фермы в верхней части каждой полуарки число па-

нелей равно n , в нижней – m . Высота всех стоек фермы одинакова, а уклоны верхних и нижних частей различны (рис. 17).

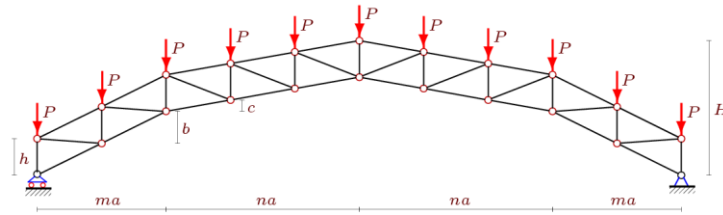


Рис. 17. Ферма [42]: $n = 3, m = 2$

Геометрия панелей этой фермы, как показано на рисунке, определяется 4 параметрами: a, b, c, h . Исследование, однако, проводилось в предположении, что $b = h$ и $c = h/2$.

При помощи двухпараметрической индукции было получено следующее общее решение для прогиба фермы:

$$\Delta = \frac{P}{EF} (A_{mn} a^3 + H_{mn} h^3 + D_{mn} d^3 + G_{mn} g^3) / h^2, \quad (11)$$

где

$$A_{mn} = 4m(2n+m)/8,$$

$$H_{mn} = (2n^3 + 2(3m+2)n^2 + 4(2m^2+1)n + m(3m^2+2m+1))/8,$$

$$D_{mn} = m(4(2m^2+1)n + m(5m^2+1))/12,$$

$$G_{mn} = n(5n^3 + 20mn^2 + (30m^2+7)n + 2m(6m^2-1))/96; \quad d = \sqrt{a^2+h^2}, \quad g = \sqrt{a^2+9h^2}.$$

В случае $m = n$ относительный прогиб Δ' при увеличении n сначала убывает, а затем монотонно растёт.

Арочная ферма с крестообразной решёткой, имеющая по m панелей в боковых частях и $2n$ панелей в ригеле и нагруженная одной силой P в центральном узле нижнего пояса, была рассмотрена в работе [43] (рис. 18).

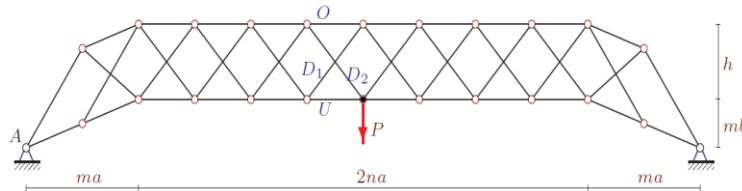


Рис. 18. Ферма [43]: $n = 4, m = 2$

Решение для прогиба фермы удалось получить двухпараметрической индукцией в предположении, что число панелей в половине пролёта является чётным: $n = 2k$. Оно оказалось таким:

$$\Delta = \frac{P}{EF} (A_{mn} a^3 b h + B_{mn} a^3 b^2 + C_{mn} c^3 h^2 + D_{mn} f^3 b^2 + E_{mn} a^3 h^2) / b^2 h^2, \quad (12)$$

где

$$A_{mn} = -2k^2, \quad B_{mn} = k(8k^2+1)/3, \quad C_{mn} = m/2,$$

$$D_{mn} = E_{mn} = k; \quad c = \sqrt{a^2+b^2}, \quad f = \sqrt{a^2+h^2}.$$

Ферма П-образной формы с четырьмя опорами, исследованная в работе [44], статически определима, но относится к числу внешне статически неопределимых систем. Она имеет по m панелей в боковых частях и $2n$ панелей в ригеле; к центральному узлу нижнего пояса приложена сила P (рис. 19).

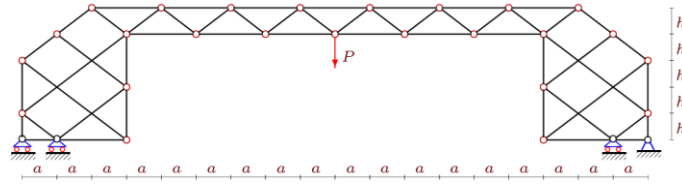


Рис. 19. Ферма [44] (вариант 1): $n = 3, m = 2$

Авторы работы обнаружили, что в случаях, когда остаток от деления m на 3 равен 1, определитель матрицы G обращается в нуль, так что ферма превращается в кинематически изменяемую систему; при этом изменение параметра n здесь (в отличие от ранее обсуждавшейся фермы из статьи [34]) на кинематическую изменяемость не влияет.

При проведении двухпараметрической индукции вместо индукции по m применялась (чтобы исключить случаи вырождения) индукция по параметру k , пробегавшему последовательно значения 1, 2, 3, ... и связанному с m формулой $m = (6k - (-1)^k + 1) / 4$. Для прогиба фермы была получена формула, сходная с (10):

$$\Delta = \frac{P}{EF} (A_{mn} a^3 + B_{mn} h^3 + C_{mn} c^3) / h^2, \quad (13)$$

где

$$A_{mn} = (8n^3 + 24n^2 + 25n + 9) / 3, \quad B_{mn} = (5 + 14k - 5(-1)^k) / 4, \\ C_{mn} = (2n + 3 - (-1)^k + 6k) / 2; \quad c = \sqrt{a^2 + h^2}.$$

В работе [44] был также рассмотрен другой вариант конструкции этой фермы, отличающийся изменением положения двух опор (рис. 20).

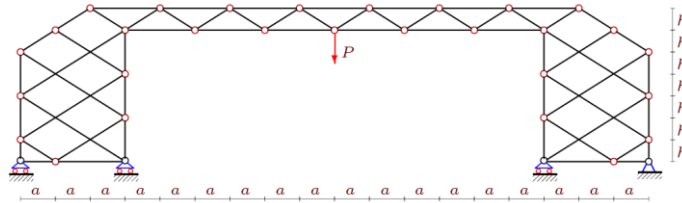


Рис. 20. Ферма [44] (вариант 2): $n = 3, m = 3$

Для этого варианта исчезают случаи кинематической изменяемости, а выражения для коэффициентов становятся такими:

$$A_{mn} = (8n^2 + 1)n / 3, \quad B_{mn} = m, \quad C_{mn} = n. \quad (14)$$

Вернувшись к варианту 1 фермы, авторы работы рассмотрели ещё случай, когда ферма равномерно нагружена по нижнему поясу ригеля. Коэффициенты в (13) приняли вид

$$A_{mn} = (10n^4 + 40n^3 + 35n^2 - 10n - 9) / 3, \\ B_{mn} = (5(2n - 1)(1 - (-1)^k) + 14k(2n - 1)) / 4, \\ C_{mn} = n^2 + (2m + 1)(2n - 1).$$

Сходная с изображённой на рис. 20 ферма, но отличающаяся иной геометрией решётки, была рассмотрена в работе [45] (рис. 21).

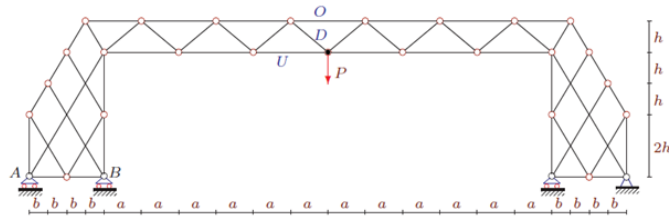


Рис. 21. Ферма [45] (вариант 1): $n = 3, m = 2$

Проведя двухпараметрическую индукцию для случая, когда ферма нагружена силой P в центральном узле нижнего пояса, автор работы установила, что для прогиба фермы также справедлива формула (13) с выражениями (14) для её коэффициентов.

Если же данная ферма равномерно нагружена по нижнему поясу ригеля, то коэффициенты в (13) оказываются такими:

$$A_{mn} = (10n^2 - 1)n^2/3, \quad B_{mn} = m(2n - 1), \quad C_{mn} = n^2.$$

В случае, когда распределённая нагрузка приложена ко всему верхнему поясу фермы (рис. 22), прогиб последней описывается уже формулой

$$\Delta = \frac{P}{EF} (A_{mn} a^3 + B_{mn} h^3 + C_{mn} c^3 + D_{mn} ba^2) / h^2, \quad (15)$$

где

$$A_{mn} = 2n^2(5n^2 + 1)/3, \quad B_{mn} = (-1 + 4(n + 2)m + (2m - 3) \cos 2\varphi - 4(\sin \varphi - \cos \varphi))/2, \\ C_{mn} = n^2, \quad D_{mn} = -8n^2(1 + (-1)^m); \quad \varphi = \pi m/2.$$

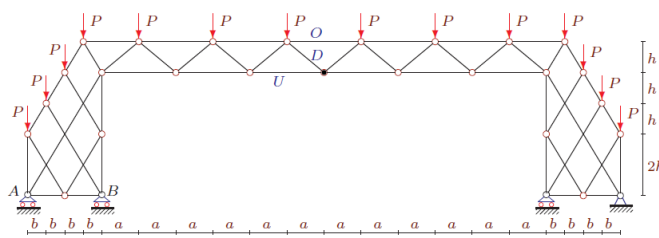


Рис. 22. Ферма [45] (вариант 2): $n = 3, m = 2$

Если же такая нагрузка приложена лишь к верхнему поясу ригеля, то коэффициенты в формуле (15) принимают вид

$$A_{mn} = 2n^2(5n^2 + 1)/3, \quad B_{mn} = 2(n + 1)m, \quad C_{mn} = n^2, \quad D_{mn} = -2n^2.$$

Заключение

В статье сделан обзор большого числа публикаций, авторы которых, используя метод индукции с привлечением системы компьютерной математики Maple, получили точные аналитические решения разнообразных задач о прогибе плоских ферм арочного типа. Собраны воедино основные результаты этих исследований, разбросанные по многочисленным изданиям, и для облегчения сопоставлений представлены в унифицированном виде.

Надо отметить, что получение общего решения таких задач для произвольного числа панелей в ферме, как правило, весьма трудоёмко, поскольку оно всякий раз предполагает решение в аналитическом режиме нескольких систем уравнений достаточно высокой размерности. Особенно это характерно для задач, решение которых зависит от двух натуральных параметров и требует проведения двухпараметрической индукции: здесь компьютер нередко работает “на пределе” своих возможностей. Эти трудности, однако, искупаются удобством работы с полученными в итоге формулами, а проверка результатов аналитического

исследования и дальнейший расчёт характеристик анализируемой конкретной системы (выполняемые уже в численном режиме системы Maple, который намного быстрее) не представляет особых трудностей и для ферм с несколькими десятками панелей (что типично для реальных задач).

Применение точных аналитических формул весьма эффективно, в частности, для большепролётных арочных конструкций, прямой численный расчёт которых связан с неизбежными погрешностями (появление последних связано, например, с приближённым характером применяемых методов, накоплением ошибок округления или плохой обусловленностью решаемых задач большой размерности).

Библиографический список

1. Кийко Л.К. Аналитическая оценка прогиба арочной фермы под действием ветровой нагрузки // Научный вестник. 2016. № 1 (7). С. 247–254. DOI: 10.17117/nv.2016.01.247
2. Тиньков Д.В. Анализ точных решений прогиба регулярных шарнирно-стержневых конструкций // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2015. № 6. С. 21–28.
3. Кривошапко С.Н., Галишникова В.В. Архитектурно-строительные конструкции. М.: Юрайт, 2015. 476 с. ISBN 978-5-9916-4821-9.
4. Шапошников Н.Н., Кристалинский Р.Е., Дарков А.В. Строительная механика. 13-е изд. СПб.: Лань, 2017. 692 с. ISBN 978-5-8114-0576-3.
5. Proske D., Lieberwirth P., van Gelder P. Sicherheitsbeurteilung historischer Steinbogenbrücken. Dresden: Dirk Proske Verlag, 2006. 310 S. ISBN 978-3-00-018131-3.
6. Юнусов А.С. Арочные конструкции, востребованные временем, в строительной науке и архитектуре // Инженерный вестник Дона. 2016. Т. 40, № 1 (40). Ст. 44 (15 с.)
URL: http://ivdon.ru/uploads/article/pdf/IVD_27_Ayrat_Yunusov.pdf_09178f652b.pdf
7. Knapp R.G. Chinese Bridges: Living Architecture from China's Past. Singapore: Tuttle Publishing, 2008. 272 p. ISBN 978-0-8048-3884-9.
8. Саламахин П.М., Попов В.И. Автодорожные и городские мосты в России. М.: МАДИ, 2017. 124 с.
9. Xiang Zhongfu, Xu Wei, Wang Cunshu, Dong Ying. The construction technology of Chongqing Chaotianmen Bridge // Proceedings of the 6th International Conference on Arch Bridges – ARCH'10 (Fuzhou, October 11-13, 2010) / Ed. by Chen Baochun, Wei Jianguang. Fuzhou: Fuzhou University, 2010. P. 788–796.
10. Chen Wai-Fah, Duan Lian. Handbook of International Bridge Engineering. Boca Raton: CRC Press, 2013. 1394 p. ISBN 978-1-4398-1029-3.
11. Яшнов А.Н., Поляков С.Ю. Организация научно-инженерного сопровождения строительства внеклассного моста // Транспорт. Транспортные сооружения. Экология. 2015. № 1. С. 148–160.
12. Герцен А.А. Анализ технических проблем возведения Крымского моста // Молодёжь и научно-технический прогресс: Сборник докладов X Международной научно-практической конференции студентов, аспирантов и молодых учёных (Губкин, 20 апреля 2017 г.). Т. 4. Белгород: ООО «Ассистент плюс», 2017. С. 47–50.
13. Воробьёва А.Е., Игнатова А.В. Применение систем с повышенным демпфированием при строительстве Крымского моста через Керченский пролив // VII Всероссийский фестиваль науки: Сборник докладов (Нижний Новгород, 4–5 октября 2017 г.). Т. 1. Н. Новгород: Нижегородский гос. арх.-строит. ун-т, 2017. С. 336–339.

14. Кирсанов М.Н. Индуктивный анализ влияния погрешности монтажа на жёсткость и прочность плоской фермы // Инженерно-строительный журнал. 2012. Т. 31, № 5. С. 38–42. DOI: 10.5862/MCE.31.5
15. Гриднев С.Ю., Кирсанов М.Н., Овчинников И.Г. Статический расчёт двухраскосной балочной фермы // Интернет-журнал «Науковедение». 2016. Т. 8, № 6 (37). Ст. 99 (8 с.) URL: <http://naukovedenie.ru/PDF/99TVN616.pdf>
16. Осадченко Н.В. Расчёт прогиба плоской неразрезной статически определимой фермы с двумя пролётами // Постулат. 2017. № 12. Ст. 28 (9 с.) URL: <http://e-postulat.ru/index.php/Postulat/article/view/958/984>
17. Резниченко А.Ю., Эйрих Н.В. Вычисление монтажных напряжений в стержневых системах методом конечных элементов в системе Maple // Вестник Приамурского гос. ун-та им. Шолом-Алейхема. 2017. № 1 (26). С. 63–70.
18. Ибрагимов А.М., Кукушкин И.С. Сравнительный анализ вариантов конструктивных решений пологих арочных покрытий зданий // Вестник МГСУ. 2014. № 3. С. 59–66.
19. Кирсанов М.Н. Аналитическое исследование деформаций плоской фермы арочного типа // Вестник государственного университета морского и речного флота им. адмирала С.О. Макарова. 2015. № 3 (31). С. 42–48. DOI: 10.21821/2309-5180-2015-7-3-42-48
20. Малянов И.Ю. Формула для прогиба арочной фермы под действием равномерной нагрузки по нижнему поясу // Вопросы образования и науки: теоретический и методический аспекты. Сборник научных трудов по материалам Международной научно-практической конференции (Тамбов, 30 июня 2015 г.). Том 1. Тамбов: ООО «Консалтинговая компания Юком», 2015. С. 129–131.
21. Сайпулаев Г.Р. Расчёт регулярных стержневых систем на примере арочной фермы // Актуальные вопросы образования и науки: сборник научных трудов по материалам Международной научно-практической конференции (Тамбов, 30 сентября 2014 г.). Часть 4. Тамбов: ООО «Консалтинговая компания Юком». 2014. С. 128–130.
22. Bolotina T.D. The deflection of the flat arch truss with a triangular lattice depending on the number of panels // Bulletin of Scientific Conferences, 2016, no. 4-3 (8). P. 7–8.
23. Сметанин Д.А. Анализ решения задачи о прогибе арочной фермы, нагруженной по верхнему поясу // Вестник научных конференций. 2015. № 4-1 (4). С. 152–153.
24. Бирбасов А.А. Аналитический расчёт прогиба плоской арочной фермы, нагруженной по верхнему поясу // Научный альманах. 2016. № 6-2 (19). С. 198–201. DOI: 10.17117/na.2016.06.02.198
25. Макаров М.Д. Анализ смещения опоры плоской упругой арочной фермы, нагруженной по верхнему поясу // Научный альманах. 2016. № 6-2 (19). С. 257–259. DOI: 10.17117/na.2016.06.02.257
26. Трунов П.В. Аналитический расчёт прогиба симметричной арочной фермы, нагруженной по нижнему поясу // Вестник научных конференций. 2015. № 2-3 (2). С. 142–143.
27. Рябцев А.М. Прогиб безраспорной арочной фермы под действием равномерной нагрузки по верхнему поясу // Актуальные вопросы в научной работе и образовательной деятельности: сборник научных трудов по материалам Международной научно-практической конференции (Тамбов, 30 мая 2015 г.). Том 10. Тамбов: ООО «Консалтинговая компания Юком», 2015. С. 107–109.
28. Кирсанов М.Н. Сравнительный анализ жёсткости двух схем арочной фермы // Строительство уникальных зданий и сооружений. 2015. № 9 (36). С. 44–55.
29. Поляков В.К. Формула для горизонтального смещения опоры безраспорной арочной фермы под действием равномерной нагрузки по верхнему поясу // Актуальные вопросы в научной работе и образовательной деятельности: сборник научных трудов по материалам Международной научно-практической конференции (Тамбов, 30 мая 2015 г.). Том 10. Тамбов: ООО «Консалтинговая компания Юком», 2015. С. 98–99.

30. Астахов С.В. Вывод формулы для прогиба внешне статически неопределимой плоской фермы под действием нагрузки в середине пролёта // *Строительство и архитектура*. 2017. Т. 5, № 2. С. 50–54. DOI: 10.12737/article_596f6d7da0eb38.03494133
31. Савиных А.С. Анализ прогиба арочной раскосой фермы, нагруженной по верхнему поясу // *Строительство и архитектура*. 2017. Т. 5, № 3. С. 159–161. DOI: 10.12737/article_59cd03d2d376e2.79712636
32. Белянкин Н.А., Бойко А.Ю., Кирсанов М.Н. Индуктивный вывод прогиба стержневой ограждающей конструкции в системе Maple // *Научный альманах*. 2017. № 4-3 (30). С. 194–197. DOI: 10.17117/na.2017.04.03.194
33. Горбунова А.С., Кирсанов М.Н., Лепетюха В.А. Индуктивный вывод формулы для деформации плоской стержневой модели покрытия промышленного здания // *Моделирование и механика конструкций*. 2017. № 5. Ст. 6 (7 с.)
URL: http://mechanics.pguas.ru/Plone/nomerazhurnal/no5/stroitelnyamehanika/5.6/at_download/file
34. Кирсанов М.Н., Орлов И.В. Математическая модель упругой работы стержневой конструкции покрытия промышленного здания // *Моделирование и механика конструкций*. 2017. № 5. Ст. 1 (10 с.)
URL: http://mechanics.pguas.ru/Plone/nomera-zhurnal/no5/matematicheskoe-modelirovanie-chislennye-metody-i-kompleksy-programm/5.1/at_download/file
35. Кирсанов М.Н. Формула для прогиба и анализ кинематической изменчивости решётчатой фермы // *Строительная механика и конструкции*. 2017. Т. 2, № 15. С. 5–10.
36. Кирсанов М.Н. Аналитический расчёт деформаций и усилий в плоской вантовой ферме // *Механизация строительства*. 2018. № 1. С. 29–33.
37. Широков А.С. Индуктивный вывод зависимости прогиба и смещения опоры арочной фермы от числа панелей в системе Maple // *Международный научный семинар “Нелинейные модели в механике, статистике, теории поля и космологии – GRACOS-17”* (Казань, 4–6 ноября 2017 г.): Сборник трудов / Под ред. Ю.Г. Игнатьева. Казань: Академия наук Республики Татарстан, 2017. С. 267–272.
38. Кирсанов М.Н. Анализ прогиба фермы прямоугольного пространственного покрытия // *Инженерно-строительный журнал*. 2015. № 1 (53). С. 32–38. DOI: 10.5862/MCE.53.4
39. Кирсанов М.Н., Лафицкова М.Г., Никитина А.С. Индуктивный вывод зависимости прогиба арочной фермы от числа панелей // *Научный альманах*. 2017. № 4-3 (30). С. 205–208. DOI: 10.17117/na.2017.04.03.205
40. Кирсанов М.Н., Степанов А.С. О зависимости деформаций плоской арочной фермы от числа панелей // *Строительная механика и расчёт сооружений*. 2017. № 5 (274). С. 9–14.
41. Кирсанов М.Н. Анализ прогиба арочной фермы // *Строительная механика инженерных конструкций и сооружений*. 2017. № 5. С. 50–55. DOI: 10.22363/1815-5235-5-50-55
42. Кирсанов М.Н. Аналитическая оценка прогиба и усилий в критических стержнях арочной фермы // *Транспортное строительство*. 2017. № 9. С. 8–10.
43. Тиньков Д.В. Расчёт прогиба плоской арочной фермы с крестообразной решёткой // *Постулат*. 2017. № 12. Ст. 74 (6 с.)
URL: <http://e-postulat.ru/index.php/Postulat/article/view/1004/1030>
44. Kirsanov M.N., Orlov I.V. The dependence of the deflection of the rod of a statically exterior indeterminate truss on the number of panels // *Постулат*. 2017. № 12. Ст. 75 (10 с.)
URL: <http://e-postulat.ru/index.php/Postulat/article/view/1005/1031>
45. Грибова О.В. Расчёт прогиба плоской внешне статически неопределимой стержневой рамы // *Постулат*. 2017. № 12. Ст. 116 (8 с.)
URL: <http://e-postulat.ru/index.php/Postulat/article/view/1046/1073>

References

1. Kiyko L.K. Analytical evaluation of deflection of arched trusses under the action of wind loads, *Nauchnyj vestnik* [Science Bulletin], 2016, no. 1 (7), pp. 247–254 (in Russ.). doi: 10.17117/nv.2016.01.247
2. Tin'kov D.V. The analysis of nice calculations for displacements of regular joint-and-rod structures, *Stroitel'naya mekhanika inzhenernykh konstrukcij i sooruzhenij* [Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings], 2015, no. 6, pp. 21–28 (in Russ.).
3. Krivoschapko S.N., Galishnikova V.V. *Arkhitekturno-stroitel'nye konstrukcii* [Architectural and building structures], Moscow: Publishing Urait, 2015, 476 p. ISBN 978-5-9916-4821-9.
4. Shaposhnikov N.N., Kristalinskii R.E., Darkov A.V. *Stroitel'naya mekhanika. 13-e izd.* [Structural Mechanics. 13th edition], St. Petersburg: Lan Publishing House, 2017. 692 p. ISBN 978-5-8114-0576-3.
5. Proske D., Lieberwirth P., van Gelder P. *Sicherheitsbeurteilung historischer Steinbogenbrücken* [Safety assessment of historical stone arch bridges], Dresden: Dirk Proske Verlag, 2006. 310 S. ISBN 978-3-00-018131-3.
6. Yunusov A.S. Arch designs demanded by the time in building sciences and architecture, *Inzhenernyj vestnik Dona* [Engineering journal of Don], 2016, vol. 40, no. 1 (40). Article 44 (15 p.) (in Russ.).
URL: http://ivdon.ru/uploads/article/pdf/IVD_27_Ayrat_Yunusov.pdf_09178f652b.pdf
7. Knapp R.G. *Chinese Bridges: Living Architecture from China's Past*, Singapore: Tuttle Publishing, 2008. 272 p. ISBN 978-0-8048-3884-9.
8. Salamakhin P.M., Popov V.I. *Avtodorozhnye i stroitel'nye mosty v Rossii* [Road and city bridges in Russia], Moscow: Moscow state automobile and road techn. univ. (MADI), 2017. 124 p.
9. Xiang Zhongfu, Xu Wei, Wang Cunshu, Dong Ying. The construction technology of Chongqing Chaotianmen Bridge, in *Proceedings of the 6th International Conference on Arch Bridges – ARCH'10 (Fuzhou, October 11-13, 2010) / Ed. by Chen Baochun, Wei Jianguang*, Fuzhou: Fuzhou University, 2010. Pp. 788–796.
10. Chen Wai-Fah, Duan Lian. *Handbook of International Bridge Engineering*, Boca Raton: CRC Press, 2013. 1394 p. ISBN 978-1-4398-1029-3.
11. Iashnov A.N., Poliakov S.Iu. Organization of scientific and engineering support of construction the extracurricular bridge, *Transport. Transportnye sooruzheniya. Ekologiya* [Transport. Transport Facilities. Ecology], 2015, no. 1, pp. 148–160 (in Russ.).
12. Herzen A.A. Analysis of technical problems of the Crimean bridge construction, in *Youth and scientific and technical progress: Collected papers of the X International scientific and practical conference of students, postgraduates and young scientists (Gubkin, April 20, 2017). Vol. 4*, Belgorod: LLC “Assistant plus”, 2017. Pp. 47–50 (in Russ.).
13. Vorob'yova A.E., Ignatova A.V. Application of systems with increased damping during the construction of the Crimean bridge across the Kerch Strait, in *VII All-Russian festival of science: Collected papers (Nizhny Novgorod, 4–5 October 2017). Vol. 1*, Nizhny Novgorod: The Nizhny Novgorod state architect.-builds. univ., 2017. Pp. 336–339 (in Russ.).
14. Kirsanov M.N. Inductive analysis of the effect of mounting error on the stiffness and strength of a flat truss, *Inzhenerno-stroitel'nyj zhurnal* [Magazine of Civil Engineering], 2012, vol. 31, no. 5, pp. 38–42 (in Russ.). doi: 10.5862/MCE.31.5
15. Gridnev S.Yu., Kirsanov M.N., Ovchinnikov I.G. Static calculation of the two-brace trussed joist, *Internet-zhurnal "Naukovedenie"* [Scientific open access journal “Naukovedenie”], 2016, vol. 8, no. 6 (37). Article 99 (8 p.) (in Russ.).
URL: <http://naukovedenie.ru/PDF/99TVN616.pdf>

16. Osadchenko N.V. Calculation of the deflection of a flat, statically determinate continuous truss with two spans, *Postulat* [Postulate], 2017, no. 12. Article 28 (9 p.) (in Russ.).
URL: <http://e-postulat.ru/index.php/Postulat/article/view/958/984>
17. Reznichenko A.Yu., Eyrikh N.V. Calculation of mounting stresses in rod systems by the method of finite elements in the Maple system, *Vestnik Priamurskogo gos. un-ta im. Sholom-Aleikhema* [Herald of Sholom-Aleichem Priamursky state univ.], 2017, no. 1 (26), pp. 63–70 (in Russ.).
18. Ibragimov A.M., Kukushkin I.S. Comparative analysis of the construction solution variants for flat arch coverings of buildings, *Vestnik MGSU* [Proceedings of Moscow State University of Civil Engineering], 2014, no. 3, pp. 59–66 (in Russ.).
19. Kirsanov M.N. Analytical study of deformations of a flat truss arch type, *Vestnik gos. un-ta morskogo i rechnogo flota im. admirala S.O.Makarova* [Bulletin of Admiral S.O. Makarov State Univ. of the Marine and River Fleet], 2015, no. 3 (31), pp. 42–48 (in Russ.). doi: 10.21821/2309-5180-2015-7-3-42-48
20. Malyanov I.Yu. The formula for deflection of the arch truss under the action of a uniform load along the lower belt, in *Issues of education and science: theoretical and methodical aspects. Collection of scientific papers on the materials of the International scientific and practical conference (Tambov, June 30, 2015). Volume 1*, Tambov: LLC “Consulting company Ucom”, 2015. Pp. 129–131 (in Russ.).
21. Sajpulaev G.R. Calculation of regular rod systems for the arch truss, in *Actual issues of education and science: a collection of scientific papers on the materials of the International scientific and practical conference (Tambov, September 30, 2014). Part 4*, Tambov: LLC “Consulting company Ucom”, 2014. Pp. 128–130 (in Russ.).
22. Bolotina T.D. The deflection of the flat arch truss with a triangular lattice depending on the number of panels // *Bulletin of Scientific Conferences*, 2016, no. 4-3 (8), pp. 7–8.
23. Smetanin D.A. Analysis of the solution of the problem of the deflection of the arch truss loaded on the upper belt, *Vestnik nauchnykh konferencij* [Bulletin of Scientific Conferences], 2015, no. 4-1 (3), pp. 152–153 (in Russ.).
24. Birbasov A.A. Analytical calculation of the deflection of flat arched truss, loaded on the upper belt, *Nauchnyj al'manakh* [Science Almanac], 2016, no. 6-2 (19), pp. 198–201 (in Russ.). doi: 10.17117/na.2016.06.02.198
25. Makarov M.D. Analysis of displacement support plane elastic arch truss loaded at the upper belt, *Nauchnyj al'manakh* [Science Almanac], 2016, no. 6-2 (19), pp. 257–259 (in Russ.). doi: 10.17117/na.2016.06.02.257
26. Trunov P.V. Analytical calculation of the deflection of a symmetrical arch truss loaded on the lower belt, *Vestnik nauchnykh konferencij* [Bulletin of Scientific Conferences], 2015, no. 2-3 (2), pp. 142–143 (in Russ.).
27. Ryabcev A.M. The deflection of the arched girder without horizontal thrust under the action of a uniform load along the upper belt, in *Actual issues in scientific work and educational activities: a collection of scientific papers on the materials of the International scientific and practical conference (Tambov, May 30, 2015). Vol. 10*, Tambov: LLC “Consulting company Ucom”, 2015. Pp. 107–109 (in Russ.).
28. Kirsanov M.N. A comparative stiffness analysis of two schemes arched truss, *Stroitel'stvo inikal'nykh zdaniy i sooruzhenij* [Construction of Unique Buildings and Structures], 2015, no. 9 (36), pp. 44–55 (in Russ.).
29. Polyakov V.K. The formula for horizontal displacement of the support of the arched girder without horizontal thrust under the action of a uniform load along the upper belt, in *Actual issues in scientific work and educational activities: a collection of scientific papers on the materials of the International scientific and practical conference (Tambov, May 30, 2015). Vol. 10*, Tambov: LLC “Consulting company Ucom”, 2015. Pp. 98–99 (in Russ.).
30. Astakhov S.V. The derivation of formula for deflection of statically indeterminate externally flat truss under load at midspan, *Stroitel'stvo i arkhitektura* [Construction and Architecture], 2017, vol. 5, no. 2, pp. 50–54 (in Russ.). doi: 10.12737/article_596f6d7da0eb38.03494133

31. Savinykh A.S. Analysis of deflection of the arch truss loaded at the upper belt, *Stroitel'stvo i arkhitektura* [Construction and Architecture], 2017, vol. 5, no. 3, pp. 159–161 (in Russ.). doi: 10.12737/article_59cd03d2d376e2.79712636
32. Belyankin N.A., Boyko A.Yu., Kirsanov M.N. Inductive derivation of rod cladding structures deflection in the system Maple, *Nauchnyj al'manakh* [Science Almanac], 2017, no. 4-3 (30), pp. 194–197 (in Russ.). doi: 10.17117/na.2017.04.03.194
33. Gorbunova A.S., Kirsanov M.N., Lepetyukha V.A. Inductive derivation of formula for deformations of flat rod model coating industrial building, *Modelirovanie i mekhanika konstrukcij* [Modeling and Mechanics of Structures], 2017, no. 5. Article 6 (7 p.) (in Russ.). URL: http://mechanics.pguas.ru/Plone/nomera-zhurnala/no5/stroitel'naya-mehanika/5.6/at_download/file
34. Kirsanov M.N., Orlov I.V. A mathematical model of the elastic behavior of the rod coating construction of industrial building, *Modelirovanie i mekhanika konstrukcij* [Modeling and Mechanics of Structures], 2017, no. 5. Article 1 (10 p.) (in Russ.). URL: http://mechanics.pguas.ru/Plone/nomera-zhurnala/no5/matematiceskoe-modelirovanie-chislennye-metody-i-kompleksy-programm/5.1/at_download/file
35. Kirsanov M.N. The formula for the deflection and analysis of kinematic variability of the lattice truss, *Stroitel'naya mekhanika i konstrukcii* [Structural Mechanics and Structures], 2017, Vol. 2, no. 15, pp. 5–10 (in Russ.).
36. Kirsanov M.N. Analytical calculation of strain and forces in the flat cable truss // *Mekhanizaciya stroitel'stva* [Mechanization of Construction], 2018, no. 1, pp. 29–33 (in Russ.).
37. Shirokov A.S. Inductive evaluation of dependence of deflection and shifting of support in arch truss from the number of panels in the Maple system, in *International science seminar "Non-linear models in the mechanics, statistics, theory field and cosmology" – GRACOS-17" (Kazan, 4–6 November 2017: Collected papers) / Ed. by Yu.G. Ignat'ev, Kazan: Academy of Sciences of the Republic of Tatarstan, 2017. Pp. 267–272 (in Russ.).*
38. Kirsanov M.N. Deflection analysis of rectangular spatial coverage truss, *Inzhenerno-stroitel'nyj zhurnal* [Magazine of Civil Engineering], 2015, no. 1 (53), pp. 32–38 (in Russ.). doi: 10.5862/MCE.53.4
39. Kirsanov M.N., Lafickova M.G., Nikitina A.S. An inductive derivation of the dependence of the arched truss deflection on the number of panels, *Nauchnyj al'manakh* [Science Almanac], 2017, no. 4-3 (30), pp. 205–208 (in Russ.). doi: 10.17117/na.2017.04.03.205
40. Kirsanov M.N., Stepanov A.S. On the dependence of the deformations of a flat arch truss on the number of panels, *Stroitel'naya mekhanika i raschyot sooruzhenij* [Structural Mechanics and Analysis of Constructions], 2017, no. 5 (274), pp. 9–14 (in Russ.).
41. Kirsanov M.N. Analysis of the deflection of the arched truss, *Stroitel'naya mekhanika inzhenernykh konstrukcij i sooruzhenij* [Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings], 2017, no. 5, pp. 50–55 (in Russ.). doi: 10.22363/1815-5235-5-50-55
42. Kirsanov M.N. Analytical evaluation of deflection and forces in critical rods in arched truss, *Transportnoe stroitel'stvo* [Transport Construction], 2017, no. 9, pp. 8–10 (in Russ.).
43. Tin'kov D.V. Calculation of the deflection of a flat arched truss with a cross-shaped grid, *Postulat* [Postulate], 2017, no. 12. Article 74 (6 p.) (in Russ.). URL: <http://e-postulat.ru/index.php/Postulat/article/view/1004/1030>
44. Kirsanov M.N., Orlov I.V. The dependence of the deflection of the rod of a statically exterior indeterminate truss on the number of panels, *Postulat* [Postulate], 2017, no. 12. Article 75 (10 p.). URL: <http://e-postulat.ru/index.php/Postulat/article/view/1005/1031>
45. Gribova O.V. Calculation of the deflection of flat externally statically indefinable core frame, *Postulat* [Postulate], 2017, no. 12. Article 116 (8 p.) (in Russ.). URL: <http://e-postulat.ru/index.php/Postulat/article/view/1046/1073>