

$СПН = A_1^{(2)}$; при этом в отсутствие возмущений путевой структуры и в предположении, что все корректирующие фильтры одинаковы, система (7) распадается на отдельные независимые уравнения по каждой координате y_1, y_2, \dots, y_6 . Аналогичного расщепления при $\Pi = E$ можно добиться путем установки датчика зазора в определенной точке звена [4].

ЛИТЕРАТУРА

1. Байбаков С.И., Рабинович В.И., Соколов Ю.Д. Динамика подвижного состава транспорта на магнитной подвеске. - Изв. АН СССР. Энергетика и транспорт, 1981, №1, с.92-100.
 2. Новожилов И.В. Разделение движений в задаче о поезде в магнитном подвесе. - Тр./Моск.энерг.ин-т, 1982, вып.573, с.3-8.
 3. Васильева А.Б., Бутузов В.Ф. Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений. - М.: Наука, 1973. - 272 с.
 4. Вагрянцев В.И., Неварко В.С., Рабинович В.И. Математическая модель вагона с электромагнитной подвеской. - Изв. АН СССР. Энергетика и транспорт, 1981, №1, с.101-107.

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ С ПРЕРЫВИСТЫМ ДВИЖЕНИЕМ

Асп. Н.В.ОСАДЧЕНКО (Моск.гос.ун-т)

В работах [1-3] предложен подход к численному моделированию на ЭВМ движения многозвенных механических систем, основанный на погружении фазового пространства M_Σ механической системы Σ в более широкое многообразие D_Σ , названное в [2] дескриптивным пространством. При этом уравнения движения составлялись в форме алгебро-дифференциальной системы (АДС), т.е. в виде системы [4]

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(t, x, y), \\ 0 &= g(t, x, y), \end{aligned} \quad (1)$$

где $x \in R^n$ и $y \in R^m$ - вектор-столбцы соответственно дифференциальных и алгебраических переменных; t - время; предполагается, что алгебраическая часть системы (1) разрешима относительно y .

Система уравнений (1) представляет собой такой математический объект, который допускает непосредственное представление в терминах программирования. Именно, системе (1) соответствует подпрограмма, вычисляющая значения правых частей АДС при заданных t, x и y ; имя этой подпрограммы передается как параметр стандартной программе (программному комплексу) численного интегрирования АДС. Указанное соответствие делает возможным достижение достаточной концептуальной близости между математическим и программным уровнями моделирования.

Эффективное использование современных программ для численного интегрирования алгебро-дифференциальных систем (к числу их относится комплекс SAGMS [3]) предполагает достаточную гладкость правых частей решаемых АДС. В то же время в технике встречаются механические системы, подверженные таким силовым воздействиям, которые носят практически разрывный характер. В [5] для подобных систем используется термин "системы с прерывистым движением", а всякое явление, сопровождающееся скачкообразным изменением физических характеристик, называется "механическим событием".

Рассмотрим сначала случай, когда динамика исследуемой системы математически описывается АДС вида (1) с разрывной правой частью, причем эта АДС может быть в принципе решена "прилаস্যванием" (так что не возникает известных для разрывных систем общего вида трудностей с определением понятия решения).

Непосредственное решение АДС вида (1) с разрывной правой частью по стандартной программе невозможно, так как формулы, осуществляющие конечно-разностную дискретизацию исходной задачи, теряют смысл. На практике динамику подобных механических систем описывают разными уравнениями на различных отрезках времени, а при наступлении очередного механического события реализуют переключение с одного уравнения на другое. При этом порядок наступления событий считается известным, а способы их обработки существенно учитывают специфику конкретной задачи.

Задача создания универсальных комплексов для динамического анализа механических систем, допускающих прерывистое движение, требует разработки средств такого описания их динамики, которое было бы компактным и стандартизованным; важную роль играют также естественность и легкость программной реализации этих средств.

Поскольку программа интегрирования должна уметь обрабатывать отдельные события, то она должна получать в явном виде информацию о их наступлении. Логические условия, характеризующие наступление механических событий, могут быть равенствами или неравенствами (а также их логическими комбинациями), содержащими

дескриптивные переменные (т.е. компоненты векторов \mathbf{x} и \mathbf{y}) и время t . Следовательно, всякое такое условие можно трактовать как некоторый предикат на расширенном (за счет учета времени) дескриптивном пространстве, т.е. как отображение из $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ в множество значений истинности \mathbb{B} (элементы последнего - "истина" и "ложь" - далее отождествляются с числами 1 и 0).

Отметим, что любую кусочно-аналитическую функцию (в том числе и разрывную) можно задать единой формулой, составленной с применением алгебраических операций, операции взятия аналитической функции от данного выражения и операции образования условного выражения. Понятию "условное выражение" здесь придается тот же смысл, что и в языке программирования Алгол 68 [5]; применяя синтаксические средства этого языка, приведем в качестве примера определение асимметричной единичной функции, непрерывной справа [7]:

$$U_-(t) = (t < 0 | 0 | 1). \quad (2)$$

Условное выражение в правой части равенства (2) читается: "если $t < 0$, то 0, иначе 1".

Впишем формулы, определяющие правые части ЛДС (1), используя аналитические операции и условные выражения; затем выделим все условия условных выражений, пронумеруем их и обозначим через P_k значение предиката, определяющего k -м условием. После этого заменим условия всех условных выражений в правых частях системы на логические переменные P_k . Тогда система примет вид

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{f}(t, \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{p}), \\ 0 &= \mathbf{g}(t, \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{p}), \\ \mathbf{p} &= \mathbf{P}(t, \mathbf{x}, \mathbf{y}), \end{aligned} \quad (3)$$

где $\mathbf{p} \in \mathbb{B}^k$ - вектор-столбец логических переменных;
 $\mathbf{P}: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{B}^k$; k - число предикатов.

Систему вида (3) естественно назвать параметризованной предикатами алгебро-дифференциальной системой (ПАДС). В терминах программирования она представляется подпрограммой, вычисляющей значения функций \mathbf{f} , \mathbf{g} и \mathbf{P} при заданных $t, \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{p}$. Отметим, что при фиксированном \mathbf{p} функции \mathbf{f} и \mathbf{g} - гладкие.

Численное интегрирование ПАДС на участках постоянства $\mathbf{P}(t, \mathbf{x}, \mathbf{y})$ не требует особого обсуждения, ибо при этом вектор \mathbf{p} не меняется. Если после очередного вычисления правых частей $\mathbf{p} \neq \mathbf{P}(t, \mathbf{x}, \mathbf{y})$, то значения \mathbf{x} и \mathbf{y} запоминаются, \mathbf{p} заменяется на $\mathbf{P}(t, \mathbf{x}, \mathbf{y})$, а дальнейшие значения дескриптивных переменных рассматриваются как

начальные для следующей фазы интегрирования (при этом перед началом интегрирования выполняется та же процедура, что и в комплексе SAGMS [3] при начале счета: методом продолжения по параметру осуществляется переход от заданных значений \mathbf{y} к значениям, удовлетворяющим 2-му уравнению системы (3)).

Указанная схема вычислений использовалась при реализации на машинах серии ЕС ЭВМ программного комплекса PADSOL, который представляет собой ориентированный на ПАДС аналог комплекса SAGMS. В комплексе PADSOL при интегрировании систем вида (3) на участках постоянства $\mathbf{P}(t, \mathbf{x}, \mathbf{y})$ используется алгоритм Гира [4], а решение возникающих при этом систем линейных алгебраических уравнений обеспечивается обращением к программному комплексу LINSOL (модернизированный вариант комплекса SMSOL [2]).

В работе [6] предложен иной подход к формальному описанию динамики механических систем с прерывистым движением - метод логических функций. Согласно этому методу разрывные правые части уравнений движения вводятся с помощью аналитических операций и функции Хевисайда U_- , после чего функция Хевисайда заменяется "логической функцией" L - гладкой функцией, совпадающей с U_- всюду, кроме ε -окрестности начала координат ($\varepsilon \ll 1$). К преимуществам данного метода следует отнести ориентацию на использование стандартной программы интегрирования, а также возможность непосредственного дифференцирования функций, задающих правые части (это нужно, в частности, при анализе чувствительности механических систем).

Недостатком метода логических функций является трудность обоснованного выбора ε : при больших значениях ε модель оказывается грубой, при малых же увеличивается время счета и растет численная погрешность, что вызвано необходимостью выбора очень малого шага интегрирования и значительным ухудшением обусловленности системы при прохождении участков резкого изменения решения. Метод ПАДС-описания лишен подобного недостатка. Кроме того, метод работы [6] предполагает реализацию всех логических операций путем комбинирования L -функций, а в ПАДС-формализме естественно используются логические средства выбранного языка программирования.

В качестве иллюстрации рассмотрим следующую задачу [5].

Груз 1 соединен с пружиной 1 и совершает одномерное движение, характеризуемое координатой X , причём при $X = l_1$ пружина не растянута (рис. 1). При $X = X_a$ груз 1 захватывает в своем движении груз 2 (удар предполагается абсолютно неупругим), а при $X = X_b$ он входит в контакт с пружиной 2, которая при этом находится в нерастяннутом состоянии.

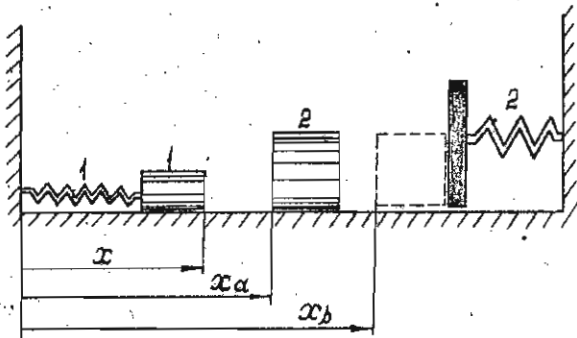


Рис. 1. Пример механической системы с прерывистым движением

Рассматривая динамику этой системы, авторы [5] ограничились промежутком времени, на котором переменная x возрастает, и получили следующее уравнение движения груза I:

$$\frac{d}{dt} \{ [M_1 + L(x - x_a)M_2] \dot{x} \} + K_1(x - l_1) + L(x - x_b)K_2(x - x_b) = 0,$$

где M_i - массы грузов; K_i - коэффициенты жесткости пружин.

Это уравнение можно переписать, обозначая через p полный импульс, в виде системы уравнений I-го порядка

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \frac{p}{M_1 + L(x - x_a)M_2}, \\ \dot{p} &= -K_1(x - l_1) - L(x - x_b)K_2(x - x_b). \end{aligned}$$

При ПАДС-описании динамика определяется следующей системой уравнений:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \frac{p}{M_1 + (p_1 | 0 | M_2)}, \\ \dot{p} &= -K_1(x - l_1) - (p_2 | 0 | K_2(x - x_b)), \\ p_1 &= (x < x_a), \quad p_2 = (x < x_b). \end{aligned} \quad (4)$$

Отметим, что если в рассматриваемой задаче в качестве дескриптивных переменных выбрать не x и p , а x и $v \equiv \dot{x}$, то при соударении грузов будет происходить скачкообразное изменение

дифференциальной переменной v . Поскольку ПАДС вида (3) допускает скачки только у алгебраических переменных, то для охвата рассматриваемой ситуации нужно обобщить понятие ПАДС.

Для того чтобы дифференциальные переменные были разрывными функциями времени, необходимо, чтобы в правые части соответствующих дифференциальных уравнений входили слагаемые типа δ -функций, отличные от нуля только в точках разрыва дифференциальных переменных (и обращающиеся в этих точках в бесконечность). Поскольку точки разрыва дифференциальных переменных всегда отвечают некоторым механическим событиям, то они, очевидно, полностью характеризуются предикатами $P_k(t, x, y)$.

Действительно, рассмотрим кусочно-постоянную функцию времени $\tilde{p}_k(t) = P_k(t, x(t), y(t))$; предикат P_k здесь трактуется как вещественнозначная функция (используется отождествление \mathbb{B} с $\{0, 1\}$). Так как значения функций в точках разрыва обычно не представляют физического интереса, условимся асимптотически кусочно-непрерывную функцию (в частности, $\tilde{p}_k(t)$) переопределять в точках ее разрыва так, чтобы она оказывалась непрерывной справа. Тогда производная \dot{p}_k функции $p_k = \tilde{p}_k(t)$ записывается в виде

$$\dot{p}_k = \sum_i e_{ik} \delta_-(t - t_i).$$

Здесь t_i - точки разрыва $\tilde{p}_k(t)$; $\delta_-(t) = \dot{U}(t)$ - асимметричная импульсная функция [7]; $e_{ik} = \pm 1$, причем знак "плюс" выбирается при изменении в точке t_i значения переменной p_k с 0 на 1, а "минус" - при обратном изменении.

Пусть $\lambda_i = x(t_i+0) - x(t_i-0)$ - скачок вектора x в точке t_i . Пусть, далее, X_{ik} - такие векторы из \mathbb{R}^n , что скачки λ_i связаны со скачками e_{ik} функций $\tilde{p}_k(t)$ соотношениями

$$\lambda_i = \sum_k X_{ik} e_{ik}.$$

Пусть, наконец, $X(t, x, y, p)$ - такая матрица размером $n \times K$, являющаяся гладкой функцией своих аргументов, что

$$X^{(k)}(t, x(t), y(t), p(t)) \Big|_{t=t_i-0} = X_{ik},$$

где $X^{(k)}$ - k -й столбец матрицы X . Тогда мы приходим к следующей обобщенной форме ПАДС:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(t, x, y, p) + X(t, x, y, p) \dot{p}, \\ 0 &= g(t, x, y, p), \\ p &= P(t, x, y). \end{aligned} \quad (5)$$

В отличие от основной формы ПАДС (3) обобщенная форма ПАДС

позволяет описывать скачкообразное изменение дифференциальных переменных. Схема обработки механического события для ПАДС вида (5) остается неизменной, добавляется только пересчет значений x : для получения "новых" значений x следует к "старым" значениям добавить результат умножения матрицы $X(t, x(t), y(t), p(t))|_{t-t_i-0}$ на вектор $e = \tilde{p}(t_i+0) - \tilde{p}(t_i-0)$. Соответственно этому в подпрограмму вычисления правых частей ПАДС нужно включить блок вычисления значения матричной функции X , который реально работает лишь при наступлении очередного механического события.

Следует отметить, что при реализации программного комплекса PADSOL был учтен тот факт, что для больших ПАДС матрица X обычно бывает сильно разреженной; с этой целью предусмотрена работа только с ее ненулевыми элементами (НЭ).

Таким образом, рассчитанная на работу с комплексом PADSOL подпрограмма вычисления значений правых частей ПАДС должна в общем случае иметь следующие параметры: Z (массив дескриптивных переменных); P (массив p); целочисленные массивы IXX и JXX , описывающие расположение НЭ в матрице X ; массивы F и PP , в которые подпрограмма заносит вычисленные значения функций f, g и P ; XX (массив НЭ матрицы X); логическую переменную LXX и параметр аварийного завершения IER . Значения НЭ вычисляются лишь тогда, когда LXX имеет значение $.TRUE.$. Разумеется, в случаях работы с ПАДС в основной форме (3), с АДС и системами одних только дифференциальных уравнений число параметров в подпрограмме уменьшается (комплекс PADSOL допускает эксплуатацию в различных конфигурациях).

Вернемся к рассмотренной выше механической системе. В переменных x, v, w (алгебраическая переменная w есть кусочно-непрерывная составляющая ускорения груза I и введена в систему (6) для демонстрации выразительных возможностей ПАДС-описания) ее уравнения движения можно записать, используя обобщенную форму ПАДС (5), так:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= v, \\ \dot{v} &= w + \frac{M_2}{M_1 + M_2} v \dot{p}_1, \\ 0 &= [M_1 + (p_1|0|M_2)]w + K_1(x - l_1) + (p_2|0|K_2)(x - x_B), \\ p_1 &= (x < x_A), \quad p_2 = (x < x_B). \end{aligned} \quad (6)$$

Система (6) эквивалентна системе (4) на интервале возрастания переменной x (для достижения эквивалентности на бесконечном интервале времени достаточно в знаменателе фигурирующей в (6) дроби заменить M_2 на $(p_1|M_2|0)$). Численные эксперименты показывают, что интегрирование ПАДС (4) и (6) требует приблизитель-

но одинакового объема вычислений. Таким образом, применение ПАДС для описания динамики механических систем не связано с каким-либо специальным выбором переменных.

В качестве другого примера можно взять простейшую модель часового механизма, описание которой содержится в известной монографии [8] на с. 206. В рамках этой модели часовой механизм рассматривается как гармонический осциллятор с линейным трением, на который один раз за период (а именно, в момент перехода от отрицательных к положительным значениям смещения x) действует ударный импульс от спускового механизма, что приводит к скачкообразному увеличению количества движения системы на постоянную величину.

Обозначая через v скорость, а через w - кусочно-непрерывную составляющую ускорения, имеем следующую ПАДС:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= v, \\ \dot{v} &= w + (p|0|a)\dot{p}, \\ 0 &= w + 2kv + \omega^2 x, \\ p &= (x \geq 0), \end{aligned} \quad (7)$$

в которой a есть приращение скорости при ударе; k - коэффициент демпфирования; ω - собственная частота колебаний недемпфированного осциллятора. Подчеркнем, что в [8] из-за отсутствия соответствующих средств описания полная система уравнений движения не могла быть выписана, и поэтому математическая модель часового механизма формулировалась словесно.

Приведенные примеры дают достаточное представление о возможностях ПАДС-формализма. Рассмотрим теперь ПАДС с геометрической точки зрения.

В сущности, в основе ПАДС-описания динамики механической системы лежит аналитическое продолжение правых частей исходной АДС с пространства \mathcal{D}_Z на более широкое пространство $\mathcal{D}_Z \times \mathbb{B}^k$. На последнем естественным образом вводится дифференциальная структура; действительно, $\mathcal{D}_Z \times \mathbb{B}^k$ есть объединение 2^k копий пространства \mathcal{D}_Z . В результате осуществляется переход к заданной на $\mathcal{D}_Z \times \mathbb{B}^k$ АДС

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(t, x, y, p), \\ 0 &= g(t, x, y, p), \end{aligned} \quad (8)$$

правые части которой являются гладкими.

Решение ПАДС вида (3) или (5) определяется как результат склейки кусков интегральных кривых АДС (8). Для управления процессом этой склейки и используется соотношение $p = P(t, x, y)$ (ту же роль играет и импульсный член в (5)). Область истинности этого со-

отношения при каждом t образует подмножество в $\mathcal{D}_x \times \mathcal{B}^k$, которое естественно называть "физической частью" последнего.

При численном интегрировании ПАДС на ЭЕМ большую роль играет четкое различие p и P . В частности, случайный выход изображающей точки за пределы "физической части" $\mathcal{D}_x \times \mathcal{B}^k$ на промежуточных ньютоновых итерациях при вычислениях по методу Гира не влечет в силу гладкости f и g никаких нежелательных последствий. Разумеется, вдали от "физической части" функции f и g могут на практике и не быть определенными; при попадании в такую область подпрограмма вычисления правых частей присваивает IER ненулевое значение, PADSOL уменьшает шаг интегрирования и изображающая точка возвращается в непосредственную окрестность "физической части".

Интересно заметить, что в ПАДС вида (5) могут встретиться дифференциальные переменные, у которых в правой части соответствующего дифференциального уравнения присутствует только импульсная часть, а кусочно-непрерывная отсутствует. Такие переменные принимают дискретный набор значений, а в промежутках между механическими событиями остаются постоянными, так что их обработка предельно упрощается. В программном комплексе PADSOL подобные переменные выделены в особый класс "вспомогательных" переменных и в отличие от остальных ("главных") переменных рассматриваются на участках постоянства $P(t, x, y)$ как константы.

Например, если добавить к системе (7) уравнение

$$\dot{q} = (p|0|1)\dot{p}$$

с начальным условием $q(0) = 0$, то значение переменной q в любой момент времени t равно числу ударных импульсов, полученных системой от спускового механизма на отрезке времени $[0, t]$.

Введение "вспомогательных" переменных при ПАДС-описании конкретных систем - удобный прием трактовки кусочно-постоянных параметров, а также один из способов дешевыми средствами повысить гибкость ПАДС-описания в целом. Эти переменные можно использовать для запоминания значений дескриптивных переменных и предикатов к моменту наступления тех или иных механических событий, подсчета количества реализаций событий некоторого типа, и фиксации текущего состояния системы и т.п.

Для механических систем, моделируемых ПАДС (6) и (7), общим является то, что изменение дескриптивных переменных при наступлении очередного механического события не оказывает обратного воздействия на вектор предикатов $P(t, x, y)$. Это позволяет при вычислении вектора e применять формулу

$$\tilde{p}(t_i+0) = P(t_i+0, \dot{x}(t_i+0), \dot{y}(t_i+0)), \quad (9)$$

где функции $\dot{x}(t)$ и $\dot{y}(t)$ совпадают с функциями $x(t)$, $y(t)$ при $t < t_i$ и являются при $t \geq t_i$ решением АДС

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(t, x, y, \tilde{p}(t_i-0)), \\ 0 &= g(t, x, y, \tilde{p}(t_i-0)). \end{aligned}$$

Формула (9), однако, верна далеко не всегда.

Из наметившегося затруднения целесообразно выйти следующим образом: включить в само определение решения ПАДС вида (5) соглашение об использовании при вычислении вектора e значения $P(t_i+0, \dot{x}(t_i+0), \dot{y}(t_i+0))$ вместо $\tilde{p}(t_i+0)$. Разумеется, теперь вектор \tilde{p} должен пониматься как символический, так как не всегда он оказывается равным производной от $p = \tilde{p}(t)$.

В качестве примера системы, при ПАДС-описании которой не обязательно выполняется (9), рассмотрим следующую задачу (рис.2).

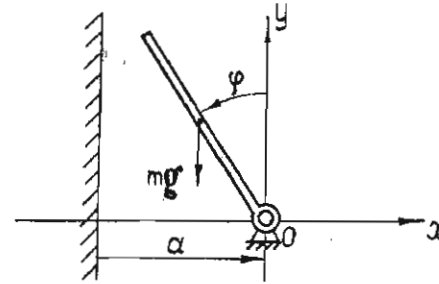


Рис. 2. Физический маятник, соударяющийся со стенкой

Однородный тонкий стержень длиной $2r$ и массой m шарнирно соединен с точкой O и вращается вокруг этой точки в вертикальной плоскости Oxy . Слева от точки O на расстоянии $\alpha < 2r$ находится абсолютно твердая стенка. Стержень при своем движении может ударяться о нее своим концом; удар приводит к изменению знака угловой скорости стержня ω на противоположный с умножением модуля ω на коэффициент k , $0 < k < 1$ (иными словами, в момент удара к $\omega(t_i-0)$ для получения $\omega(t_i+0)$ следует прибавить величину $-(1+k)\omega(t_i-0)$).

Пусть φ есть угол, отсчитываемый в положительном направлении от оси Oy до оси стержня. Условием нахождения стержня справа от стенки является выполнение неравенства $\sin \varphi < \alpha/(2r)$. Момент инерции стержня относительно O равен $4mr^2/3$, а момент силы тяжести относительно этой точки есть $mgr \sin \varphi$, где g - ускорение свободного падения. Получаем следующие уравнения движения стержня:

$$\begin{aligned} \dot{\varphi} &= \omega, \\ \dot{\omega} &= C \sin \varphi + (p|(1+k)\omega|0)\dot{p}, \\ p &= (\sin \varphi < \alpha/(2r)), \end{aligned} \quad (10)$$

где $C = 3g/(4r)$. Система (10) полностью описывает движение стержня как на гладких участках, так и при соударениях (которые могут происходить в верхнем и нижнем положениях).

Итак, аппарат параметризованных предикатами алгебро-дифференциальных систем является естественным развитием аппарата АДС, ориентированным на описание динамики механических систем с прерывистым движением. Предназначенный для интегрирования жестких ПАДС программный комплекс PADSOL может быть использован как автономный подкомплекс при создании универсальных программ для динамического анализа многозвенных механических систем.

Возможны и немеханические применения комплекса PADSOL. В частности, он вошел составной частью в программный комплекс DAOS, позволяющий исследовать переходные процессы в сложных нелинейных системах, моделируемых электрическими схемами замещения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Осадченко Н.В. О динамическом анализе сложных механических систем. - Тр./Моск.энерг.ин-т, 1981, вып.515, с.33-39.
2. Осадченко Н.В. Динамический анализ сложных механических систем на IBM. - Тр./Моск.высв.техн.училище, 1982, вып.383, с.112-115.
3. Осадченко Н.В. Моделирование динамики систем взаимосвязанных твердых тел средствами программного комплекса DYANA. - Тр./Моск.энерг.ин-т, 1982, вып.573, с.81-86.
4. Gear C.W. Simultaneous Numerical Solution of Differential-Algebraic Equations. - IEEE Trans. on Circuit Theory, 1971, v. CT-18, No. 1, p. 89-95.
5. Ehle P.E., Haug E.J. A Logical Function Method for Dynamic and Design Sensitivity Analysis of Mechanical Systems with Intermittent Motion. - Trans. of ASME. Journal of Mechanical Design, 1982, v.104, No.1, p. 90-100.
6. Пейган Ф. Практическое руководство по Алголу 68. - М.: Мир, 1979. - 240 с.
7. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров. - М.: Наука, 1978. - 832 с.
8. Андронов А.А., Витт А.А., Хайкин С.Э. Теория колебаний. - М.: Наука, 1981. - 568 с.

АНАЛИЗ ДИНАМИЧЕСКИХ СВОЙСТВ ШТАБЕЛЁРА

Инж. М.ЯГОВ (Словацк.высш.техн.школа)

Штабелер типа RZ 060 (рис. 1) представляет собой транспортную машину, которую можно рассматривать как механическую систему с двумя степенями свободы. Первой из них отвечает горизонтальное перемещение всей конструкции, а второй - вертикальное перемещение груза. Проходимые при этом пути обозначим S_k ; здесь и далее $k=1$ относится к горизонтальному движению, а $k=2$ - к вертикальному (положительные направления отсчета - слева направо и снизу вверх).

Механизмы, осуществляющие эти перемещения, приводятся в действие при помощи электродвигателей постоянного тока с независимым возбуждением. Их динамика описывается уравнениями [1-3]

$$\frac{dI_k}{dt} = \frac{\sigma_k U_k - C_k \omega_k - R_k I_k}{L_k}, \quad P_{mk} = C_k |\omega_k| I_k, \quad (1)$$

где I_k - ток в обмотке якоря k -го двигателя; U_k - напряжение; ω_k - угловая скорость якоря; P_{mk} - мощность k -го двигателя.

Кинетическая энергия механической части системы распадается на два слагаемых, отвечающих движению в каждом из двух направлений. Обозначим эти слагаемые, умноженные предварительно на знак \dot{S}_k , через T_k . Тогда имеем

$$\frac{ds_k}{dt} = v_k, \quad \frac{dT_k}{dt} = P_{ik}, \quad \omega_k = \frac{T_k}{|T_k|} \sqrt{\frac{2|T_k|}{J_k}}, \quad (2)$$

$$v_1 = \frac{r_1}{l_1 l_2} \omega_1, \quad v_2 = \frac{r_2}{l_3} \omega_2,$$

где v_k - линейная скорость; P_{ik} - (ориентированная) мощность сил инерции. Для нахождения P_{ik} запишем для каждого из движений уравнения баланса энергии

$$\begin{aligned} P_{m1} - P_{i1} - P_{f1} &= 0, \\ P_{m2} - P_{i2} - P_{f2} - P_g &= 0. \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь $P_{fk} \equiv f_k N_k v_k$ - мощность сил сопротивления; $P_g \equiv m_2 g v_2$ - мощность сил тяжести при подъеме груза. Нормальные реакции N_k задаются соотношениями

$$N_1 = m_1 g + \frac{m_2 r_2^2 P_{i2}}{l_3^2 J_2 |v_2|}, \quad N_2 = m_2 g \frac{l_{TVB}}{l_k}.$$