УДК 539.376

ПМТФ №2 1993

М. Н. Кирсанов

НАЧАЛЬНОЕ ЗАКРИТИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ СЖАТОГО СТЕРЖНЯ В УСЛОВИЯХ ПОЛЗУЧЕСТИ

Рассматривается выпучивание сжатого стержня при неустановившейся ползучести материала. В известных условных критериях неустойчивости [1] момент выпучивания связывался с характером изменения прогиба стержня после приложения возмущения. Критерий [2] определяет момент возмущения, при котором скорость прогиба равна нулю, как особую точку на шкале времени, отделяющую условно-устойчивое деформирование от неустойчивого. В соответствии с этим критерием устойчивость означает уменьшение прогиба в первый момент возмущения. Аналогично равенство нулю ускорения прогиба [3] определяет еще одну особую точку процесса деформирования. Идея выделения точек такого типа была обобщена на высшие производные [4]. Полученные точки названы псевдобифуркационными. При их определении производные по времени всех порядков от прогиба (кроме одного, соответствующего порядку псевдобифуркации) полагались равными нулю.

В настоящей работе выделяются особые точки процесса деформирования на основе исследования начального закритического поведения высших производных без указанных ограничений на производные прогиба.

Рассмотрим ползучесть шарнирно опертого стержня длиной l, площадью сечения F, сжатого продольной силой T. Зададимся определяющим соотношением, общий вид которого получен из условия подобия кривых ползучести [5]:

(1) $$\dot{p}h(p)=f(\sigma)$$

($p=\varepsilon-\sigma/E$ — деформация ползучести).

Для малых приращений напряженно-деформированного состояния, отвечающих малым отклонениям стержня от прямолинейного состояния, из (1) после линеаризации получим

$$\Delta\dot{p}h(p)+\Delta p\dot{p}h'(p)=f'(\sigma)\Delta\sigma.$$

Штрихом обозначена производная от функции по своему аргументу. Вместо переменной t введем p:

(2) $$\frac{d(\Delta p)}{dp}+\Delta p\frac{h'(p)}{h(p)}=\frac{f'}{f}\Delta\sigma.$$

Интегрируя (2) при начальных условиях $\Delta p=\Delta p_0$, $p=p_0$, находим

(3) $$\Delta p=\frac{h(p_0)}{h(p)}\left(\Delta p_0+\frac{f'}{fh(p_0)}\int\limits_{p_0}^{p}\Delta\sigma h(p)\,dp\right).$$

В соответствии с гипотезой плоских сечений имеем

(4) $$\Delta\varepsilon=z(w_{xx}-w_{0,xx}),$$

где w_{xx} — вторая производная прогиба по продольной координате x; w_0 — начальный прогиб стержня, полученный в результате возмущения в момент $p=p_0$; z — поперечная координата. Положим

(5) $$\Delta p=zv_{xx}$$

(v — функция x). Зададимся видом функций

(6) $$w=U(p)\sin\lambda x,\quad w_0=C_0\sin\lambda x,$$
$$v=V(p)\sin\lambda x,\quad \lambda=\pi/l.$$

Используя (4)—(6) и выражение $\Delta\sigma=E(\Delta\varepsilon-\Delta p)$, для приращений напряжений получим

(7) $$\Delta\sigma=Ez\lambda^2(V(p)+C_0-U(p))\sin\lambda x.$$

Уравнение равновесия имеет вид

(8) $$\int\limits_F\Delta\sigma z\,dF=-Tw.$$

Два последних уравнения дают

(9) $$(1-\omega)U(p)=V(p)+C_0,$$

где $\omega=T/T_0$; $T_0=EI\lambda^2$ — критическая нагрузка упругого стержня. Перепишем (7) с учетом (9):

$$\Delta\sigma=-Ez\lambda^2U(p)\,\omega\sin\lambda x.$$

Подставив это выражение в (3), находим

(10) $$U(p)(1-\omega)-C_0-\frac{h(p_0)}{h(p)}\left(V_0+\frac{f'\omega E}{fh(p_0)}\int\limits_{p_0}^{p}U(p)\,h(p)\,dp\right)=0$$

$(V_0 = V(p_0))$. Решение (10) имеет вид

$$(11)\quad U(p) = \frac{C_0}{1-\omega}\left\{\frac{h(p_0)}{h(p)}\exp(k(p-p_0)) + \frac{\exp(kp)}{h(p)}\int_{p_0}^{p} h'(p)\exp(-kp)\,dp\right\} + $$

$$+ \frac{V_0}{1-\omega}\frac{h(p_0)}{h(p)}\exp(k(p-p_0))$$

$$(k = (f'/f)E\omega/(1-\omega)).$$

При $p = p_0$ из (9) или (11) получим

$$(12)\qquad U(p_0) = (C_0 + V_0)/(1-\omega).$$

Вычислим производные прогиба (11) по времени. В начальный момент $(p = p_0)$ они имеют вид

$$\dot U(p_0) = \dot p_0(C_0 k + V_0(k-q))/(1-\omega),$$

$$(13)\qquad \ddot U(p_0) = \dot p_0^2(C_0 k(k-2q) + V_0(k^2 - 3qk + 2q^2 - q_1))/(1-\omega),$$

где $q = h'(p_0)/h(p_0)$; $q_j = d^j q/dp_0^j$; $j = 1, 2, \ldots$ Для производной порядка N эти выражения можно обобщить в виде

$$(14)\qquad U^{(N)}(p_0) = \dot p_0^N(C_0 D_N + V_0 B_N)/(1-\omega).$$

Здесь полиномы D_N и B_N строятся следующим образом:

$$(15)\qquad D_1 = k,\quad D_N = kD_{N-1} - \sum_{i=1}^{N-1} D_i C_i^N F_{N-i},\quad N = 2, 3, \ldots,$$

$$B_0 = 1,\quad B_N = kB_{N-1} - \sum_{i=0}^{N-1} B_i C_i^N F_{N-i},\quad N = 1, 2, \ldots,\quad C_i^N = \frac{N!}{i!\,(N-i)!}.$$

Вспомогательные функции $F_N(p)$ введены по правилу

$$F_1 = q,\quad F_{N+1} = F_N' - (N-1)F_N F_1,\quad N = 1, 2, \ldots$$

Выражения (12)—(15) позволяют проанализировать поведение прогиба после возмущения. Равенство нулю производных прогиба по времени отвечает некоторым особым точкам на шкале времени. При отсутствии возмущения деформации ползучести $(V_0 = 0)$ эти точки есть корни полиномов D_N $(N = 1, 2, \ldots)$. Общим корнем полиномов является нуль: $k = 0$. Обозначив через другие корни k_{DN}, имеем

$$(16)\qquad k_{D2} = 2q,\quad k_{D3} = (5q \pm \sqrt{12q_1 + q^2})/2.$$

Правые части (16) зависят от деформации ползучести p_0, левые — от напряжения. В частности, если $h(p) = p^\alpha$, то $q = \alpha/p_0$, $q_1 = -\alpha/p_0^2$. Таким образом, при заданной нагрузке на шкале (или времени) отмечается особая точка.

Аналогично, если $C_0 = 0$ (стержень не имеет начальной кривизны), возникают особые точки, являющиеся корнями полиномов B_N:

$$(17)\qquad k_{B1} = q,\quad k_{B2} = (3q \pm \sqrt{4q_1 + q^2})/2.$$

Точка $k_{B1} = q$ соответствует критерию Работнова — Шестерикова [2], $k_{D2} = 2q$ — критерию Куршина [1].

Рассмотрим другую ситуацию. Пусть при $C_0 \neq 0$ и $V_0 \neq 0$ прогиб в начальный момент равен нулю, что возможно, если $C_0 = -V_0$ [1]. Равенство нулю производных прогиба в этот момент будет отвечать особым точкам процесса деформирования. Для производных порядка N имеем выражение

$$U^{(N)}(p_0) = \dot p C_0 H_N/(1-\omega),$$

где $H_N = D_N - B_N$. Выпишем несколько первых полиномов H_N:

$$H_1 = q,\ H_2 = kq + q_1 - 2q^2,\ H_3 = k^2q + k(q_1 - 5q^2) - 7qq_1 + q_2 + 6q^3.$$

Корни полиномов представим в виде

$$(18)\quad k_{H2} = 2q - q_1/q,\ k_{H3} = (5q - q_1/q \pm \sqrt{(q_1/q)^2 + 18q_1 - 4q_2/q + q^2})/2.$$

Особые точки, которые порождаются полиномами H_N, можно получить иначе, заменив начальное условие (5). Пусть в результате некоторого возмущения в момент $p = p_0$ в стержне появились внутренние напряжения, заданные в виде $\Delta\sigma = zS_{xx}$ (S — функция координаты x). Выберем для S форму $S = R(p)\sin\lambda x$. Используя уравнение равновесия (8) и представление (6), имеем $R(p) = E\omega U(p)$. По гипотезе плоских сечений (4)

$$(19)\qquad \Delta p = -\lambda^2 z(U(p)(1-\omega) - C_0)\sin\lambda x,$$
$$\Delta p_0 = -\lambda^2 z(R_0(1/\omega - 1)/E - C_0)\sin\lambda x \quad (R_0 = R(p_0)).$$

Подставляя (19) в (3), выведем уравнение для $U(p)$, аналогичное (10), но с заменой V_0 на $R_0(1/\omega - 1)/E - C_0$. Отсюда вместо (12) и (14) получим следующие выражения для прогиба и его производных по времени порядка N при $p = p_0$:

$$U^N(p_0) = \dot{p}_0^N (C_0 H_N/(1-\omega) + R_0 B_N/(E\omega)).$$

Полагая $C_0 = 0$, найдем особые точки k_{BN} (17), а при $R_0 = 0$ — особые точки k_{HN}. В последнем случае, как и ранее при получении точек k_{HN}, начальный прогиб $U(p_0)$ равен нулю.

Рассмотрим частный случай соотношения (1): $f = A\sigma^n$, $h(p) = p^\alpha$. Введем безразмерный параметр ξ, выполняющий функцию времени и монотонно с ним связанный: $\xi = pnEF/(T_0 - T)$. Решения, найденные из выражений (16)—(18), будем обозначать теми же индексами, что и параметр k. Имеем

$$\xi_{B1} = \alpha,\ \xi_{B2} = (3\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - 4\alpha})/2,\ \xi_{D2} = 2\alpha,\ \xi_{D3} = (5\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - 12\alpha})/2,$$
$$\xi_{H2} = 1 + 2\alpha,\ \xi_{H3} = (5\alpha + 1 \pm \sqrt{\alpha^2 - 18\alpha - 3})/2.$$

Значения ξ для высших производных получим для примера численно при $\alpha = 1$. Для облегчения вычислений воспользуемся простыми рекуррентными формулами

$$B_0 = 1,\ B_1 = \xi - 1,\ B_N = (1 - 2N)B_{N-1} + \xi^2 B_{N-2},\ D_1 = \xi,\ D_2 = \xi^2 - 2\xi,$$
$$D_{N+1} = -(1 + 2N)D_N + \xi^2 D_{N-1} - (-1)^N \xi(2N - 3)!!,\ N = 2, 3, \ldots$$

Значения минимальных положительных корней полиномов занесены в таблицу. При нечетных N полиномы D_N и H_N корней не имеют, при четных N нет корней у полиномов B_N. Последовательности оказываются монотонно возрастающими и неограниченными сверху. Легко проверить, что при переходе через корень значения полиномов и, следовательно, знаки соответствующих производных прогиба меняются с отрицательных на положительные. Это не противоречит характеру выделяемых особых точек. Возмущения, заданные стержню до особой точки, возрастают менее интенсивно, чем таковые после нее. Наиболее очевидна опасность точки ξ_{B1} (псевдобифуркация нулевого порядка [4]). Возмущения про-

N	ξ_{BN}	ξ_{DN}	ξ_{HN}	N	ξ_{BN}	ξ_{DN}	ξ_{HN}
1	1,00	—	—	5	3,65	—	—
2	—	2,00	3,00	6	—	6,00	7,47
3	2,32	—	—	7	4,97	—	—
4	—	4,00	5,24	8	—	8,04	9,71

гиба, заданные раньше, чем ξ_{B1}, уменьшаются в начальный момент и увеличиваются, если $\xi > \xi_{B1}$.

Таким образом, на шкале времени найдены особые точки процесса деформирования стержня, имеющие реальный физический смысл. Конкретная связь этих точек с моментом выпучивания может быть выявлена при анализе экспериментальных данных аналогично тому, как это было выполнено для точек псевдобифуркации [6]. Можно предположить, что ближе всех к эксперименту будут особые точки при $N = 4$. Отметим также, что при отсутствии упрочнения ($\alpha = 0$) особые точки ξ_{BN}, ξ_{DN} (как, впрочем, и многие известные условные критерии устойчивости при ползучести) вырождаются. Этого нельзя сказать про точки ξ_{HN}. При $\alpha = 0$ имеем $\xi_{H2} = 1{,}00$, $\xi_{H4} = 1{,}78$, $\xi_{H6} = 2{,}54$.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Куршин Л. М.** Устойчивость при ползучести // Изв. АН СССР. МТТ.— 1978.— № 3.
2. **Работнов Ю. Н., Шестериков С. А.** Устойчивость стержней и пластинок в условиях ползучести // ПММ.— 1957.— № 3.
3. **Куршин Л. М.** Об устойчивости стержней и пластин в условиях ползучести // ДАН СССР.— 1961.— Т. 140, № 3.
4. **Клюшников В. Д.** Устойчивость упругопластических систем.— М.: Наука, 1980.
5. **Работнов Ю. Н.** Ползучесть элементов конструкций.— М.: Наука, 1966.
6. **Клюшников В. Д.** Лекции по устойчивости деформируемых систем.— М.: Изд-во МГУ, 1986.

г. Воронеж *Поступила 7/II 1992 г.*