

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ «МЭИ»

ТЕХНОЛОГИИ БУДУЩЕГО

VI МЕЖДУНАРОДНАЯ НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКАЯ
КОНФЕРЕНЦИЯ СТУДЕНТОВ И АСПИРАНТОВ

23 – 27 мая 2022 г.

СБОРНИК ТРУДОВ КОНФЕРЕНЦИИ

Москва
Издательство МЭИ
2022

О.В. Воробьев¹, М.Н. Кирсанов²

1 – аспирант, 2 – руководитель проекта

СРАВНИТЕЛЬНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПЛОСКИХ ФЕРМ С ПОДЪЕМОМ. АНАЛИТИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ

АННОТАЦИЯ

Приводятся схемы статически определимых плоских ферм и формулы для расчета их прогибов в зависимости от числа панелей. Используется формула Максвелла – Мора для вычисления прогиба. Решения находятся в виде формул методом индукции. Графики строятся для различных соотношений высот и пролетов ферм. Выявляются наиболее и наименее жесткие конструкции.

Ключевые слова – ферма, прогиб, формула Максвелла – Мора, индукция

1. ВВЕДЕНИЕ

1.1. Регулярные фермы

Стержневые конструкции широко используются в машиностроении, строительстве, авиации, транспорте, робототехнике. Отличительное свойство ферм – легкость, прочность, удобство транспортировки и монтажа. Расчет ферм на деформации обычно производится в хорошо зарекомендовавших себя программных комплексах, основанных на методе конечных элементов. Для регулярных ферм, имеющих в своей структуре повторяющиеся элементы или группы элементов, существуют также аналитические алгоритмы расчета деформаций ферм, сводящиеся к формулам, пригодным с одинаковой степенью погрешности для расчетов конструкций произвольных порядков. Такие конструкции могут быть элементами космических аппаратов, антенн, робототехнических манипуляторов или применяться в строительстве. Регулярные фермы и проблемы существования статически определимых стержневых структур впервые рассмотрены в [1]. Аналитические решения для прогибов регулярных арочных ферм получены в [2-4]. В справочниках [5, 6] собраны различные схемы плоских статически определимых регулярных ферм и приведены формулы для расчета их прогибов под действием различных нагрузок. Примененный в этих работах метод индукции позволяет также получать аналитические нижние оценки первой собственной частоты свободных колебаний ферм, масса которых сконцентрирована в узлах [7, 8].

1.1. Алгоритм вывода формул

Особую ценность для практики имеют расчетные формулы, содержащие наибольшее число параметров, характеризующих объект исследования. В регулярных фермах основные параметры — это размеры конструкции, нагрузка, свойство материала, порядок регулярности (число панелей). Наибольшую сложность при выводе формул вызывает учет произвольного числа панелей. Рассматриваемый в настоящей работе метод индукции состоит в обобщении по числу панелей ряда отдельных аналитических решений, полученных в системе компьютерной математики. Прогиб рассчитывается по формуле Максвелла – Мора, усилия в стержнях, входящие в эту формулу, находятся методом вырезания узлов. Часто конструкция бывает внешне статически неопределимой (число опор больше трех для плоской не составной системы). Внешняя статическая неопределенность рас-

крывается в этом случае учетом реакций опор в общей системе уравнений равновесия узлов. Процедура обобщения решений может быть выполнена средствами системы компьютерной математики. В системе Maple для этого сначала составляется линейное однородное рекуррентное уравнение, которому удовлетворяет общий член последовательности коэффициентов, входящих в отдельные решения, затем из решения рекуррентного уравнения (также с помощью операторов Maple) находятся общие члены, дающие решение поставленной задачи.

2. СХЕМЫ ФЕРМ

Ниже приведены семь схем статически определимых ферм, не вошедшие в справочники [5, 6], каждая из которых имеет $2n$ панелей. Решетки ферм крестообразные или раскосные. Подъем h средней части фермы у всех схем одинаковый.

2.1. Ферма 1

Ферма на четырех опорах, три из которых являются подвижными шарнирами, а одна неподвижным, с пролетом $L = 2a(2n - 1)$ высотой $2h$ состоит из $m = 8n + 2$ стержней (рис.1).

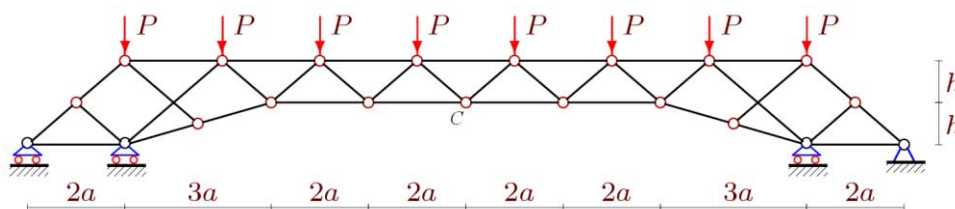


Рис. 1. Ферма 1, $n=5$

За прогиб фермы примем вертикальное смещение среднего узла C нижнего пояса. Для вычисления прогиба используется формула Максвелла – Мора в виде:

$$\Delta = \sum_{j=1}^m N_j \tilde{N}_j l_j / (EF), \quad (1)$$

где EF — жесткость стержней, N_j — усилия в стержне j фермы от внешней нагрузки, \tilde{N}_j — усилие от единичной вертикальной силы, приложенной к узлу C , смещение которого разыскивается, l_j — длина стержня. Пять стержней опор приняты недеформируемыми, и их усилия в сумму не входят. Расчет ряда ферм различного порядка n показывает, что результат вычислений по формуле Максвелла – Мора (1) имеет общий вид:

$$\Delta = P(C_1 a^3 + C_2 c^3 + C_3 d^3) / (h^2 EF), \quad (2)$$

где $c = \sqrt{a^2 + h^2}$, $d = \sqrt{9a^2 + h^2}$.

В случае действия сосредоточенной силы в узле C методом индукции получены следующие коэффициенты:

$$C_1 = (16n^3 - 72n^2 + 110n - 87) / 6, C_2 = (8n + 3) / 8, C_3 = 1 / 8.$$

Аналогично, при действии нагрузки на нижний пояс коэффициенты имеют вид:

$$C_1 = (20n^4 - 120n^3 + 322n^2 - 486n + 261) / 6,$$

$$C_2 = (4n^2 + 3n - 18) / 4, C_3 = (4n - 5) / 16.$$

Нагрузка на верхний пояс:

$$C_1 = 2(n-1)(5n^3 - 25n^2 + 54n - 63)/3, C_2 = (4n^2 + 3n - 15)/4, C_3 = (n-1)/4.$$

Суммарная нагрузка на верхний пояс составляет $P_0 = 2(n-1)P$.

2.2. Ферма 2

Внешне статически неопределимая ферма высотой $3h$ с длиной пролета $L = 4a(n-1)$ имеет в своем составе $m = 8n - 2$ стержней (рис. 2). Суммарная нагрузка на верхний пояс $P_0 = (2n+1)P$. Зависимость прогиба от числа панелей при загрузении верхнего пояса имеет вид:

$$\Delta = P(C_1 a^2 + C_2 c^2) / (h^2 EF). \quad (3)$$

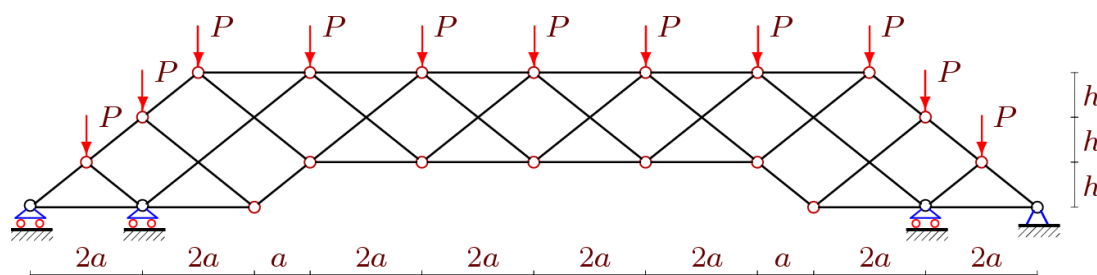


Рис. 2. Ферма 2, $n=5$

Коэффициенты в (3):

$$C_1 = (5n^4 - 4((-1)^n + 10)n^3 + (24(-1)^n + 139)n^2 - 2(31(-1)^n + 115)n + 51(-1)^n + 135) / 6,$$

$$C_2 = (n^2 - ((-1)^n + 2)n - 3(-1)^n + 5) / 2.$$

2.3. Ферма 3

Внешне статически неопределимая ферма высотой $3h$ с длиной пролета $L = 4a(n-1)$ имеет в своем составе $m = 8n$ стержней (рис. 3). Суммарная нагрузка на верхний пояс $P_0 = (2n-1)P$. Зависимость прогиба от числа панелей при загрузении верхнего пояса имеет вид:

$$\Delta = P(C_1 a^3 + C_2 c^3 + C_3 d^3 + C_4 h^3) / (h^2 EF). \quad (4)$$

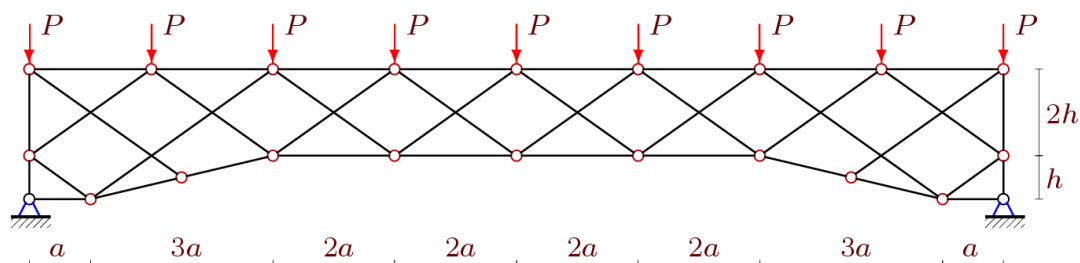


Рис. 3. Ферма 3, $n=5$

Коэффициенты в (4):

$$C_1 = (10n^4 + 16((-1)^n - 5)n^3 + 4(59 - 27(-1)^n)n^2 + 4(47(-1)^n - 70)n - 39(-1)^n + 111) / 12,$$

$$C_2 = (4n^2 + 2(3(-1)^n - 4)n - 14(-1)^n - 1) / 8, C_3 = -(-1)^n / 8, C_4 = (2n - 1) / 2.$$

Формула для прогиба (2) в этом случае имеет коэффициенты:

$$C_1 = 2(n-1)(5n^3 - 5n^2 + 2n - 15) / 3, C_2 = (4n^2 + 11n - 17) / 4, C_3 = (n-1) / 4.$$

2.7. Ферма 7

Внешне статически неопределимая ферма высотой $3h$ с длиной пролета $L = 2a(2n-1)$ имеет в своем составе $m = 8n$ стержней. Суммарная нагрузка на верхний пояс $P_0 = (2n-1)P$. Формула для прогиба (2) в этом случае имеет коэффициенты:

$$C_1 = (5n^4 - 2(4(-1)^n + 25)n^3 + (72(-1)^n + 181)n^2 - 2(62(-1)^n + 107)n + 15(-1)^n + 33) / 6,$$

$$C_2 = (2n^2 - (3(-1)^n + 5)n + 4(-1)^n + 4) / 4, C_3 = (((-1)^n + 1)n) / 4.$$

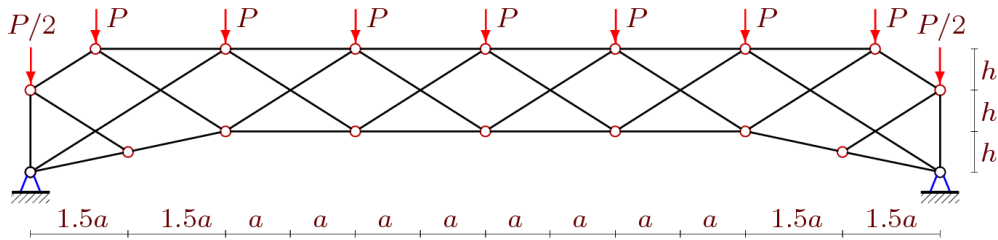


Рис. 7. Ферма, $n=4$

2.8. Графики зависимости прогиба от числа панелей

Приведем графики прогибов ферм как функций числа панелей для всех семи схем. Введем обозначение для относительного безразмерного прогиба: $\Delta' = \Delta EF / (P_0 L)$, где P_0 — суммарная нагрузка на верхний пояс фермы, L — длина пролета. На рисунке 8 приведены кривые зависимости прогибов ферм от числа панелей при $L=100$ м.

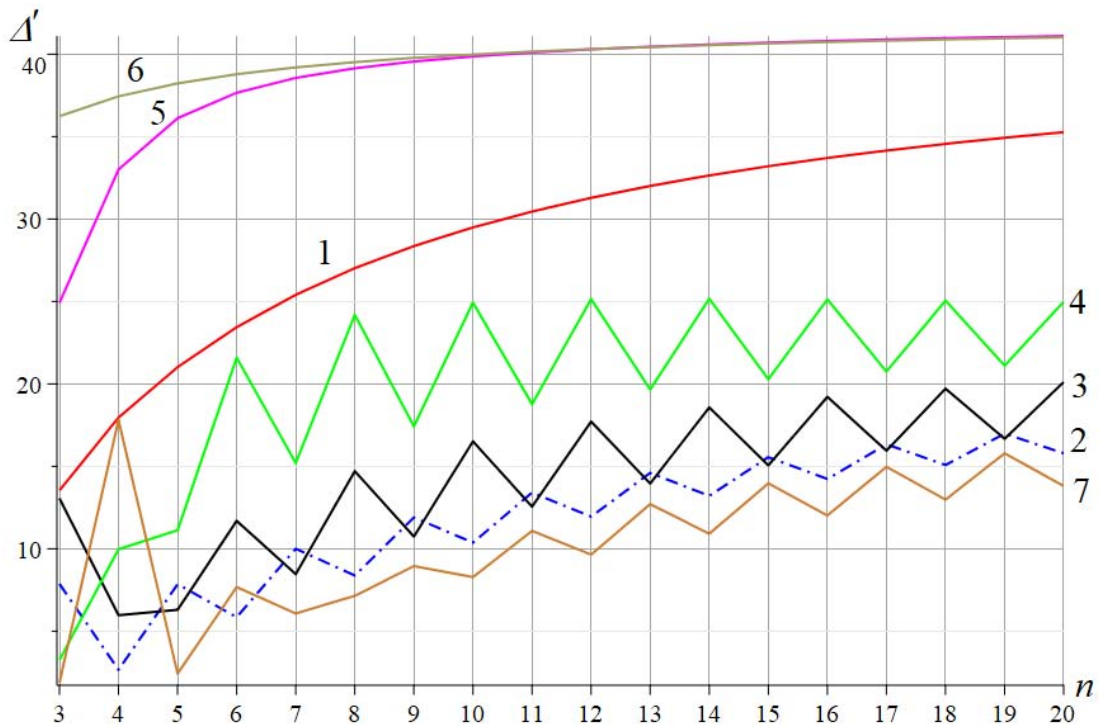


Рис. 8. Кривые зависимостей относительных прогибов ферм 1-7

Высота у всех ферм одинаковая - 5 м, размер панели a зависит от отношения L/n , высота h — от числа панелей по высоте. Для трех ферм (1, 5 и 6) наблюдается монотонное увеличение прогиба при увеличении числа панелей. Это объясняется отсутствием в решениях слагаемых переменных знаков с коэффициентом $(-1)^n$. Три фермы №3, №4 и №7 распорные. В этих фермах от вертикальных сил возникают горизонтальные реакции в неподвижных шарнирах. Однако существенным образом это на повышение жесткости сказалось только в ферме №7. Среди всех рассмотренных схем это самая жесткая при большом числе панелей. В начале же графика кривая №7 имеет большой скачок. При $n=4$ жесткость фермы многократно меньше, чем при $n=3$ и $n=5$. Таким образом, изменив число панелей всего на одну, можно существенно повысить или понизить жесткость конструкции. Фермы №1, №2 имеют сдвоенные боковые опоры. Эти конструкции должны были бы иметь заметно большую жесткость, однако это проявилось только для схемы №2. Графики полученных решений показывают, что в принятой постановке задачи (постоянный, не зависящий от числа панелей, пролет и одинаковая для всех n суммарная нагрузка) относительный прогиб во всех схемах монотонно или скачкообразно увеличивается с увеличением числа панелей.

3. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Для нескольких схем статически определимых симметричных ферм с различным числом опор выведены аналитические зависимости прогиба от числа панелей. Построенные кривые выявили особенности схем ферм одного типа. Отмечены наименее и наиболее жесткие схемы ферм. Предлагаемые схемы могут быть использованы в строительстве и машиностроении как несущие элементы, а выведенные формулы как тестовые для оценки численных решений и оптимизации конструкции.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Hutchinson R.G., Fleck N.A.** Microarchitected cellular solids – The hunt for statically determinate periodic trusses // *ZAMM Zeitschrift fur Angewandte Mathematik und Mechanik*. 2005. № 9(85). С. 607–617. DOI:10.1002/zamm.200410208.
2. **Rakhmatulina, A.R., Smirnova A.A.** The dependence of the deflection of the arched truss loaded on the upper belt, on the number of panels // *Science Almanac*. 2017. № 2–3(28). С. 268–271. DOI:10.17117/na.2017.02.03.268.
3. **Voropay, R., Domanov E.** Analytical solution of the problem of shifting a movable support of a truss of arch type in the Maple system // *Postulat*. 2019. (1).
4. **Kazmiruk I.Y.** On the arch truss deformation under the action of lateral load // *Science Almanac*. 2016. № 3–3(17). С. 75–78. DOI:10.17117/na.2016.03.03.075.
5. **Kirsanov M.** *Trussed Frames and Arches: Schemes and Formulas*. Newcastle upon Tyne, GB: Cambridge Scholars Publishing Lady Stephenson Library, 2020. 178 с.
6. **Kirsanov M.** *Planar Trusses: Schemes and Formulas*. Newcastle upon Tyne, GB: Cambridge Scholars Publishing Lady Stephenson Library, 2019. 198 с.
7. **Petrenko V.F.** The natural frequency of a two-span truss // *AlfaBuild*. 2021. № 20. С. 2001. DOI:10.34910/ALF.20.1.
8. **Vorobev O.V.** Bilateral Analytical Estimation of the First Frequency of a Plane Truss // *Construction of Unique Buildings and Structures*. 2020. № 7(92). С. 9204–9204. DOI:10.18720/CUBS.92.4.