О НУМЕРАЦИИ ВЕРШИН БЕСКОНЕЧНОГО ДЕРЕВА

Морозов А.В.[1], Пирожков М.А.[2]

[1]Морозов Алексей Валентинович – кандидат физико-математических наук, профессор;
[2]Пирожков Михаил Александрович – старший преподаватель,
кафедра математики,
Военно-космическая академия им.А.Ф. Можайского,
г. Санкт-Петербург

Аннотация: *предлагается новый способ нумерации вершин бесконечного дерева.*
Ключевые слова: *граф, бесконечное дерево, кодирование.*

УДК 519.1

1. Введение

Бесконечные деревья используются в теории кодирования, логике, теории автоматов в связи с анализом ограниченно-детерминированных функций [1-3]. В настоящей статье ставится задача нумерации вершин бесконечного дерева числами натурального ряда. Предлагается метод, основанный на приеме кодирования ребер простыми числами [4], при этом номера вершин получаются как произведения номеров ребер, инцидентных данной вершине.

Под *бесконечным деревом* будем понимать конструкцию, изображенную на рис. 1, в которой из корня дерева с номером 1 выходит первый уровень произвольного, в общем случае, счетного множества вершин. Вершины первого уровня, посредством ребер, порождают конечный или счетный набор вершин второго уровня. Аналогично третий и последующие уровни, причем число уровней также может быть конечным или счетным. Некоторые вершины любого уровня могут оказаться *листьями* – из них не выходит ни одного ребра. В этом случае получается *неполное бесконечное дерево*. Если на всех уровнях имеется счетное число ребер, то такое бесконечное дерево назовем *полным*. На рис. 1 представлены только три уровня, т.к. невозможно изобразить ни счетное множество вершин первого уровня, ни счетное множество счетных множеств вершин второго уровня, а тем более последующих уровней.

2. Алгоритм нумерации вершин

Чтобы занумеровать вершины бесконечного дерева, осуществим его обход по уровням, начиная с первого. Алгоритм основан на идее кодирования ребер дерева значениями простых чисел (ПЧ). Ребрам первого уровня присваиваются последовательные значения ПЧ:

p_1=2, p_2=3, p_3=5, … , $p_N = r$,

где N −порядковый номер сколь угодно большого ПЧ r. Те же значения имеют и вершины первого уровня:

v_1=2, v_2=3, v_3=5, … , $v_N = r$.

Таким образом, множество номеров вершин первого уровня имеет вид:

$N_1 = < p_i, i = 1, \dots, \infty > \ = < p_1 , p_2 , p_3, \dots > = <$ 2, 3, 5, 7, 11,…>.

Переходим к нумерации вершин второго уровня. Для этого всем ребрам, выходящим из вершины первого уровня с номером p_k ($1 < k < N$), присваиваем последовательно значения ПЧ начиная с p_k, т.е. значения p_k, p_{k+1} , … . Так, если номер вершины первого уровня был 5, то ребра, инцидентные этой вершине, нумеруются ПЧ 5, 7, 11, 13, …. Тогда номер вершины второго уровня v_l будет равен произведению номера вершины первого уровня v_k на номер инцидентного этой вершине ребра p_l, т.е. $v_l = v_k \cdot p_l$. Другой способ получить номер вершины второго уровня – перемножить номера ребер, следующих из корня в данную вершину: $v_l = p_k \cdot p_l$. Например, номер вершины 55 получается от перемножения номеров ребер 5 и 11, следующих из корня 1 через вершину первого уровня с номером 5. Отсюда следует, что множества номеров вершин второго, а также третьего уровней в общем случае имеют вид:

$N_2 = < p_i \cdot p_j, 2 \le p_i \le p_j, i = 1, \dots, \infty, j = 1, \dots, \infty > \ =$

< 2·2, 2·3, 2·5, … ; 3·3, 3·5, 3·7, … ; 5·5, 5·7, 5·11, … >,

$N_3 = < p_i \cdot p_j \cdot p_k, 2 \le p_i \le p_j \le p_k, \ i = 1, \dots, \infty, j = 1, \dots, \infty, \ k = 1, \dots, \infty > \ =$

=<2·2·2, 2·2·3, 2·2·5, …; 2·3·3, 2·3·5, 2·3·7, …; 3·3·3, 3·3·5, 3·3·7, …>.

Аналогичным образом кодируются вершины и последующих уровней.

3. Множество вершин полного бесконечного дерева счетно

Рассмотрим произвольную вершину нашего дерева с номером

$n = 2^{k_1} \cdot 3^{k_2} \cdot 5^{k_3} \cdot \dots \cdot p^{k_l}$, $k_i \ge 0$, $i = 1, \dots, l$.

Легко видеть, что в номере заложена информация как об уровне расположения вершины, так и месте вершины в уровне. Например, число 935 = 5·11·17 является номером вершины третьего уровня (три сомножителя), смежной вершине второго уровня с номером 5·11=55, которая в свою очередь смежна вершине с номером 5. Эта вершина является третьей по счету в уровне 3, т.к. ПЧ 17 будет третьим от ПЧ 11.

Таким образом, построено взаимно-однозначное соответствие между вершинами полного бесконечного дерева и множеством натуральных чисел, т.е. установлена счетность множества вершин [5].

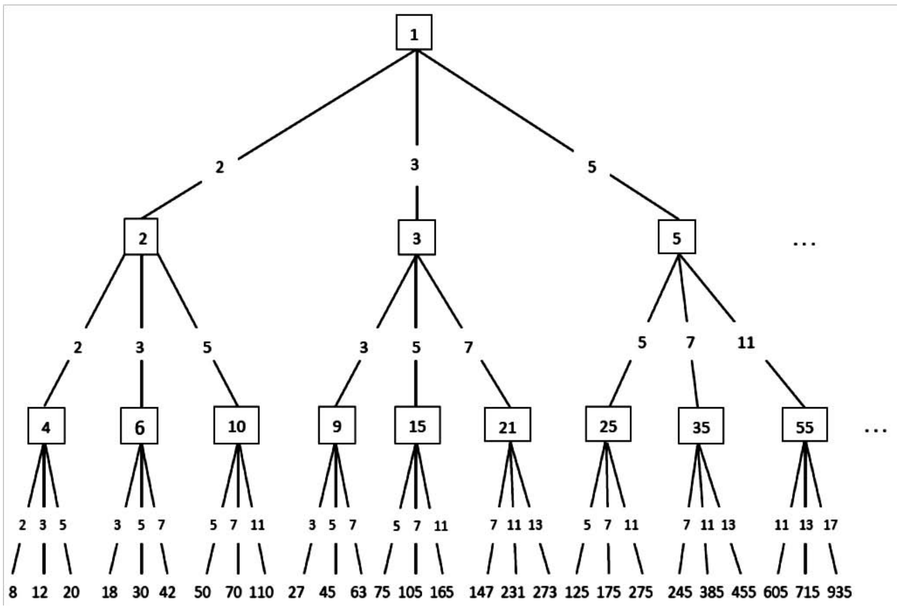

Рис. 1. Бесконечное дерево

Список литературы

1. *Возенкрафт Дж., Рейффен Б.* Последовательное декодирование. М.: Издательство «Иностранная литература», 1963. 153 с.
2. *Кобринский Н.Е., Трахтенброт Б.А*. Введение в теорию конечных автоматов. М.: Физматгиз, 1962. 404 с.
3. *Редькин Н.П*. Дискретная математика. СПб.: Издательство «Лань», 2003. 96 с.
4. *Морозов А.В., Пирожков М.А*. Новый способ компьютерного представления графов // Academy. № 5 (32), 2018. С. 5-6.
5. *Уилсон Р.* Введение в теорию графов. М.: Мир, 1977. 207 с.