УДК 624.04

АНАЛИТИЧЕСКИЙ РАСЧЕТ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ СТЕРЖНЕВОЙ СИСТЕМЫ

М. Н. КИРСАНОВ, д-р физ.-мат. наук, проф.
Московский энергетический институт (технический университет)
111250 Москва, Красноказарменная 14, mpei2004@yandex.ru

В системе Maple решается задача статики пространственной статически определимой упругой фермы. Приведен алгоритм расчета. Использован индуктивный метод получения решения при произвольном числе стержней фермы. В зависимости прогиба от высоты фермы обнаружена особенность, при которой прогиб растет неограниченно. Определяются оптимальные размеры конструкции.

***Ключевые слова**: пространственная ферма, прогиб, индуктивный метод*

Аналитические методы для расчета пространственных стержневых систем (ферм) используют редко. Это связано со сложностью моделирования и громоздкостью конечных результатов, преобразование и упрощение которых, как правило, не дают нужного эффекта. Сложные труднообозримые выражения, выдаваемые распространенными системами символьной математики (Maple [1,2], Mathematica [3, 4] и др.) не позволяют использовать аналитические методы в полной мере. Однако бывают исключения. Существуют достаточно сложные фермы, в которых методами компьютерной математики можно не только найти усилия и прогибы, но и обнаружить интересные и в какой-то степени неожиданные эффекты. Одна из таких ферм рассмотрена в настоящей работе.

Алгоритм расчета. Для моделирования конструкции требуется задать координаты шарниров и способ соединения их стержнями. Введем массив (вектор) координат x_j, y_j, z_j, j=1,..,m, где m — общее число узлов (шарниров) и массивы номеров концов стержней. Стержни фермы условно представим в виде векторов, для которых N_i — номер начала стержня, K_i — номер конца стержня i. Направления стержней выбираем произвольно, на решение задачи выбор направления не влияет. Проекции стержня: $l_{x,i} = x_{K_i} - x_{N_i}$, $l_{y,i} = y_{K_i} - y_{N_i}$, $l_{z,i} = z_{K_i} - z_{N_i}$. Усилия в стержнях будем определять методом вырезания узлов. Из направляющих косинусов составлена матрица G размером $n_0 \times n_0$, где n_0 — число стержней фермы, включая опорные. Для всех стержней: $G_{3N_i-2,i} = l_{x,i}/l_i$, $G_{3N_i-1,i} = l_{y,i}/l_i, G_{3N_i,i} = l_{z,i}/l_i$ и для всех стержней, кроме опорных: $G_{3K_i-2,i} = -l_{x,i}/l_i$, $G_{3K_i-1,i} = -l_{y,i}/l_i$, $G_{3K_i,i} = -l_{z,i}/l_i$. Систему уравнений равновесия узлов представим в векторном виде

$$G\bar{S} = \bar{B}, \tag{1}$$

где $\bar{B} = \{P_{x,1}, P_{y,1}, P_{z,1}, ..., P_{x,m}, P_{y,m}, P_{z,m}\}$ — вектор правых частей (внешних нагрузок, приложенных к узлам), $\bar{S} = \{S_1, ..., S_{n_0}\}$ — вектор усилий в стержнях.

Система (1) состоит из уравнений равновесия узлов. Для каждого узла записываются уравнения в проекциях на оси x, y и z.

Ферма. Рассмотрим статически определимую ферму, состоящую из $6n+9$ стержней и $2n+5$ шарниров, и трех опор. Стержни предполагаются упругими, и жесткости их равны. По окружности радиуса R расположены $2n$ стержней. Усилия в этих стержнях будем обозначать S. В плоскости окружности находятся три стержня рамки: две вертикальные стойки высотой H (усилия V) и один горизонтальный ригель длиной $2R$ (усилие O). Шарниры рамки и шарниры на окружности соединены стержнями с двумя опорными узлами A (сферический шарнир) и B (цилиндрический шарнир с осью на прямой AB). Усилия в стержнях, соединенных с шарнирами на окружности, будем обозначать T_i, усилия в четырех стержнях, соединенных с рамкой, – D (рис. 1). Опоры лежат симметрично от центра окружности на расстоянии h на одной прямой с центром (рис. 2, 3). К вершине C приложена вертикальная сила P. Здесь же имеется третья опора, моделируемая горизонтальным стержнем в плоскости окружности. На рисунках опоры не изображены. Таким образом, в задаче, включая шесть усилий в опорах, $n_0 = 6n+15$ неизвестных.

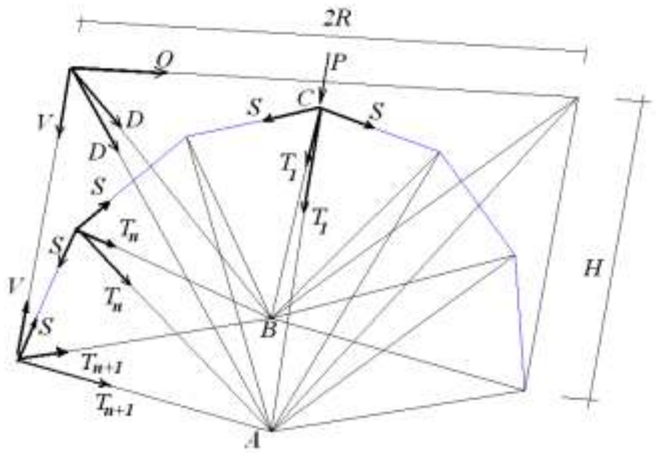

Рис. 1

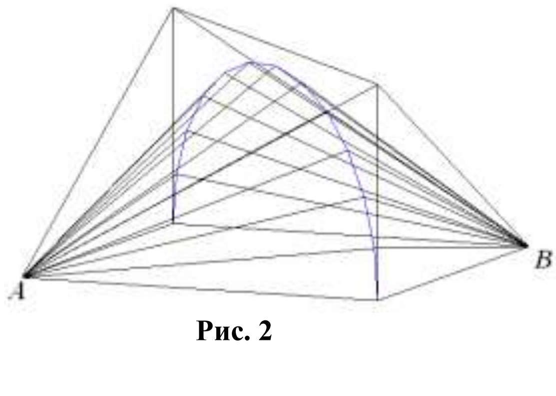

Рис. 2

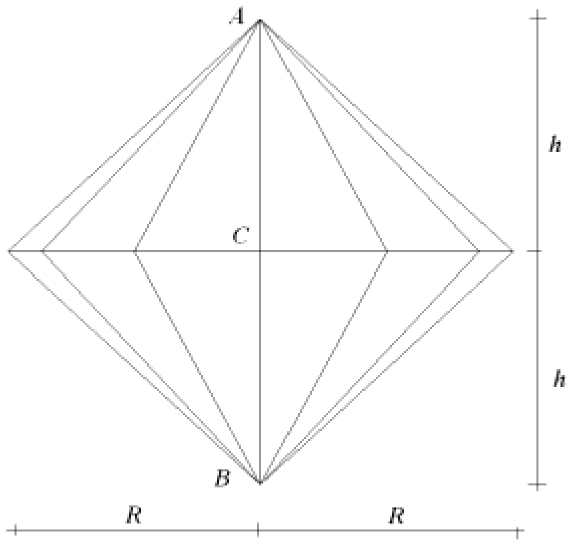

Рис. 3

Расчет. Все размеры и длины стержней отнесем к радиусу: $H = kR,\ h = mR$. Длины стержней, отнесенные к R:

$$l_S = 2\cos\beta,\ l_T = \sqrt{1+m^2},\ l_D = \sqrt{1+k^2+m^2},\ l_V = k,\ l_O = 2\,,$$

где индексом обозначено соответствующее усилие и $\beta = (\pi - \alpha)/2,\ \ \alpha = \pi/(2n)$.

Если исключить из системы стержни с одинаковыми (в силу симметрии задачи) усилиями, то методом вырезания узлов получим систему шести уравнений, из которой получим усилия:

$$S = (Pk/d)\sin\gamma,\ \ T_1 = P((2n-1)k\,\mathrm{tg}\,\gamma\cos\beta - m\sin\beta)/d,$$
$$T_i = -(Pk/d)\,\mathrm{tg}\,\gamma\cos\beta,\ \ i = 2,...,n,\ T_{n+1} = T_n/2,$$
$$D = P\sin\gamma\sin\beta\sqrt{1+k^2+m^2}\,/(2d),\ \ O = -(P/d)\sin\gamma\sin\beta,\ \ V = kO,$$

где $d = 2(m\cos\gamma\sin\beta - 2nk\cos\beta\sin\gamma)$, $\cos\gamma = 1/\sqrt{1+m^2}$.

Процедура получения решения при произвольном числе n имеет индуктивный характер. В общем случае сначала задача решается при $n = 3$, затем при $n = 4$ и т. д. Составляется последовательность меняющихся коэффициентов в полученных ответах, затем с помощью оператора **rgf_findrecur** из пакета **genfunc** системы компьютерной математики Maple [1,2] определяется рекуррентное уравнение для коэффициентов, которое решается встроенным оператором **rsolve** [5]. В данном примере, однако, коэффициенты оказались достаточно простыми и прибегать к помощи Maple здесь потребовалось лишь для решения системы линейных уравнений и преобразований.

Очевидно, при $d \to 0$ усилия в стержнях неограниченно растут. При $k = k^* = \dfrac{1}{2n}\mathrm{ctg}(\pi/(4n))$ выражение d обращается в нуль. Отметим, что значение k^* не зависит от длины конструкции (т.е. m) и определяет только критическую высоту $H = kR$.

По формуле Максвелла-Мора найдем прогиб вершины C

$$\Delta = P\frac{2(nS^2 l_S + V^2 l_V + 2D^2 l_D + (T_1^2 l_T + 2(n-1)T_k{}^2 + 2T_{n+1}{}^2)l_T) + O^2 l_O}{EF}.$$

При $n \to \infty$ имеется асимптотика

$$\lim_{n\to\infty} \Delta = \frac{(\pi k - 2)^2 (1+m^2)^{3/2} + 2(1+k^2+m^2)^{3/2} + 2\pi k^2 + 4k^3 + 4}{2(\pi k - 2)^2 EF}.$$

Одновременно знаменатель этого выражения указывает и на предельное значение отмеченной особенности $k^* \to 2/\pi$.

На рис. 4 показана зависимость прогиба от относительной высоты фермы k при $n=3$ и $EF=1$ для различных значений m. Кривые обнаруживают как особенность при $k=k^*$, так и минимумы, которые находятся численно из решения уравнения $\partial\Delta/\partial k = 0$ (оператор **fsolve**). При $m=2$ имеем $k=3.503$, с увеличением m это значение растет. На рис. 5 дана аналогичная зависимость для различных n при $m=3$.

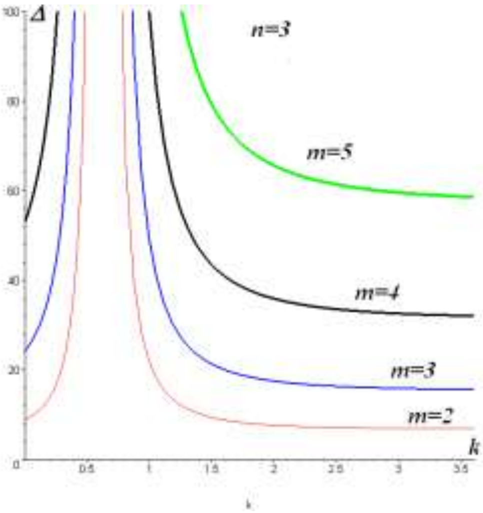

Рис. 4

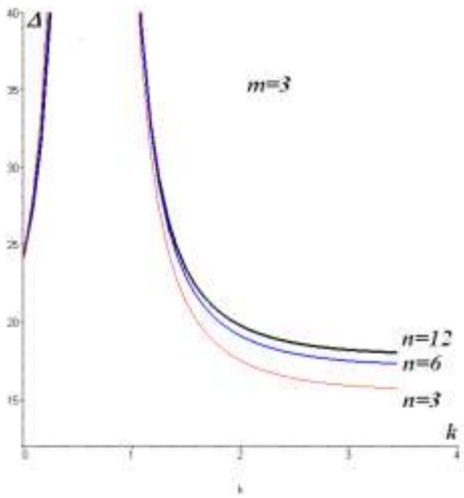

Рис. 5

Выводы. Аналитический метод в сочетании с индуктивным позволил получить простые выражения для усилий, асимптотику прогиба и выявить характерные особенности конструкции, когда во внешне благополучной ферме при определенном сочетании параметров усилия в стержнях и прогибы растут неограниченно.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты 09-01-00756-а, 09-08-01184-а).

Л и т е р а т у р а

1. *Дьяконов В.П.* Maple 10/11/12/13/14 в математических расчетах. — М.: ДМК-Пресс, 2011.
2. *Кирсанов М. Н.* Практика программирования в системе Maple. — М.: Издательский дом МЭИ, 2011. — 208 с.
3. *Дьяконов В.П.* Mathematica 5/6/7. Полное руководство. — М.: ДМК, 2009. — 624 с.
4. *Кристалинский Р. Е., Шапошников Н. Н.* Решение вариационных задач строительной механики в системе Mathematica. — СПб.: Лань, 2010. — 240 с.
5. *Кирсанов М. Н., Кленова И. Г.* Индуктивный метод исследования колебаний систем с периодической структурой//Всероссийской научно-практической конференции. "Математика, информатика, естествознание в экономике и обществе". МФЮА. 16-17.11.09 г. Москва с. 112-113.

MN Kirsanov, Dr. Sci. Sciences, Prof.,
MPEI (TU)

ANALYTICAL CALCULATION OF THE SPATIAL
ROD SYSTEM

The system Maple is used to solve the statics problem of an elastic space statically determinate truss. The algorithm of calculation is given. The inductive method of obtaining solutions for an arbitrary number of rods in the farm is used. The relation of the height of the truss on the length detected the value, for which the deflection increases indefinitely. Optimal truss size is found.

Key words: space truss, the deflection, the inductive method