

УДК 624.04

DOI: 10.22363/1815-5235-2018-14-2-105-111

**АНАЛИТИЧЕСКИЙ РАСЧЕТ ПРОГИБА  
БАЛОЧНОЙ ФЕРМЫ С ДВОЙНЫМИ РАСКОСАМИ**

М.Н. КИРСАНОВ

Национальный исследовательский университет «МЭИ»  
Красноказарменная ул., 14, Москва, Россия, 111250*(поступила в редакцию: 11 ноября 2017 г.; принята к публикации: 05 марта 2018 г.)*

Статически определимая плоская ферма имеет прямолинейные пояса и треугольную решетку, состоящую из сдвоенных раскосов. Четыре опорные связи делают ее внешне статически неопределимой. Дается вывод формулы зависимости прогиба от ее размеров и числа панелей. Усилия в стержнях определяются в символьной форме методом вырезания узлов из решения системы линейных уравнений в системе компьютерной математики Maple. Для определения прогиба используется формула Максвелла – Мора. Стержни (кроме жестких опорных) предполагаются упругими с одинаковой жесткостью. Обобщение отдельных решений на произвольное число панелей производится методом индукции. Операторы системы Maple, опираясь на данные расчетов, дают линейные однородные рекуррентные уравнения для коэффициентов искомой формулы. Решениями этих уравнений являются общие члены полученных последовательностей. Получены и сопоставлены формулы для трех типов нагрузок (равномерная нагрузка узлов нижнего и верхнего поясов и сосредоточенная сила в середине пролета). Кривые зависимости прогиба от числа панелей имеют слабовыраженные минимумы. Выведены зависимости усилий в наиболее сжатых и растянутых стержнях от числа панелей. Даны асимптотические по числу панелей оценки решений при фиксированном пролете конструкции и заданной общей нагрузке.

**Ключевые слова:** ферма, решетка фермы, Maple, прогиб

**Постановка задачи.** Существующие пакеты символьной математики на основе известных алгоритмов позволяют сравнительно легко получать аналитические решения задач строительных конструкций. Однако, область применимости таких решений будет невелика, если в итоговых формулах имеются только размеры конструкции, нагрузка и параметры материала. В задачах о фермах важно учесть и число панелей, если ферма имеет регулярную структуру. Помимо универсальности такое решение приобретает еще одно свойство – возможность простого расчета конструкций с большим числом стержней без потери точности, характерной для численных методов. Обобщение решений на произвольное число панелей возможно методом индукции. Именно так были получены решения для прогиба плоских [1–7] и пространственных [8] ферм. Этим же методом рассчитывается прогиб предлагаемой конструкции балочной фермы на рис. 1.

**Схема фермы.** Решетка фермы состоит из сдвоенных раскосов длиной  $c = \sqrt{h^2 + a^2}$ , образующих жесткие треугольники со стержнями верхней и нижней панелей, и стоек длиной  $b$ . Кроме обычных для балочных ферм опор, ферма опирается на дополнительную горизонтальную боковую опору. Несмотря на это, задача статически определима. Действительно, в ферме с  $n$  панелями в половине пролета содержится  $8n + 2$  соединительных узлов (шарниров) и

$m = 16n + 4$  стержней, включая четыре опорные. Таким образом, стандартная схема расчета фермы, по которой сначала определяются реакции опор (здесь их четыре), а потом последовательным вырезанием узлов находят усилия в стержнях, не проходит. Для решения задачи необходимо составить уравнения равновесия всех узлов и найти решение системы линейных уравнений. Заметим также, что метод сечений Риттера в этой ферме применим только для крайних панелей.

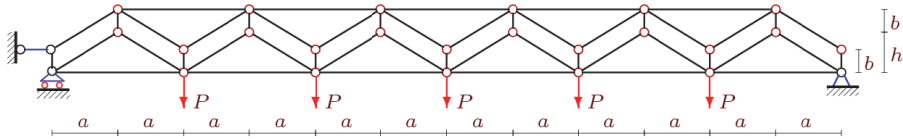


Рис. 1. Ферма при  $n = 3$ . Нагрузка на нижний пояс  
[Fig. 1. Truss at  $n = 3$ . The load on the bottom chord of truss]

Система компьютерной математики Maple позволяет решить эту задачу в символьной форме. Пользуясь программой [9] и опытом ее применения [1–7] при решении аналогичных задач для плоских ферм, зададим координаты узлов. Начало координат выберем в левой подвижной опоре. Нумерация стержней и узлов применительно к случаю  $n = 2$  дана на рис. 2. Соответствующий фрагмент программы на языке Maple имеет вид

```
> for i to 2*n+1 do
  x[i]:=2*a*i-2*a; y[i]:=0;
> x[i+2*n+1]:=2*a*i-2*a; y[i+2*n+1]:=b;
> end:
> for i to 2*n do
  x[i+4*n+2]:=2*a*i-a; y[i+4*n+2]:=h;
  x[i+6*n+2]:=2*a*i-a; y[i+6*n+2]:=h+b;
end:
```

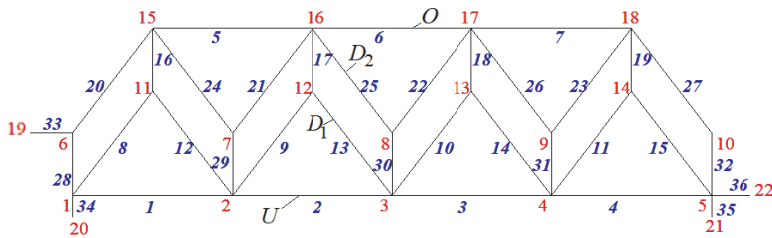


Рис. 2. Номера узлов и стержней при  $n = 2$   
[Fig. 2. Nodes and rods number at  $n = 2$ ]

Структуру решетки зададим векторами, содержащими в своих координатах номера концов стержней:

```
> for i to 2*n do
> N[i]:=[i,i+1];
> N[i+4*n-1]:=[i+4*n+2,i];
> N[i+6*n-1]:=[i+4*n+2,i+1];
> N[i+8*n-1]:=[i+4*n+2,i+6*n+2];
> N[i+10*n-1]:=[i+2*n+1,i+6*n+2];
> N[i+12*n-1]:=[i+2*n+2,i+6*n+2];
> end:
> for i to 2*n-1 do N[i+2*n]:=[i+6*n+2,i+6*n+3]; end:
> for i to 2*n+1 do N[i+14*n-1]:=[i,i+2*n+1]; end:
```

Матрица уравнений равновесия состоит из направляющих косинусов усилий, вычисленных по координатам  $\mathbf{N}[i][1]$ ,  $\mathbf{N}[i][2]$ , концов стержней и их длин  $L[i]$ . Заполнение матрицы идет в цикле по числу стержней  $m$ :

```
> for i to m do
>   Lxy[1]:=x[N[i][2]]-x[N[i][1]]:
>   Lxy[2]:=y[N[i][2]]-y[N[i][1]]:
>   L[i]:=sqrt(Lxy[1]^2+Lxy[2]^2);
> for j to 2 do
>   k:=2*N[i][2]-2+j:
>   if k<=m then G[k,i]:=-Lxy[j]/L[i]:fi;
>   k:=2*N[i][1]-2+j:
>   if k<=m then G[k,i]:= Lxy[j]/L[i]:fi;
> od;
> od:
```

Определим по формуле Максвелла – Мора прогиб фермы под действием равномерной нагрузки, приложенной к узлам нижнего пояса. В формуле учитываются только продольные усилия:

$$\Delta = \sum_{i=1}^{m-4} S_i s_i l_i / (EF),$$

где  $S_i$  – усилия от действия внешней нагрузки;  $s_i$  – усилия от единичной вертикальной нагрузки, приложенной к среднему узлу нижнего пояса (где измеряется вертикальное смещение);  $l_i$  – длины стержней;  $m$  – число стержней, включая опорные стержни.

Общий вид результата для разного числа панелей не меняется (свойство регулярности конструкции) и имеет вид

$$EF\Delta = PC_n(a^3 + 2bh^2 + c^3) / h^2. \quad (1)$$

Коэффициент  $C_n$  образует последовательность 3, 52, 267, 848, 2075, 4308, 7987, 13632, 21843, 33300... . С помощью оператора **rgf\_findrecur** из пакета **genfunc** системы Maple можно найти рекуррентное уравнение, которому удовлетворяют члены последовательности:

$$C_n = 5C_{n-1} - 10C_{n-2} + 10C_{n-3} - 5C_{n-4} + C_{n-5}.$$

Решение этого уравнения дает оператор **rsolve**:

$$C_n = n^2(10n^2 - 1) / 3.$$

Аналогичную форму (1) имеет решение в случае загрузки верхнего пояса (рис. 3). Коэффициент в формуле имеет вид

$$C_n = 2n^2(5n^2 + 1) / 3.$$

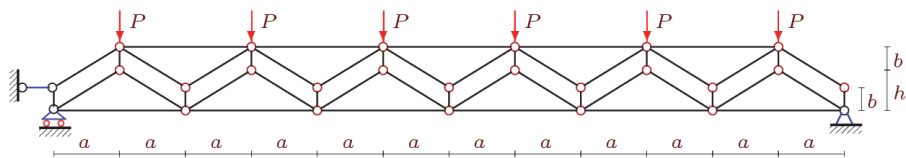


Рис. 3. Нагрузка на верхний пояс  
[Fig. 3. The load on the upper belt]

При определении прогиба фермы от действия одной сосредоточенной силы в середине нижнего пояса формула Максвелла – Мора упрощается

$$\Delta = P \sum_{i=1}^{m-4} s_i^2 l_i / (EF).$$

Коэффициент в (1) в этом случае имеет вид

$$C_n = n(8n^2 + 1) / 3.$$

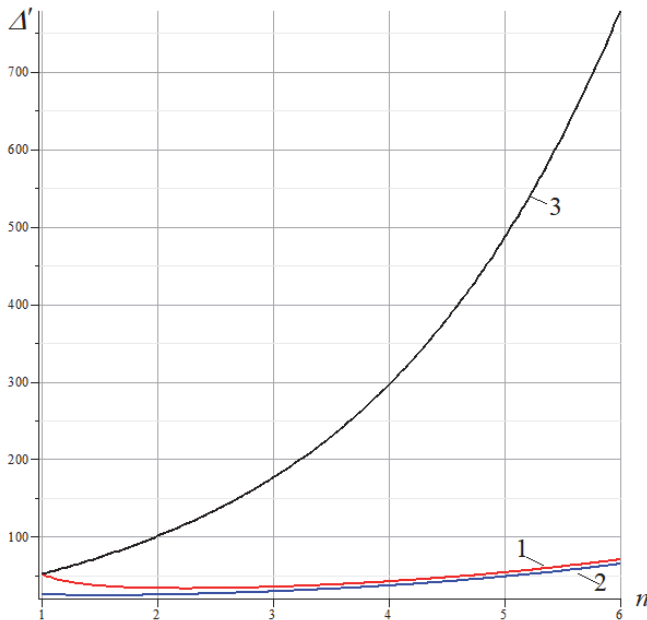


Рис. 4. Зависимость прогиба от числа панелей,  $L = 100$  м,  $b = 2$  м,  $h = 5$  м:

1 – нижний пояс; 2 – верхний пояс; 3 – сосредоточенная сила

[Fig. 4. Dependence of the deflection on the number of panels,  $L = 100$  m,  $b = 2$  m,  $h = 5$  m:

1 – lower belt; 2 – upper belt; 3 – concentrated force]

На рис. 4 даны кривые полученных зависимостей при фиксированной длине пролета  $L = 4an = 100$  м и заданной общей нагрузке  $P_0$ . При загрузке нижнего пояса  $P_0 = P(2n-1)$ , верхнего пояса  $P_0 = P(2n)$ , для сосредоточенной силы  $P_0 = P$ . Введено обозначение для безразмерного прогиба  $\Delta' = \Delta EF / (P_0 L)$ .

Слабовыраженный минимум для случая распределенных нагрузок приходится на нереально малые числа панелей. В частности, для заданного пролета соответствующая длина панели должна быть равной 12 м. Однако для других сочетаний нагрузок и размеров фермы наличие этой особенности может оптимизировать конструкцию по жесткости.

**Усилия в критических стержнях и асимптотика.** Для оценки прочности и устойчивости фермы полезно иметь формулы для усилий в наиболее сжатых и растянутых стержнях конструкции. Критическими для данной фермы являются стержни в середине пролета. Выделим четыре стержня: сжатый стержень  $O$  в верхнем поясе,  $U$  – растянутый стержень в нижнем и два раскоса  $D_1, D_2$  (рис. 2). Индукцией по результатам расчета всего шести ферм получаем следующие значения

$$O = -Pn^2 a / h, \quad U = P(2n^2 - 1)a / (2h), \quad D_1 = -P(2n^2 - 1)c / (2h), \quad D_2 = Pn^2 c / h.$$

Коэффициенты в этих формулах оказались достаточно простыми, и операторы системы Maple для их вывода привлекать не потребовалось.

С помощью операторов Maple можно найти и асимптотические свойства полученных решений для прогиба, показывающие общий характер зависимостей при фиксированной нагрузке и заданном пролете. Для распределенных нагрузок рост имеет кубический характер, для сосредоточенной – параболический четвертого порядка:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Delta_1 / n^3 = \lim_{n \rightarrow \infty} \Delta_2 / n^3 = 5(h + 2b) / (3L),$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Delta_3 / n^4 = 10(h + 2b) / (3L).$$

Обзор аналитических решений задач о прогибе плоских ферм приведен в [5].

**Выводы.** Предлагаемая схема статически определимой фермы является регулярной и допускает аналитическое решение для величины прогиба при различных нагрузках. Основным достоинством полученного решения является наличие простой функциональной зависимости от числа панелей. Это позволяет применять его для широкого класса подобных ферм, в том числе и для ферм с большим числом стержней, что актуально при современной тенденции строительства большепролетных сооружений.

© Кирсанов М.Н., 2018

### С п и с о к л и т е р а т у р ы

1. Кирсанов М.Н. Аналитический расчет балочной фермы с решеткой типа «Butterfly» // Строительная механика и расчет сооружений. 2016. № 4 (267). С. 2–5.
2. Kirsanov M.N., Razananairina P.C. The formula for deflection of truss with cases of kinematic variability. Postulat. 2017. No 9.
3. Tinkov D.V., Safonov A.A. Design Optimization of Truss Bridge Structures of Composite Materials // Journal of Machinery Manufacture and Reliability. 2017. Vol 46. № 1. P. 46–52.
4. Bolotina T. D. The deflection of the flat arch truss with a triangular lattice depending on the number of panels // Вестник научных конференций. 2016. № 4–3 (8). С. 7–8.
5. Тиньков Д.В. Сравнительный анализ аналитических решений задачи о прогибе ферменных конструкций // Инженерно-строительный журнал. 2015. № 5 (57). С. 66–73.
6. Кирсанов М.Н. Статический анализ и монтажная схема плоской фермы // Вестник Государственного университета морского и речного флота имени адмирала С.О. Макарова. 2016. № 5 (39). С. 61–68.
7. Kirsanov M. An inductive method of calculation of the deflection of the truss regular type // Architecture and Engineering. 2016. Т. 1. № 3. P. 14–17.
8. Кирсанов М.Н. Анализ прогиба фермы пространственного покрытия с крестообразной решеткой // Инженерно-строительный журнал. 2016. № 4 (64). С. 52–58.
9. Кирсанов М.Н. Maple и MapleT. Решения задач механики. СПб.: Изд-во «Лань», 2012. 512 с.

#### Об авторе:

**Кирсанов Михаил Николаевич** – профессор, Национальный исследовательский университет «Московский энергетический институт», профессор, МГУ им. М.В. Ломоносова. Автор десяти монографий и учебных пособий по математике и механике, член Национального комитета России по теоретической и прикладной механике. *Область научных интересов:* строительная механика, аналитические решения, Maple, дифференциальные уравнения, дискретная математика, методы искусственного интеллекта, реология. *Контактная информация:* e-mail – c216@ua.ru

**Для цитирования:**

Кирсанов М.Н. Аналитический расчет прогиба балочной фермы с двойными раскосами // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2018. Т. 14. № 2. С. 105–111. DOI: 10.22363/1815-5235-2018-14-2-105-111.

**R e f e r e n c e s**

1. Kirsanov, M.N. (2016). Analytical calculation of truss girder with the «Butterfly» lattice. *Structural Mechanics and Analysis of Constructions*, No 4, 2–5. (In Russ.)
2. Kirsanov, M.N., Razananairina, P.C. (2017). The formula for deflection of truss with cases of kinematic variability. *Postulat*, No 9.
3. Tinkov, D.V., Safonov, A.A. (2017). Design Optimization of Truss Bridge Structures of Composite Materials. *Journal of Machinery Manufacture and Reliability*, Vol 46, No 1, 46–52.
4. Bolotina, T.D. (2016). The deflection of the flat arch truss with a triangular lattice depending on the number of panels. *Bulletin of Scientific Conferences*, No 4–3 (8), 7–8.
5. Tinkov, D.V. (2015). Comparative analysis of analytical solutions to the problem of truss structure deflection. *Magazine of Civil Engineering*, No 5 (57), 66–73. (In Russ.)
6. Kirsanov, M.N. (2016). Static analysis and mounting diagram of flat truss. *Vestnik Gosudarstvennogo universiteta morskogo i rechnogo flota imeni admirala S.O. Makarova [Bulletin of State University of Marine and River Fleet named after Admiral S.O. Makarov]*, 5 (39), 61–68. (In Russ.)
7. Kirsanov, M. (2016). An inductive method of calculation of the deflection of the truss regular type. *Architecture and Engineering*, 1 (3), 14–17.
8. Kirsanov, M.N. (2016). Analysis of the buckling of spatial truss with cross lattice. *Magazine of Civil Engineering*, (4), 52–58. DOI: 10.5862/MCE.64.5. (In Russ.)
9. Kirsanov, M.N. (2012). Maple i Maplet. Resheniya zadach mekhaniki [Maple and Maplet. Solving the problems of mechanics], St. Petersburg: “Lan” Publ., 512. (In Russ.)

**ANALYTICAL CALCULATION OF THE DEFLECTION  
OF A BEAM TRUSS WITH DOUBLE BRACING**

M.N. KIRSANOV

National Research University “MPEI”

14 Krasnokazarmennaya St., Moscow, 111250, Russian Federation

(received: November 11, 2017; accepted: March 05, 2018)

A statically determinate planar truss has rectilinear belts and a triangular lattice consisting of double braces. The four links make it seemingly statically indeterminate. The derivation of the formula for the dependence of the deflection on its dimensions and the number of panels is given. Forces in rods are determined in symbolic form by cutting out nodes from the solution of a system of linear equations in the system of computer mathematics Maple. To determine the deflection, the Maxwell – Mohr’s formula is used. Rods (except all rigid support) are assumed to be elastic with the same rigidity. The generalization of individual solutions to an arbitrary number of panels is done by induction. Operators of the Maple system from the calculation data yield linear homogeneous recurrence equations for the coefficients of the desired formula. The solutions of these equations give the general terms of the obtained sequences. Formulas for three types of loads are obtained and compared (the uniform loading of the nodes of the lower and upper belts and the concentrated force in the middle of the span). Curves of the dependence of deflection on the number of panels have weakly expressed minima. The dependencies of the forces in the most compressed and stretched rods on the number of

panels are derived. Also given are asymptotic estimates for solutions in accordance with the number of panels in fixed spans of the construction and at a given total load.

**Keywords:** truss, lattice, Maple, deflection

***About the authors:***

***Kirsanov Mikhail Nikolaevich*** – Professor, National Research University “Moscow Power Engineering Institute”, Professor of M.V. Lomonosov Moscow State University. Author of ten monographs and textbooks on mathematics and mechanics, member of the Russian National Committee on Theoretical and Applied Mechanics. *Research interests:* structural mechanics, analytical solutions, Maple, differential equations, discrete mathematics, artificial intelligence methods, rheology. *Contact information:* e-mail – c216@ya.ru

***For citation:***

Kirsanov, M.N. (2018). Analytical calculation of the deflection of a beam truss with double bracing. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 14 (2), 105–111. DOI: 10.22363/1815-5235-2018-14-2-105-111.