УДК 624.031

РАСЧЕТ ВЕЛИЧИНЫ ПРОГИБА ПЛОСКОЙ ФЕРМЫ С ПРОИЗВОЛЬНЫМ ЧИСЛОМ ПАНЕЛЕЙ В СИСТЕМЕ MAPLE

Calculation of the deflection of the planar truss with an arbitrary number of panels in the system Maple

Рахматулина А. Р., студент,

Смирнова А. А., студент,

Национальный Исследовательский Университет «МЭИ»

(Москва, ул. Красноказарменная, 14)

Рецензент: Кирсанов М. Н., доктор физико-математических наук, профессор.

Аннотация

Формула для прогиба статически определимой балочной фермы с параллельными поясами под действием равномерной нагрузки по узлам верхнего пояса получена методом индукции на основе формулы Максвелла-Мора. Решетка фермы имеет шпренгельное усиление. Для коэффициентов искомой зависимости от числа панелей выведены и решены рекуррентные уравнения. Получена асимптотика решения.

Ключевые слова: ферма; Maple; формула; прогиб; индукция.

Summary

The formula for the deflection of a statically determinate beam truss with parallel belts under the action of a uniform load along the nodes of the upper belt was obtained by induction on the basis of the Maxwell-Mora formula. The lattice of the truss has a sprung reinforcement. For the coefficients of the desired dependence on the number of panels, recurrence equations are derived and solved. The asymptotics of the solution is obtained.

Key words: truss; Maple; formula; deflection; induction.

Рассмотрим плоскую ферму высотой $2h$, содержащую n панелей в пролете (рис.1) [1].

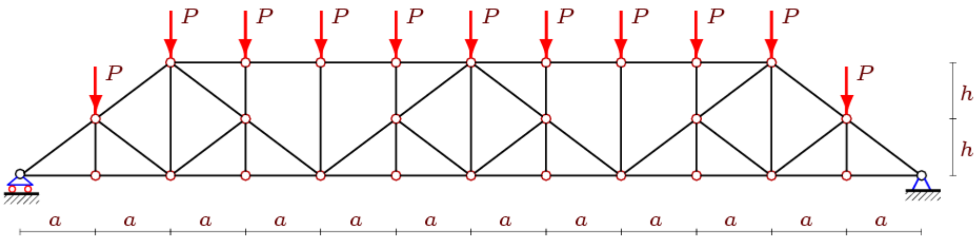

Рис. 1. Ферма при n=3

Длина каждой панели по нижнему поясу равна $4a$. Расчет усилий в стержнях и величины прогиба плоских ферм с заданным числом панелей не представляет особой трудности как численно, так и аналитически и является одной из базовых учебных задач курса строительной механики. Значительно сложнее (и интереснее!) получить подобное решение в аналитической форме для произвольного числа панелей. Это позволит, во-первых, снять традиционную зависимость точности решения от числа панелей, во-вторых, существенно упростить расчет и, в-третьих, даст возможность выполнить асимптотическую оценку решения. Ранее такие исследования и расчеты были выполнены для плоских [2-10], арочных [11-14] и пространственных [15-17] ферм. В этих работах использовался метод индукции и формула Максвелла - Мора в предположении, что стержни фермы работают только на сжатие и растяжение. Метод индукции совместно с операторами Maple применялся также для получения аналитических решений внешне статически неопределимых ферм [18-24], вантовых ферм [25,26] и свайного фундамента [27].

Решение задачи начинается с определения усилий в стержнях фермы [28]. Усилия в стержнях, входящих в формулу Максвелла-Мора

$$\Delta = \sum_{i=1}^{K-3} S_i N_i l_i / (EF)$$

определяются методом вырезания узлов. Здесь введены стандартные обозначения: EF – жесткость стержней, S_i – усилия в стержнях от нагрузки, N_i – усилия в стержнях от действия единичной вертикальной силы, приложенной к среднему узлу нижнего пояса, l_i – длины стержней, K – количество стержней. Опорные стержни, моделирующие шарниры приняты жесткими. Для определения усилий используем программу [28], написанную на языке системы Maple. Фрагмент программы ввода координат узлов (начало координат в левой подвижной опоре) имеет вид

```
> for i to 4*n+1 do
>  x[i]:=a*(i-1); y[i]:=0;
> od:
> for i to 4*n-3 do
>  x[i+4*n+1]:=a*i+a; y[i+4*n+1]:=2*h;
> od:
> for i to 2*n do
>  x[i+8*n-2]:=2*a*i-a;y[i+8*n-2]:=h;
> od:
```

Расчет усилий и определение прогиба производится последовательно для ряда ферм с числом панелей 1, 2,... N. Верхний предел N зависит от длины последовательности коэффициентов, необходимой для выявления закономерности образования этой последовательности. Оказывается, что существуют рекуррентные уравнения, которым подчиняются члены последовательностей коэффициентов искомой зависимости. Эти уравнения дает оператор `rgf_findrecur` системы Maple, работающий с четным количеством аргументов. Решение уравнения можно легко получить с помощью оператора `rsolve`. При этом необходимо подключить еще специальный пакет `genfunc`. Приведем фрагмент программы, который составляет рекуррентную формулу для последовательностей коэффициентов:

```
> n:='n':with(genfunc):
> S:=seq(A[i],i=1..N);
> N1:=nops([S])/2:
> Z:=rgf_findrecur(N1, [S], t,n);
> ZZ:= simplify (rsolve({Z,seq(t(i)=S[i],i=1..N1)},t));
```

Команда **n:='n':** требуется для "очистки" переменной, использованной ранее в программе и имеющей некоторое значение. В переменной **S** хранится исследуемая последовательность. Число начальных значений **N1** получается с помощью команды **nops([S])/2** . Переменная **t** вспомогательная. Эта переменная есть член последовательности в процедуре решения. Полученное рекуррентное уравнение обозначено как **Z**. Решение уравнения (с начальными данными) обозначено как **ZZ**. Оператор **simplify** упрощает результат. Иногда в подобных решениях удобно также использовать оператор **factor**, раскладывающие выражение на сомножители.

Для того, чтобы программа могла правильно найти коэффициенты при a^3, c^3 и h^3, составить последовательности и формулы этих последовательностей, зависящие от числа панелей n, необходимо привести формулу к удобному виду

$$EF\Delta = P(A_n a^3 + C_n c^3 + H_n h^3)/(2h^2),$$

(1)

то есть, на время операции избавиться от знаменателя $2h^2$, который в данном случае будет одинаков при любом n. Поэтому умножим формулу Максвелла-Мора на эту величину. Так, программа составила рекуррентное уравнение для последовательности 3, 30, 143,...., 34680 коэффициентов при a^3:

$$A_n = 4A_{n-1} - 5A_{n-2} + 5A_{n-4} - 4A_{n-5} + A_{n-6}$$

Решение этого уравнения после упрощения имеет вид

$$A_n = 5n^2(2n^2+1)/3 + ((-1)^{n+1}+1)/2. \quad (2)$$

Аналогично рекуррентное уравнение для последовательности 5, 8, 37,...., 288 коэффициентов при c^3 имеет вид: $C_n = 2C_{n-1} - 2C_{n-3} + C_{n-4}$. Последовательность 4, 0, 4,...., 0 коэффициентов при h^3 имеем простую связь: $H_n = H_{n-2}$. Решение этих уравнений имеет вид

$$C_n = 4n^2 + ((-1)^{n+1}+1)/2, \quad H_n = 2((-1)^{n+1}+1). \quad (3)$$

Аналитическая форма зависимости (1-3) позволяет выявить предельное свойство решения. Введем безразмерный прогиб $\Delta' = EF\Delta/(P_s L)$, где $L = 4na$ — пролет фермы, $P_s = (4n-1)P$ — суммарная нагрузка. В системе Maple легко получить предел

$$\lim_{n\to\infty} \Delta'/n = h/(2L).$$

Таким образом, рост относительного прогиба с увеличением числа панелей (при постоянной нагрузке и длине пролета) на бесконечности линейный. Зависимость имеет наклонную асимптоту.

Обзор работ по применению метода индукции в задачах строительной механики (расчет ферм) дан в [29,30].

Библиографический список

1. Кирсанов М. Н. Формулы для оценки жесткости, прочности и устойчивости шпренгельной фермы // Строительство: Новые технологии - новое оборудование. 2017. № 8. С. 16-20.
2. Kirsanov M. N. A Precise Solution of the Task of a Bend in a Lattice Girder with a Random Number of Panels. Russian Journal of Building Construction and Architecture. 2018. No. 1(37). P. 92-99.

3. Kirsanov M. N., Zaborskaya N. V. Deformations of the periodic truss with diagonal lattice // Magazine of Civil Engineering. 2017. No. 3. Pp. 61–67.
4. Кирсанов М. Н. Анализ усилий и деформаций в корабельном шпангоуте моделируемого фермой // Вестник Государственного университета морского и речного флота имени адмирала С. О. Макарова. 2017. Т. 9. № 3. С. 560–569.
5. Кирсанов М. Н. Статический анализ и монтажная схема плоской фермы // Вестник Государственного университета морского и речного флота имени адмирала С. О. Макарова. 2016. № 5(39). С. 61-68.
6. Кирсанов М. Н. Статический расчет плоской фермы с двойной треугольной решеткой // Справочник. Инженерный журнал с приложением. 2017. № 11 (248). С. 32-36
7. Кирсанов М. Н. Точное решение задачи о прогибе решетчатой фермы с произвольным числом панелей // Научный журнал строительства и архитектуры. 2017. № 4(48). С. 83-89.
8. Кирсанов М. Н. Расчет прогиба симметричной балочной фермы в аналитической форме // Строительная механика и конструкции. 2016. № 2 (13). С. 5-9.
9. Smirnova A. A., Rakhmatulina A. R. Analytical calculation of the displacement of the truss support // Научный альманах. 2017. № 2-3(28). С. 275-278.
10. Rakhmatulina A. R., Smirnova A. A. The formula for the deflection of a truss loaded at half-span by a uniform load // Postulat.2018. No. 3.
11. Rakhmatulina A. R., Smirnova A. A. The dependence of the deflection of the arched truss loaded on the upper belt, on the number of panels // Научный альманах. 2017. N 2-3(28). С. 268-271.
12. Кирсанов М. Н. Анализ прогиба арочной фермы // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2017. № 5. С. 50-55.
13. Тиньков Д. В. Расчет прогиба плоской арочной фермы с крестообразной решеткой // Постулат. 2017. № 12
14. Kirsanov M. N., Astahov S. V. The mathematical model of dome covering industrial facility // Architecture and Engineering. 2017. № 2(2).
15. Kirsanov M. N. Evaluation of spatial deflection of coatings with periodic structure // Magazine of Civil Engineering. 2017. No. 8. Pp. 58-66.
16. Кирсанов М. Н. Анализ прогиба фермы пространственного покрытия с крестообразной решеткой // Инженерно-строительный журнал. 2016. № 4(64). С. 52-58.
17. Кирсанов М.Н. Аналитическое исследование жесткости пространственной статически определимой фермы // Вестник МГСУ. 2017. Т. 12. Вып. 2 (101). С. 165–171.
18. Кирсанов М. Н., Рахматулина А. Р., Смирнова А. А. Анализ прогиба внешне статически неопределимой балочной фермы // Строительная механика и конструкции. 2017. № 1 (14). С. 31-35.
19. Китаев С. С. Расчет регулярных стержневых систем в системе Maple на примере плоской внешне статически неопределимой фермы // Постулат. 2017. № 12.
20. Кирсанов М. Н. Аналитический расчет прогиба распорной фермы с произвольным числом панелей // Механизация строительства. 2017. № 3. С. 26-29.
21. Кирсанов М. Н., Суворов А. П. Исследование деформаций плоской внешне статически неопределимой фермы // Вестник МГСУ. 2017. Т. 12. Вып. 8 (107). С. 869-875.
22. Кирсанов М. Н. Аналитический расчет прогиба двухпролетной плоской фермы // Механизация строительства. 2017. № 5. С. 35-38.

23. Кирсанов М. Н. Вывод формулы для прогиба решетчатой фермы, имеющей случаи кинематической изменяемости // Строительная механика и конструкции. 2017. № 1 (14). С. 27-30.
24. Астахов С. В. Вывод формулы для прогиба внешне статически неопределимой плоской фермы под действием нагрузки в середине пролета // Строительство и архитектура. 2017. Т. 5. № 2. С. 50–54.
25. Кирсанов М. Н. Аналитический расчет деформаций и усилий в плоской вантовой ферме // Механизация строительства. 2018. № 1. С. 29-33.
26. Кирсанов М. Н. Статический расчет вантовой системы // Известия Московского государственного технического университета МАМИ. 2013. Т. 1. № 3. С. 89-93.
27. Кирсанов М. Н. Дискретная модель свайного фундамента // Инженерно-строительный журнал. 2015. №3(55). С. 3–9.
28. Кирсанов М. Н. Maple и Maplet. Решения задач механики. СПб.: Лань, 2012. 512 с.
29. Тиньков Д. В. Сравнительный анализ аналитических решений задачи о прогибе ферменных конструкций // Инженерно-строительный журнал. 2015. № 5(57). С. 66–73.
30. Осадченко Н. В. Расчёт прогиба плоской неразрезной статически определимой фермы с двумя пролётами // Постулат. 2017. № 12.