

**АНАЛИТИЧЕСКИЙ РАСЧЕТ И АНАЛИЗ ПЛОСКОЙ ШПРЕНГЕЛЬНОЙ
ФЕРМЫ**

А.Р. Рахматулина¹, А.А. Смирнова²
Национальный исследовательский университет “МЭИ”
Россия, г. Москва

¹Студентка, тел.: +7(495)362-73-14;; e-mail: anya.rashma@yandex.ru

²Студентка, тел.: +7(495)362-73-14;; e-mail: Anastasia7773@yahoo.com

Статически определяемая симметричная ферма балочного типа имеет шпренгельное усиление стоек. Методом индукции выводится зависимость прогиба фермы от числа панелей. Используется система символьной математики Maple и формула Максвелла - Мора. Получены аналитические выражения для усилий в некоторых наиболее опасных с точки зрения устойчивости и потери прочности стержнях. Показано, что оптимальное положение крепления шпренгелей близко к середине стойки. Задействованы специальные операторы Maple для составления и решения рекуррентных уравнений, необходимых для получения коэффициентов искомых формул.

Ключевые слова: ферма, прогиб, индукция, аналитическое решение, Maple

ANALYTICAL CALCULATION AND ANALYSIS OF PLANAR SPRINGEL TRUSS

A. R. Rakhmatulina, A. A. Smirnova
*National Research University “MPEI”,
Russia. Moscow*

¹Student, tel.: +7(495)362-73-14;; e-mail: anya.rashma@yandex.ru

²Student, tel.: +7(495)362-73-14;; e-mail: Anastasia7773@yahoo.com

A statically determinate symmetric beam-type truss has a reinforcement of the racks. The method of induction shows the dependence of the deflection of the farm on the number of panels. The system of symbolic mathematics Maple and the Maxwell-Mora formula are used. Analytic expressions are obtained for the forces in some of the bars most dangerous in terms of stability and loss of strength. It is shown that the optimal position of Sprengel's fastening is close to the middle of the vertical rack. Special Maple operators are involved to compose and solve the recurrence equations necessary to obtain the coefficients of the sought formulas.

Keywords: truss, deflection, induction, analytical solution, Maple

Simple analytical solutions to the problems of building structures are useful as estimates of more complex numerical solutions that take into account a larger number of factors. In [1], the problem of the deflection of a truss (Fig. 1) was solved under the action of a concentrated force; in [2], a particular solution was found for deflecting the same truss under the action of a load along the lower belt at $h_1 = h_2$. In [3], the induction method derived a formula for the deflection of a truss under a load on the upper belt.

The considered truss has a height $h_1 + h_2$ and $2n$ panels in the span (Figure 1). In the

belts of the $4n$ rod of length a , $4n$ racks are high h_1 and h_2 , one central stand is tall and $4n$ long strings $d_1 = \sqrt{a^2 + h_1^2}$ and $d_2 = \sqrt{a^2 + h_2^2}$. The task is to determine the analytical dependence of the deflection of the truss against the number of panels in the case of uniform loading of the truss by the nodes of the upper or lower belt.

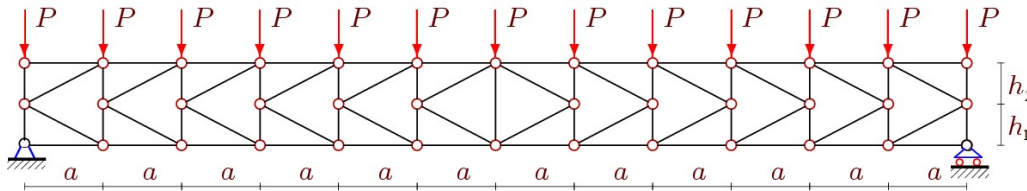


Fig. 1. A truss with $n = 6$. Load on the upper belt

To calculate the forces in the rods of the truss, the program [4] is used. In the program written in the language of symbolic mathematics Maple, it is necessary to enter the coordinates of the nodes. We number the rods and nodes of the truss (Figure 2). We set the origin in the left fixed support.

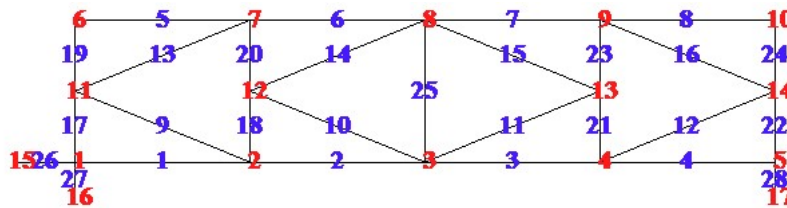


Fig. 2. Numbering of knots and rods, $n = 2$

The fragment of the coordinate input program has the form

```
> for i to 2*n+1 do
>   x[i]:=a*i-a:   y[i]:=0:
>   x[i+2*n+1]:=x[i]: y[i+2*n+1]:=h1+h2:
> od:
> for i to n do
>   x[i+4*n+2]:=a*i-a:   y[i+4*n+2]:=h1:
>   x[i+5*n+2]:=a*i+n*a: y[i+5*n+2]:=h1:
> od:
```

A matrix of the system of equations of node equilibrium is formed in the program. Among the unknowns, the reactions of the supports are included. The solution is obtained in symbolic form. The forces are determined separately for the given load and for the unit force applied at the deflection point. Calculation of the deflection is carried out using the Maxwell-Mohr's formula:

$$\Delta = \sum_{i=1}^{K-3} S_i s_i l_i / (EF),$$

where: EF — the stiffness of the rods, S_i — the forces in the rods from the load, s_i — the forces in the rods from the action of a single vertical force applied to the middle node of the lower belt, l_i — the length of the rods, $K = 12n + 1$ — the number of rods, rods, modeling supports, they are taken rigid). The solution is successively for $n = 1, 2, 3 \dots$. Each time the

solution has the form

$$EF\Delta = P(C_1a^3 + C_2d_1^3 + C_3d_2^3 + C_4h_1^3 + C_5h_2^3 + C_6h_1h_2^2 + C_7h_2h_1^2) / (2(h_1 + h_2)^2).$$

The coefficients C_1, C_2, \dots, C_7 depend only on the number of panels and are determined by the induction method previously used in analogous problems in [1-3, 5-11]. Identify the recurrence equation, which is subject to the terms of this sequence can operator **rgf_findrecur** of the Maple system. This operator only works with an even number of arguments, and the necessary sequence length is determined by the type of the equation obtained (the coefficients in it must be integer) and the physical validity of the solution. In addition, the solution is checked numerically for large values of the number of panels. The solution of the equation is given by the **rsolve** operator. For the program to work, you need to connect a special package **genfunc**. Here is a fragment of the program for compiling a recurrence formula for the sequence of coefficients:

```
> n:='n':with(genfunc):
> S:=seq(C1[i],i=1..Nmax);
> NN:=nops([S])/2:
> Z:=rgf_findrecur(NN, [S], t,n); # The equation
> ZZ:=simplify(rsolve({Z,seq(t(i)=S[i],i=1..NN)},t));# solution
> factor(ZZ);# Simplification of the formula (factorization)
```

All actions (matrix compilation, solution) are performed in **for n to Nmax do ... end** loop. In the same cycle, with the help of the operator **coeff**, the coefficients are determined for the degree of the given variable. The operator **seq** creates a sequence of coefficients. Thus, the program compiled a recurrence equation for the sequence 0, 6, 42, 152, 400, 870, 1666, 2912, 4752, 7350 of the coefficients for a^3 :

$$C_{1,n} = 5C_{1,n-1} - 10C_{1,n-2} + 10C_{1,n-3} - 5C_{1,n-4} + C_{1,n-5}.$$

The solution of this equation has the form [3]

$$C_1 = n^2(5n-1)(n-1)/6.$$

Similarly, recursive equations for other coefficients are obtained and their expressions are determined

$$C_2 = C_3 = C_4 = n^2, C_5 = n^2 + 1, C_6 = 2n + 1, C_7 = 2n.$$

When loading the lower belt (Figure 3), we get the following expressions for the coefficients:

$$C_1 = n^2(5n-1)(n-1)/6, C_2 = C_3 = C_4 = n^2, C_5 = n^2 + 1, C_6 = 2n + 1, C_7 = 2n.$$

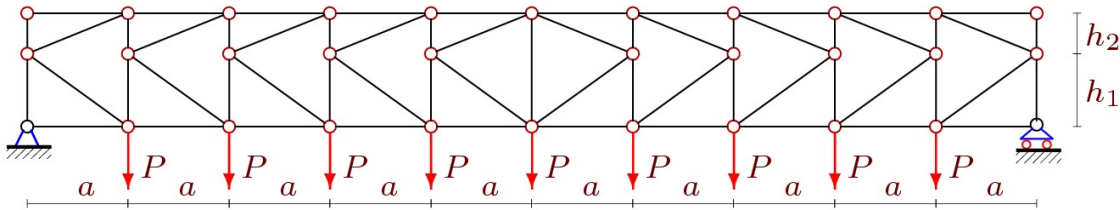


Fig. 3. A truss with $n = 5$. Load on the lower belt

In general, the strings can be fixed not in the middle of the post. Fixing the height $H = h_1 + h_2$ of the truss, we study the effect of the deviation ε of the hinge mounting point on the post: $h_1 = H/2 - \varepsilon$. Denote $\Delta' = \Delta EF / (P_s L)$ the dimensionless relative deflection, where $P_s = (2n+1)P$ the total load on the truss when loading the upper belt, $L = 2na$. Dependence (1) shows that the minimum deflection has a truss with a joint hinge in the middle of the column (Figure 4, $-\varepsilon$ in meters). Any displacement of the hinge causes an increase in deflection.

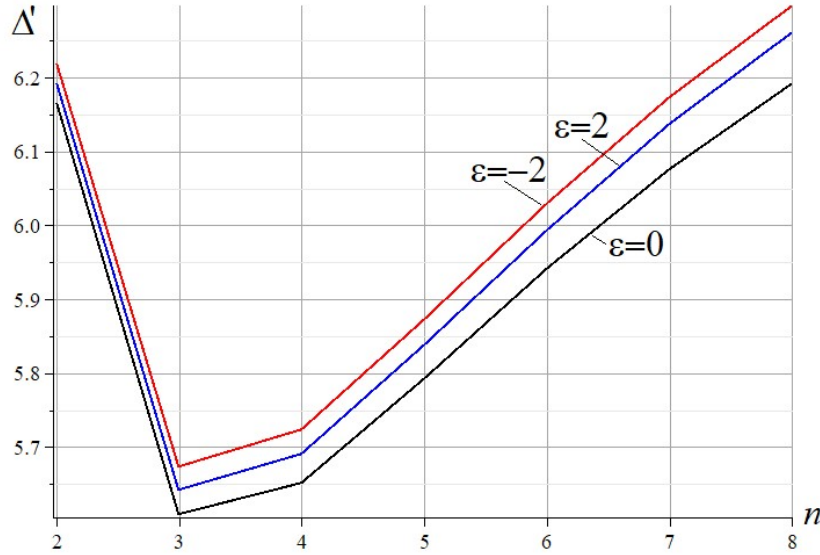


Fig. 4. Deflection depending on the number of panels

However, the exact minimum is not necessary $\varepsilon = 0$. Assuming the value ε to be small and using the Maclaurin expansion operator `mtaylor(DEL, epsilon, 3)`, from the condition $d\Delta' / d\varepsilon = 0$ we get that the minimum deflection corresponds to the value:

$$\varepsilon = \frac{(4n-1)c^2 H^2}{2c((3n^2 - 2n + 1)Hc + 3n^2(2a^2 + H^2))}.$$

With an increase in the number of panels ε tends to zero. Another useful asymptotic analysis can be performed for the deflection function as a function of n . Judging by the curves in Figure 3, the deflection increases with the number of panels. Accepting the previous limitations $P_s = (2n+1)P, L = 2na$ for relative deflection we have the slope of the horizontal asymptote

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\Delta'}{n} = \frac{h_1^2 - h_1 h_2 + h_2^2}{2L(h_1 + h_2)}.$$

To test the strength and stability of the structure as a whole, it is useful to know the expressions for the forces in the most stretched and compressed elements. Consider forces in the middle panel of the structure when loading the upper belt (Figure 5).

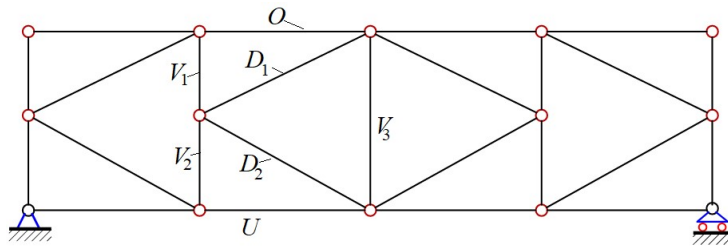


Fig. 5. Forces in rods

The calculation shows that in some bars the forces do not depend on the number of panels:

$$V_1 = -P(2h_1 + h_2) / (2H), V_2 = -3Ph_1 / (2H),$$

$$D_1 = -Pd_2 / (2H), D_2 = Pd_1 / (2H), V_3 = -Ph_1 / H.$$

By induction we obtain expressions in two other rods. The upper belt is compressed, the lower one is stretched:

$$O = -U = -Pa(n^2 - 1) / (2H).$$

In problems on the deflection of planar trusses, the method of induction with the support of the Maple system was applied earlier in [2-9]. Problems in the symbolic form for arch trusses are solved in [10-16], lattice — [17-22], spatial — [23-27]. The formula for deflecting an externally statically indeterminate truss for an arbitrary number of panels was obtained in [28]. In [29], the `mtaylor` operator was also used to study the forces of the mounting error on deflection. Surveys of work in this direction can be found in [9,10,30].

Библиографический список

1. Ерзунов И.А., Гудожников Р.А. Прогиб плоской статически определимой шпренгельной фермы с произвольным числом панелей // Наука и образование в XXI веке: сборник научных трудов по материалам Международной научно-практической конференции 31 октября 2014 г. в 17 частях. Часть 4. Тамбов: ООО«Консалтинговая компания Юком», 2014. С. 55-56.
2. Логвиненко А. С. Формула для прогиба шпренгельной фермы под действием равномерной нагрузки по нижнему поясу // Актуальные вопросы в научной работе и образовательной деятельности: сб. науч. тр. по мат-лам Междунар. науч.-практ. конф. 30 мая 2015 г.: Часть 6. Тамбов, 2015. С. 94-96.
3. Логвинец А. А. Анализ прогиба шпренгельной фермы под действием равномерной нагрузки по верхнему поясу // Актуальные вопросы в научной работе и образовательной деятельности: сб. науч. тр. по мат-лам Междунар. науч.-практ. конф. 30 мая 2015 г.: Часть 6. Тамбов, 2015. С. 96-97.
4. Кирсанов М. Н. Maple и Maplet. Решения задач механики. СПб.: Изд-во Лань, 2012. 512 с.
5. Кирсанов М.Н. Анализ усилий и деформаций в корабельном шпангоуте, моделируемом фермой // Вестник государственного университета морского и речного флота им. адмирала С.О. Макарова. 2017. Т. 9. № 3. С. 560-569.
6. Кирсанов М.Н. Статический анализ и монтажная схема плоской фермы // Вестник Государственного университета морского и речного флота имени адмирала С.О. Макарова. 2016. № 5 (39). С. 61-68.

7. Кирсанов М.Н. Расчет жесткости стержневой решетки // Вестник машиностроения. 2015. № 8. С. 49-51.
8. Kirsanov M. N. A Precise Solution of the Task of a Bend in a Lattice Girder with a Random Number of Panels. Russian Journal of Building Construction and Architecture. 2018. No. 1(37). P.92-99
9. Осадченко Н.В. Расчёт прогиба плоской неразрезной статически определимой фермы с двумя пролётами // Постулат. 2017. № 12 (26). С. 28.
10. Осадченко Н.В. Аналитические решения задач о прогибе плоских ферм арочного типа // Строительная механика и конструкции. 2018. Т. 1. № 16. С. 12–33.
11. Кирсанов М.Н. Формулы для расчета прогиба арочной фермы // Строительная механика и конструкции. 2018. №1. С.7-11.
12. Кирсанов М.Н. Индуктивный анализ деформации арочной фермы // International Journal for Computational Civil and Structural Engineering, 2018. 14(1). Pp.64-70. DOI:10.22337/2587-9618-2018-14-1-64-70
13. Кирсанов М.Н., Степанов А.С. О зависимости деформаций плоской арочной фермы от числа панелей // Строительная механика и расчет сооружений. 2017. № 5. С. 9-14.
14. Кирсанов М.Н. Анализ прогиба арочной фермы // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2017. № 5. С. 50-5
15. Кирсанов М.Н. Сравнительный анализ жесткости двух схем арочной фермы // Строительство уникальных зданий и сооружений. 2015. № 9 (36). С. 44-55.
16. Кирсанов М.Н. Аналитическое исследование деформаций плоской фермы арочного типа // Вестник государственного университета морского и речного флота им. адмирала С.О. Макарова. 2015. № 3 (31). С. 42-48.
17. Кирсанов М.Н., Маслов А.Н. Формулы для расчета прогиба балочной многорешетчатой фермы // Строительная механика и расчет сооружений. 2017. 2(271). С. 4-10.
18. Доманов Е.В. Вывод формулы для прогиба балочной фермы с крестообразной решеткой // Строительная механика и конструкции. 2017. №2 (15). С. 15-19.
19. Кирсанов М.Н. Формулы для расчета прогиба и усилий в решетчатой ферме // Механизация строительства. 2017. №4. С. 20-23
20. Кирсанов М.Н. К выбору решетки балочной фермы // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2017. №3. С. 23–27.
21. Kirsanov M.N., Zaborskaya N.V. Deformations of the periodic truss with diagonal lattice // Magazine of Civil Engineering. 2017. No. 3. P. 61–67. doi: 10.18720/MCE.71.7
22. Гриднев С.Ю., Кирсанов М.Н., Овчинников И.Г. Статический расчет двухраскосной балочной фермы // Интернет-журнал НАУКОВЕДЕНИЕ. Том 8, №6 (2016)
23. Кирсанов М.Н. Прогиб пространственного покрытия с периодической структурой // Инженерно-строительный журнал. 2017. № 8(76). С. 58–66. doi: 10.18720/MCE.76.6
24. Кирсанов М.Н. Изгиб, кручение и асимптотический анализ пространственной стержневой консоли // Инженерно-строительный журнал. 2014. № 5 (49). С. 37-43.

25. Кирсанов М.Н. Аналитическое исследование жесткости пространственной статически определимой фермы // Вестник МГСУ. 2017. Т. 12. № 2 (101). С. 165–171.
26. Kirsanov M.N. Analysis of the buckling of spatial truss with cross lattice // Magazine of Civil Engineering. 2016. No. 4. Pp. 52–58. doi: 10.5862/MCE.64.5.
27. Кирсанов М.Н. Аналитический расчет пространственной стержневой системы // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2012. № 1. С. 49-53.
28. Кирсанов М.Н., Суворов А.П. Исследование деформаций плоской внешне статически неопределимой фермы // Вестник МГСУ. 2017. Т. 12, № 8 (107). С. 869–875.
29. Кирсанов М.Н. Индуктивный анализ влияния погрешности монтажа на жесткость и прочность плоской фермы // Инженерно-строительный журнал. 2012. №5(31). С. 38-42.
30. Тиньков Д.В. Сравнительный анализ аналитических решений задачи о прогибе ферменных конструкций // Инженерно-строительный журнал. 2015. №5(57). С. 66–73.

References

1. Erzunov I.A., Gudozhnikov R.A. Progib ploskoj staticheski opredelimoj shprengel'noj fermy s proizvol'nym chislom panelej. Nauka i obrazovanie v XXI veke: sbornik nauchnyh trudov po materialam Mezhdunarodnoj nauchno-prakticheskoj konferencii 31 oktyabrya 2014 g. v 17 chastyah. CHast' 4. Tambov: ООО«Konsaltingovaya kompaniya YUkom», 2014. Pp. 55-56. (in Rus.).
2. Logvinenko A. S. Formula dlya progiba shprengel'noj fermy pod dejstviem ravnomernoj nagruzki po nizhnemu poyasu. Aktual'nye voprosy v nauchnoj rabote i obrazovatel'noj deyatel'nosti: sb. nauch. tr. po mat-lam Mezhdunar. nauch.-prakt. konf. 30 maya 2015 g.: CHast' 6. Tambov, 2015. Pp. 94-96. (in Rus.).
3. Logvinc A. A. Analiz progiba shprengel'noj fermy pod dejstviem ravnomernoj nagruzki po verhnemu poyasu. Aktual'nye voprosy v nauchnoj rabote i obrazovatel'noj deyatel'nosti: sb. nauch. tr. po mat-lam Mezhdunar. nauch.-prakt. konf. 30 maya 2015 g.: CHast' 6. Tambov, 2015. Pp. 96-97. (in Rus.).
4. Kirsanov M. N. Maple and Maplet. Solutions of mechanics problems. SP.: Publishing house LAN, 2012. 512 p. (in Rus.).
5. Kirsanov M.N. Analiz usilij i deformatsij v korabel'nom shpangoute, modeliruemom ferмой. Vestnik gosudarstvennogo universiteta morskogo i rechnogo flota im. admirala S.O. Makarova. 2017. Vol. 9. № 3. Pp. 560-569. (in Rus.).
6. Kirsanov M. N. Sticheskiy analiz i montazhnaya skhema ploskoj fermy. Vestnik gosudarstvennogo universiteta morskogo i rechnogo flota im. admirala S.O. Makarova. 2016. No. 5 (39). Pp. 61-68. (in Rus.).
7. Kirsanov M.N. Raschet zhestkosti sterzhnevoj reshetki. Vestnik mashinostroeniya. 2015. № 8. Pp. 49-51. (in Rus.).
8. Kirsanov M. N. A Precise Solution of the Task of a Bend in a Lattice Girder with a Random Number of Panels. Russian Journal of Building Construction and Architecture. 2018. No. 1(37). P.92-99.

9. Osadchenko NV Calculation of the deflection of a flat, continuous, statically determinate truss with two spans. *Postulat*. 2017. No. 12. (in Rus.).
10. Osadchenko N.V. Analiticheskie resheniya zadach o progibe ploskih ferm arochnogo tipa. *Stroitel'naya mekhanika i konstrukcii*. 2018. T. 1. № 16. Pp. 12–33. (in Rus.).
11. Kirsanov M.N. Formuly dlya rascheta progiba arochnoj fermy. *Stroitel'naya mekhanika i konstrukcii*. 2018. №1. Pp.7-11. (in Rus.).
12. Kirsanov M.N. Induktivnyj analiz deformacii arochnoj fermy. *International Journal for Computational Civil and Structural Engineering*, 2018. 14(1). Pp.64-70. DOI:10.22337/2587-9618-2018-14-1-64-70 (in Rus.).
13. Kirsanov M.N., Stepanov A.S. O zavisimosti deformacij ploskoj arochnoj fermy ot chisla panelej. *Stroitel'naya mekhanika i raschet sooruzhenij*. 2017. № 5. Pp. 9-14. (in Rus.).
14. Kirsanov M.N. Analiz progiba arochnoj fermy. *Stroitel'naya mekhanika inzhenernyh konstrukcij i sooruzhenij*. 2017. № 5. Pp. 50-5. (in Rus.).
15. Kirsanov M.N. Sravnitel'nyj analiz zhestkosti dvuh skhem arochnoj fermy. *Stroitel'stvo unikal'nyh zdaniy i sooruzhenij*. 2015. № 9 (36). Pp. 44-55. (in Rus.).
16. Kirsanov M.N. Analiticheskoe issledovanie deformacij ploskoj fermy arochnogo tipa. *Vestnik gosudarstvennogo universiteta morskogo i rechnogo flota im. admirala S.O. Makarova*. 2015. № 3 (31). Pp. 42-48. (in Rus.).
17. Kirsanov M. N., Maslov A.N. The formula for the deflection of multiple lattice beam truss calculation. *Structural mechanics and calculation of structures*. 2017. 2(271). Pp. 4-10. (in Rus.).
18. Domanov E.V. Vyvod formuly dlya progiba balochnoj fermy s krestoobraznoj reshetkoj. *Stroitel'naya mekhanika i konstrukcii*. 2017. №2 (15). Pp. 15-19. (in Rus.).
19. Kirsanov M.N. Formuly dlya rascheta progiba i usilij v reshetchatoj ferme. *Mekhanizaciya stroitel'stva*. 2017. №4. Pp. 20-23. (in Rus.).
20. Kirsanov M.N. K vyboru reshetki balochnoj fermy. *Stroitel'naya mekhanika inzhenernyh konstrukcij i sooruzhenij*. 2017. N3. Pp. 23–27. (in Rus.).
21. Kirsanov M.N., Zaborskaya N.V. Deformations of the periodic truss with diagonal lattice. *Magazine of Civil Engineering*. 2017. No. 3. P. 61–67. doi: 10.18720/MCE.71.7
22. Gridnev S.Yu., Kirsanov M.N., Ovchinnikov I.G. Static calculation of a double-beam girder truss. *Internet-journal Naukovedenie*. 2016. Vol. 8, No. 6 (in Rus.).
23. Kirsanov M.N. Progib prostranstvennogo pokrytiya s periodicheskoj strukturoj. *Inzhenerno-stroitel'nyj zhurnal*. 2017. № 8(76). Pp. 58–66. doi: 10.18720/MCE.76.6 (in Rus.).
24. Kirsanov M.N. Izgib, kruchenie i asimptoticheskij analiz prostranstvennoj sterzhnevoj konsoli. *Inzhenerno-stroitel'nyj zhurnal*. 2014. № 5 (49). Pp. 37-43.
25. Kirsanov M.N. Analiticheskoe issledovanie zhestkosti prostranstvennoj staticheski opredelimoj fermy. *Vestnik MGSU*. 2017. T. 12. № 2 (101). Pp. 165–171. (in Rus.).
26. Kirsanov M.N. Analysis of the buckling of spatial truss with cross lattice. *Magazine of Civil Engineering*. 2016. No. 4. Pp. 52–58. doi: 10.5862/MCE.64.5.

27. Kirsanov M.N. Analiticheskij raschet prostranstvennoj sterzhnevoj sistemy. *Stroitel'naya mekhanika inzhenernyh konstrukcij i sooruzhenij*. 2012. № 1. Pp. 49-53. (in Rus.).
28. Kirsanov M.N., Suvorov A.P. Issledovanie deformacij ploskoj vneshne staticheski neopredelimoj fermy. *Vestnik MGSU*. 2017. T. 12, № 8 (107). Pp. 869–875. (in Rus.).
29. Kirsanov M.N. Induktivnyj analiz vliyaniya pogreshnosti montazha na zhestkost' i prochnost' ploskoj fermy. *Inzhenerno-stroitel'nyj zhurnal*. 2012. №5(31). Pp. 38-42. (in Rus.).
30. Tinkov D.V. Comparative analysis of analytical solutions to the problem of truss structure deflection. *Magazine of Civil Engineering*. 2015. No.5(57). Pp. 66–73 doi: 10.5862/MCE.57.6 (in Rus.).