

М. Н. КИРСАНОВ, д-р физ.-мат. наук, проф.  
НИУ МЭИ

### Аналитический расчет балочной фермы со сложной решеткой

Предлагается схема статически определимой плоской балочной фермы с двумя неподвижными опорами. Получено точное выражение зависимости прогиба середины пролета фермы от числа панелей при равномерном нагружении фермы по верхнему поясу. Показано, что для четного числа панелей ферма кинематически изменяема. Приведена схема возможных скоростей. Расчеты усилий в стержнях выполнены методом вырезания узлов в пакете символьной математики Maple. Найдено обобщение решения на произвольное число панелей методом индукции. Для последовательности коэффициентов решения было получено и решено рекуррентное уравнение седьмого порядка. Найдены некоторые асимптотики и особенности решения. Выявлена характерная для ферм с крестообразной решеткой скачкообразность кривой зависимости прогиба от числа панелей.

**Ключевые слова:** балочная ферма, прогиб, Maple, индукция, число панелей, асимптотика

#### Постановка задачи

Известно, что некоторые схемы стержневых систем, в частности плоских и пространственных ферм, могут скрывать конструктивные дефекты. Так, в [1] показано, что многорешетчатая плоская ферма может быть изменяемой конструкцией даже при наличии лишнего стержня. Это зависит от соотношения числа шарниров по ее сторонам. Аналогичный эффект обнаружен в [2] и в пространственной ферме [3].

В настоящей работе изучается напряженное состояние и прогиб фермы с решеткой, сочетающей крестообразное соединение и треугольные элементы (рис. 1-3). На рисунках 1 и 2 изображены две фермы, внешне почти неразличимые. В одной ферме восемь панелей, в другой – семь. Для большего числа панелей разница между двумя такими фермами, отличающимися на одну панель еще меньше заметна.

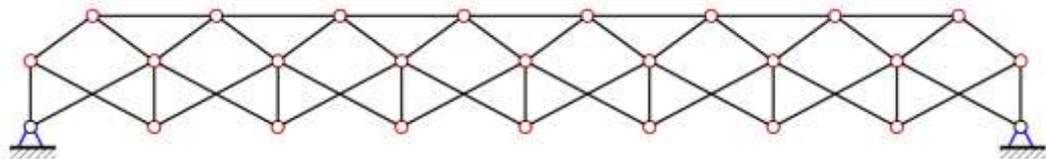


Рис. 1. Ферма,  $n = 8$

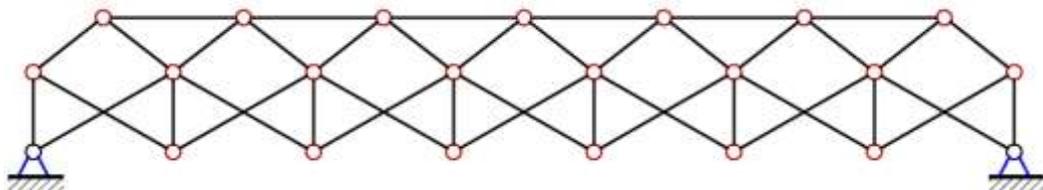


Рис. 2. Ферма,  $n = 7$

Кажется, что расчет, выполненный и проверенный для одной фермы, подходит и для другой. Тип ферм совершенно один и тот же. Однако это не так. В первом случае (для четного числа панелей) ферма представляет собой механизм, во втором – нет. Вначале это было замечено при обычном численном расчете усилий в стержнях методом вырезания узлов по стандартной программе. Решение вело себя странным образом для ферм с четным числом панелей, но первоначально это было отнесено на погрешности округления. При внимательном же рассмотрении схемы было обнаружено, что для четных чисел панелей фермы имеется кинематически непротиворечивое распределение скоростей узлов. На примере  $n = 2$  эта картина изображена на рисунке 3.

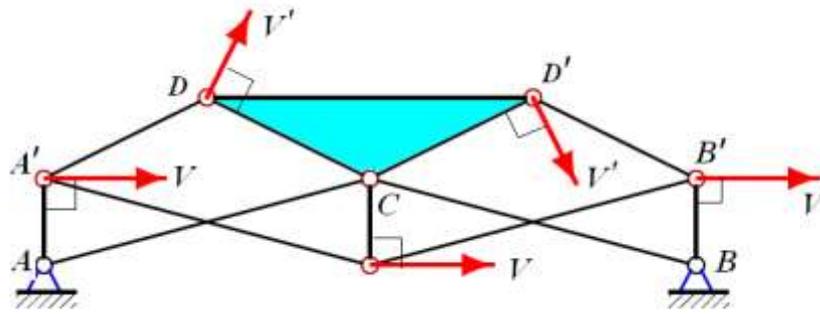


Рис. 3. Распределение возможных скоростей,  $n = 2$

Стержни, соединяющие шарниры  $A$ ,  $B$ ,  $C$  образуют жесткий треугольник, поэтому у заштрихованного стержневого треугольника имеется только возможность поворота вокруг шарнира  $C$ . Вращательное движение совершают стойки  $AA'$  и  $BB'$ . Стержни  $A'C'$  и  $C'B'$  двигаются мгновенно поступательно (скорости параллельны). Вектор  $V$  скорости точки  $B'$  перпендикулярен стержню  $BB'$ , вектор скорости точки  $D'$  перпендикулярен  $CD'$  и т. д. Соотношение скоростей  $V$  и  $V'$  можно получить из равенства их проекций на стержень  $D'B'$  или  $A'D$ . Аналогичная картина возможных скоростей, доказывающая кинематическую изменяемость фермы, имеется и для других ферм с четным числом панелей.

Влияние четности числа панелей не единственная особенность рассматриваемой фермы. Вычислим усилия в стержнях и прогиб этой фермы в аналитической форме. При этом введем в число параметров задачи число панелей. Непосредственный расчет фермы с произвольным числом панелей в общем случае невозможен. Однако здесь применим метод индукции. Предлагаемая схема фермы ранее аналитически не исследовалась и применение ее в практике строительства не известно. Поэтому интерес к такой схеме чисто теоретический, как пример выявления скрытых особенностей конструкции. Проблема поиска схем статически определимых ферм («охота за схемами статически определимых ферм») отражена в [4]. Аналогичные решения для плоских ферм балочных и консольных, с различными решетками и очертаниями верхнего пояса в конечной форме получены в [5-11]. Примененный в этих работах метод индукции показал свою эффективность, а полученные формулы для прогиба в зависимости от числа панелей позволили найти некоторые оптимальные по жесткости конструктивные решения и указали на особенности конструкции (в том числе и чувствительность к четности числа панелей). Метод применим и для пространственных систем [12-15].

### Расчет

Рассмотрим плоскую статически определимую балочную ферму с *нечетным* числом панелей  $n = 2k - 1$  (рис. 4). Стержни фермы предполагаем упругими (модуль упругости  $E$ ) одинакового сечения  $F$ . Поставим задачу получить аналитическое решение для прогиба фермы при произвольном числе панелей  $n$ . Ферма нагружена по верхнему поясу вертикальными силами  $P$ . Ферма содержит  $3n + 2$  шарниров и  $m = 6n$  стержней.

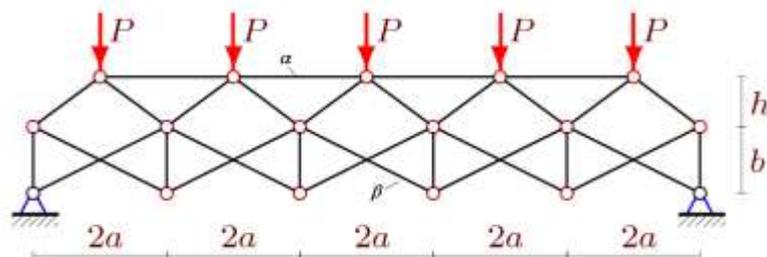


Рис. 4.  $n = 5$

Для определения усилий в стержнях фермы используем метод вырезания узлов. Система  $6n + 4$  уравнений для  $m + 4 = 6n + 4$  неизвестных (включая четыре реакции опорных шарниров) будет замкнута. Алгоритм составления уравнений разработан в [12-17] применительно к системе аналитических вычислений

Marle. Пронумеруем шарниры фермы (нижний пояс слева направо, затем верхний пояс). Выбирая начало координат в левой шарнирной опоре, получим:

$$\begin{aligned} x_i &= 2(i-1)a, \quad y_i = 0, \quad x_{i+n+1} = x_i, \quad y_{i+n+1} = b, \quad i = 1, \dots, n+1, \\ x_{i+2n+2} &= 2ia + a, \quad y_{i+2n+2} = b + h, \quad i = 1, \dots, n. \end{aligned}$$

Для составления конфигурации решетки фермы стержни фермы представим условными векторами  $\bar{N}_i, i = 1, \dots, m$ , координаты которых являются номера шарниров по их концам. Направления этих векторов произвольны и никак не связаны со знаком усилий в них. Для стержней решетки имеем следующие вектора:

$$\begin{aligned} \bar{N}_i &= [i, i+n+2], \quad \bar{N}_{i+n} = [i+1, i+n+1], \\ \bar{N}_{i+2n} &= [i+n+1, i+2n+2], \quad \bar{N}_{i+3n} = [i+n+2, i+2n+2], \quad i = 1, \dots, n. \end{aligned}$$

Для векторов верхнего пояса:

$$\bar{N}_{i+4n} = [i+2n+2, i+2n+3], \quad i = 1, \dots, n-1,$$

Вектора стоек:

$$\bar{N}_{i+5n-1} = [i, i+n+1], \quad i = 1, \dots, n+1.$$

Для вычисления направляющих косинусов, входящих в уравнения узлов фермы, потребуются длины стержней и проекции их векторных представлений на оси координат

$$l_i = \sqrt{l_{1,i}^2 + l_{2,i}^2}, \quad l_{1,i} = x_{N_{2,i}} - x_{N_{1,i}}, \quad l_{2,i} = y_{N_{2,i}} - y_{N_{1,i}}, \quad i = 1, \dots, m_0,$$

где  $m_0 = m + 4$  – число стержней фермы, включая четыре стержня, которые моделируют неподвижные шарнирные опоры (по два стержня на каждую опору). Первый индекс в номере  $N_{j,i}$  означает номер компоненты вектора  $\bar{N}_i$ , второй – номер стержня. Матрица направляющих косинусов имеет следующие элементы

$$G_{k,i} = -l_{j,i} / l_i, \quad k = 2N_{i,2} - 2 + j, \quad k \leq m_0, \quad j = 1, 2, \quad i = 1, \dots, m_0,$$

$$G_{k,i} = l_{j,i} / l_i, \quad k = 2N_{i,1} - 2 + j, \quad k \leq m_0, \quad j = 1, 2, \quad i = 1, \dots, m_0.$$

Задача определения усилий в стержнях фермы сводится к решению системы линейных уравнений, которую запишем в матричной форме

$$G\bar{S} = \bar{B}.$$

Здесь  $\bar{S}$  – вектор неизвестных усилий,  $\bar{B}$  – вектор нагрузок. Горизонтальные нагрузки, приложенные к узлу  $i$  записываются в нечетные элементы  $B_{2i-1}$  (в данной постановке их не будет), вертикальные – в четные  $B_{2i}$ . Прогиб центрального узла верхнего пояса фермы определяем по формуле Максвелла-Мора

$$\Delta = \sum_{k=1}^m \frac{S_k S_k l_k}{EF},$$

где  $S_k, s_k$  – усилия в  $k$ -м стержне фермы от приложенной нагрузки и от единичной вертикальной силы, приложенной к центральному узлу верхнего пояса. Суммирование ведется по всем стержням фермы, опорные стержни приняты жесткими и в эту сумму не входят. Рассмотрим для упрощения выкладок случай  $b = 2h$ . Последовательное решение задачи с использованием системы символьной математики для ферм с одной, тремя, пятью и т. д. панелями в пролете ( $k = 1, 2, 3, \dots$ ) позволило методом индукции (по аналогии с [1-8]) получить следующее выражение

$$\Delta EF = P \frac{A_k a^3 + C_k c^3 + \psi_k h^3}{6h^2}, \quad (1)$$

где

$$\begin{aligned} A_k &= 2k^3 - 3k^2(1 + (-1)^k) + k(1 + 3(-1)^k), \\ C_k &= k^3 - (3/2)k^2(1 + 3(-1)^k) + (1/2)k(25 + 9(-1)^k) - 6 - 3(-1)^k, \\ \Psi_k &= 2k^3 - 3k^2(1 + 3(-1)^k) + k(19 + 9(-1)^k) - 9 - 15(-1)^k, \end{aligned}$$

где  $c = \sqrt{a^2 + h^2}$ . Зависимости коэффициентов при  $a^3$ ,  $c^3$  и  $h^3$  от числа панелей оказались довольно сложными. Так для нахождения общего члена  $\psi_k$  немонотонной последовательности 8, 0, 48, 8, 152, 48, 352, 152, 680, 352, 1168, 680, 1848, 1168, 2752, 1848... с помощью оператора **rgf\_findrecur** системы Maple [16] было найдено рекуррентное уравнение седьмого порядка

$$\psi_k = \psi_{k-1} + 3\psi_{k-2} - 3\psi_{k-3} + 3\psi_{k-4} - 3\psi_{k-5} + \psi_{k-6} - \psi_{k-7}.$$

Решение этого уравнения с помощью оператора **rsolve** дает общий член последовательности. Интересно заметить, что и два других коэффициента  $A_k$  и  $C_k$  также удовлетворяют этому уравнению, но при других начальных данных решения получаются разными. Наличие «мигающего» слагаемого  $(-1)^k$  в решениях есть следствие немонотонности последовательностей.

Введем обозначение  $\tilde{\Delta} = \Delta EF / P$ . Обозначим фиксированную длину пролета фермы  $L = 2an$ . График зависимости (1) от числа панелей обнаруживает еще две интересные и неожиданные особенности фермы. Во-первых, график немонотонный: увеличение числа панелей  $n = 2k - 1$  (и одновременное уменьшение их длин, так как пролет имеет заданную длину) приводит попеременно к увеличению и уменьшению прогиба (скачки кривой на рисунке 5). Кроме того, для малых  $k$  (а в рассматриваемом примере это только  $k = 1$ ) ферма с высотой  $h = 5$  м имеет прогиб больший, чем с высотой  $h = 7$  м, а начиная с некоторого числа панелей, это соотношение меняется на обратное. Очевидно, кривая  $\tilde{\Delta}(h)$  также должна иметь минимум. Это и видно на рисунке 6. В общем случае положение экстремальной точки на этих

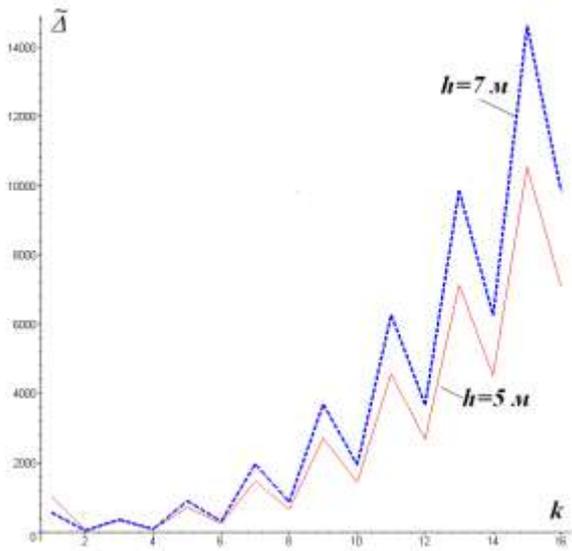
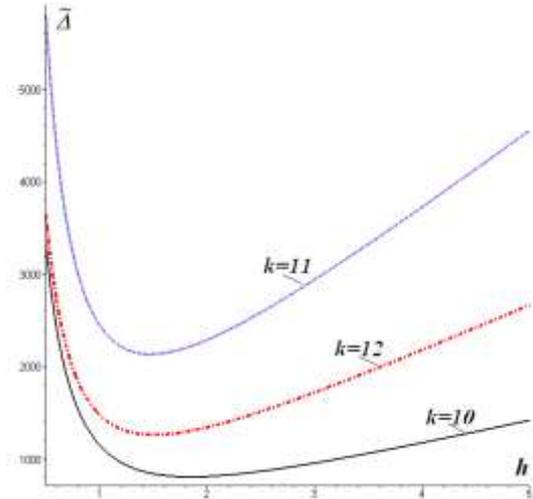


Рис. 5. Зависимость прогиба от числа пролетов,  $L = 50\text{м}$

кривых в аналитической форме получить не удастся, однако при  $k = 2$  из условия  $d\Delta/dh = 0$  имеем точное значение  $h = L\sqrt{2}/6 \approx 0,236L$ . На этом же рисунке заметна очевидная немонотонность зависимости прогиба от числа панелей. Кривая прогиба фермы с числом  $k = 12$  располагается между кривыми  $k = 11$  и  $k = 10$ .

Рис. 6. Зависимость прогиба от высоты,  $L = 50\text{м}$



Найденная аналитическая зависимость прогиба от числа панелей позволяет проследить характер поведения соответствующей кривой. Если задана суммарная нагрузка на ферму и с увеличением числа панелей уменьшается нагрузка на каждый узел так, что  $P_{\text{сум}} = nP$  и  $L = 2an$ , то при  $n = 2k - 1$  имеем следующий предел  $\lim_{k \rightarrow \infty} \tilde{\Delta}/k^2 = h/4$ . Если же нагрузка на каждый узел фиксирована, и с увеличением числа пролетов растет и суммарная нагрузка, то, как и следовало ожидать, прогиб растет быстрее, уже по кубической зависимости:  $\lim_{k \rightarrow \infty} \tilde{\Delta}/k^3 = h/2$ .

#### Усилия в стержнях

Определим усилия в наиболее растянутых и сжатых стержнях фермы. Вертикальные реакции опор фермы равны  $Pn/2$ , горизонтальные:  $Pa/(2h)$ . Методом индукции получаем, что наиболее сжатые стержни при заданной нагрузке будут в середине верхнего пояса (на рисунке 4 помечены как  $\alpha$ ). Имеем следующее аналитическое выражение

$$S_{\alpha} = -P \frac{2ak(k-1)}{b+2h}, \quad k > 1,$$

$$S_{\alpha} = -P \frac{b+2h}{4h}, \quad k = 1, \quad \alpha = 9k - 4.$$

Наиболее растянутые стержни находятся также в середине пролета (на рисунке 4 помечены как  $\beta$ ). Усилия в этих стержнях равны

$$S_{\beta} = P \frac{d(b+2h(k^2-k+1))}{4h(b+2h)}, \quad \beta = k + 1,$$

где  $d = \sqrt{4a^2 + b^2}$ . Кривая зависимости  $S_\alpha(k)$  при заданной длине пролета  $L = 2an$  имеет асимптоту  $S_\alpha = \frac{L(1-2k)}{4(b+2h)}$ .

### Заключение

Рассмотренная схема статически определимой фермы относится к распорным конструкциям. Для нечетного числа панелей найдено выражение для прогиба середины пролета. Зависимость прогиба от числа панелей оказывается немонотонной. Обнаружены экстремальные точки на графике зависимости прогиба от высоты фермы и от числа панелей. Это позволяет проектировщику выбирать оптимальное по деформациям решение. Точные значения усилий сжатых и растянутых стержней могут быть заложены в дальнейшие расчеты фермы на прочность и потерю устойчивости. Описанный алгоритм анализа фермы допускает обобщение на различную жесткость стержней, переменную длину панелей и произвольные нагрузки. Найденные формулы для прогиба и максимальных усилий могут быть использованы как тестовые решения в численных алгоритмах и в задачах поиска оптимальных размеров с помощью генетических алгоритмов [17].

### Литература

1. *Курсанов М.Н.* Аналитический расчет многорешетчатой фермы // Строительная механика и расчет сооружений. 2014. №6. с. 2-6.
2. *Курсанов М.Н.* Скрытая особенность и асимптотические свойства одной плоской балочной фермы// Строительная механика и расчет сооружений. 2014. № 4. С. 9-12.
3. *Курсанов М.Н.* Расчет пространственной стержневой системы, допускающей мгновенную изменяемость// Строительная механика и расчет сооружений. 2012. №3. С. 48-51.
4. *Hutchinson R. G., Fleck N. A.* Microarchitected cellular solids – the hunt for statically determinate periodic trusses // ZAMM Z. Angew. Math. Mech. 2005. 85, No. 9. p. 607 – 617.
5. Кужелев П. А. Оптимизация прогиба плоской балочной фермы // Вопросы образования и науки: теоретический и методический аспекты: сборник научных трудов по материалам Международной научно-практической конференции 31 мая 2014 г. в 11 частях. Часть 11. Тамбов: ООО "Консалтинговая компания Юком", 2014. с. 109-110.
6. Дзабиев А. А., Черепанов С. П. Формулы для расчета прогиба арочной фермы //Вопросы образования и науки: теоретический и методический аспекты: сборник научных трудов по материалам Международной научно-практической конференции 31 мая 2014 г. в 11 частях. Часть 4. Тамбов: ООО "Консалтинговая компания Юком", 2014. с. 63-64.
7. Бадертдинов Р. Р. Формула для прогиба плоской балочной фермы //Актуальные вопросы образования и науки: сборник научных трудов по материалам Международной научно-практической конференции 30 сентября 2014 г. в 11 частях. Часть 7. Тамбов: ООО "Консалтинговая компания Юком", 2014. с. 21-22.
8. Дегтярев Н.Р., Трощило А.П. Прогиб балочной фермы шпренгельного типа //Актуальные вопросы образования и науки: сборник научных трудов по материалам Международной научно-практической конференции 30 сентября 2014 г.: в 11 частях. Часть 10. Тамбов: ООО "Консалтинговая компания Юком", 2014. с. 52-53.
9. Кабрера Пантоха Х.Х., Поддубный-Литвинов М.А. Индуктивный метод определения прогиба многопролетной плоской фермы //Актуальные вопросы образования и науки: сборник научных

- трудов по материалам Международной научно-практической конференции 30 сентября 2014 г.: в 11 частях. Часть 10. Тамбов: ООО "Консалтинговая компания Юком", 2014. с. 78-79.
10. Афанасьев В.А., Бойко О.О. Прогиб составной плоской балочной фермы с параллельными поясами//Актуальные вопросы образования и науки: сборник научных трудов по материалам Международной научно-практической конференции 30 сентября 2014 г.: в 11 частях. Часть 10. Тамбов: ООО "Консалтинговая компания Юком", 2014. с. 15-16.
  11. Сайпулаев Г.Р. Расчет регулярных стержневых систем на примере арочной фермы //Актуальные вопросы образования и науки: сборник научных трудов по материалам Международной научно-практической конференции 30 сентября 2014 г. в 11 частях. Часть 4. Тамбов: ООО "Консалтинговая компания Юком", 2014. с. 128-129.
  12. *Кирсанов М.Н., Андреевская Т.М.* Анализ влияния упругих деформаций мачты на позиционирование антенного и радиолокационного оборудования // Инженерно-строительный журнал. 2013. №5(40). С. 52-58.
  13. *Кирсанов М.Н.* Учет строительного подъема в аналитическом расчете пространственной балочной фермы // Известия МГТУ МАМИ. 2014. Т. 4. №2 (20). С. 36-39.
  14. *Кирсанов М.Н.* Изгиб, кручение и асимптотический анализ пространственной стержневой консоли // Инженерно-строительный журнал. 2014. № 5 (49). С. 37-43.
  15. *Кирсанов М.Н.* Аналитический расчет и оптимизация пространственной балочной фермы // Вестник МЭИ. 2012. № 5. С. 5-8.
  16. *Кирсанов М. Н.* Практика программирования в системе Maple. — М.: Издательский дом МЭИ, 2011. —208 с.
  17. *Кирсанов М.Н.* Генетический алгоритм оптимизации стержневых систем // Строительная механика и расчет сооружений. 2010. №2. С. 60-63