

М.Н. КИРСАНОВ, д-р физ.-мат. наук, проф.

Национальный исследовательский университет «МЭИ», e-mail: c216@ya.ru

## ФОРМУЛЫ ДЛЯ РАСЧЕТА ПРОГИБА ПЛОСКОЙ РАСПОРНОЙ ФЕРМЫ МОСТА С ПРОИЗВОЛЬНЫМ ЧИСЛОМ ПАНЕЛЕЙ

Выводится аналитическое решение задачи о прогибе плоской модели фермы моста с двумя неподвижными шарнирными опорами. Находятся формулы зависимости прогиба, реакции опор и усилий в характерных стержнях от числа панелей в конструкции. Используются операторы компьютерной математики Maple. Прогиб определяется по формуле Максвелла–Мора. Серия отдельных решений, полученных для ферм с последовательно увеличивающимся числом панелей, обобщается на произвольное число панелей. Получена картина распределения усилий по стержням фермы. Показано, что смена знаков усилий в поясах фермы не зависит от ее геометрических параметров, а зависит только от числа панелей.

**Ключевые слова:** ферма, распор, прогиб, Maple, индукция, число панелей, асимптотика.

Исследования и расчет ферм выполняются на практике, как правило, численно с использованием программных комплексов и систем на основе метода конечных элементов. Известны и аналитические решения в тригонометрических рядах с использованием компьютерной математики [1, 2]. В справочнике [3] собраны схемы плоских статически определимых регулярных ферм и формулы для их прогибов, полученные методом индукции для произвольного порядка конструкции. Проблемы образования и расчета регулярных статически определимых ферм изучались в работах [4–9]. Известны отдельные простые формулы для расчета плоских [10–13] и пространственных ферм [14, 15]. Метод индукции, позволяющий для регулярных ферм существенно расширить область применения расчетных формул, используется и для вывода аналитических оценок собственных частот колебаний моделей ферм с массами, распределенными по узлам [16–18]. В настоящей работе предлагается схема регулярной фермы арочного типа и аналитический расчет усилий в стержнях и прогиба для произвольного числа панелей.

### Расчетная модель

Статически определимая схема фермы имеет решетчатую конструкцию с прямолинейным верхним и криволинейным нижним поясом (рисунок 1). Длина фермы  $L = 4an$ . Средние  $2(n-3)$  панели, составляющие регулярную часть фермы, имеют крестообразную решетку. Ферма имеет две неподвижные шарнирные опоры  $A, B$ . Общее число стержней фермы  $N = 8n + 16$ . В это число не входят четыре стержня, моделирующие неподвижные опоры. Рассматриваются три вида нагрузок: равномерная узловая нагрузка на верхний пояс (рисунок 1), нижний пояс (рисунок 2) и сосредоточенная нагрузка на средний узел  $C$  нижнего пояса.

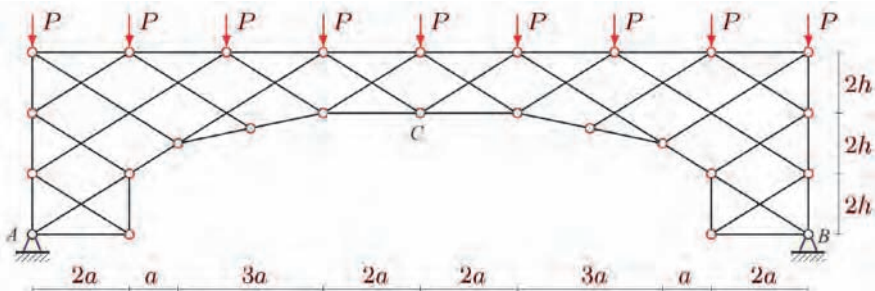


Рисунок 1. Равномерная узловая нагрузка на верхний пояс,  $n = 4$

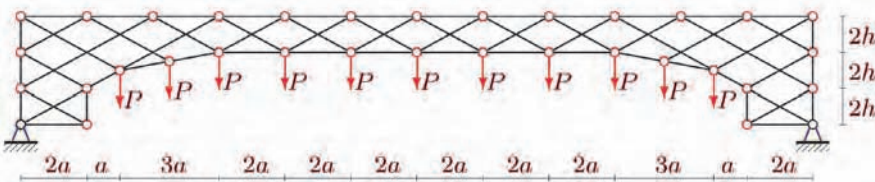


Рисунок 2. Равномерная узловая нагрузка на нижний пояс,  $n = 6$

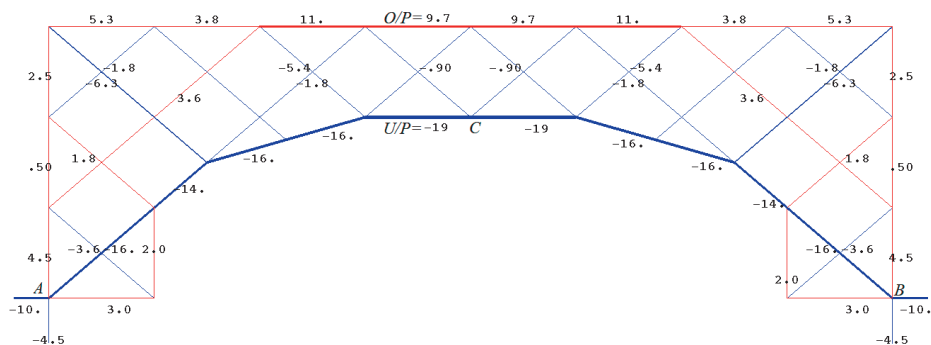


Рисунок 3. Усилия в стержнях фермы при равномерном нагружении верхнего пояса,  $n = 4$

Предполагается, что стержни конструкции упругие. Ферма внешне статически неопределимая. Реакции опор определяются в аналитической форме одновременно с усилиями во всех стержнях фермы из решения системы линейных уравнений равновесия всех узлов:  $G\bar{S} = \bar{B}$ , где  $\bar{B}$  — вектор узловых нагрузок,  $\bar{S}$  — вектор неизвестных усилий в стержнях. Матрица  $G$  составлена из направляющих косинусов усилий в стержнях, для вычисления которых задаются координаты узлов. Данные о номерах концов стержней собираются в списки аналогично тому, как в дискретной математике задается информация о графе. Узловые нагрузки в проекции на ось  $x$  (горизонтальные), приложенные к узлу  $i$ , записываются в нечетные элементы  $B_{2i-1}$ , в проекции на ось  $y$  — в четные  $B_{2i}$ .

### Усилия и реакции опор

В случае равномерной узловой нагрузки на верхний пояс ненулевые элементы вектора  $\bar{B}$  имеют вид  $B_{2i} = -P, i = 2n + 8, \dots, 4n + 8$  (нумерация узлов начинается с нижнего пояса). Нагрузка на нижний пояс соответствует вектору  $B_{2i} = -P, i = 4, \dots, 2n + 2$ . На рисунке 3 представлена картина распределения усилий в стержнях фермы при  $a = 3$  м,  $h = 2$  м в случае загрузки верхнего пояса. Значения усилий, отнесенных к величине нагрузки  $P$ , округлены до двух значащих цифр, а толщина отрезков стержней условно пропорциональна модулям усилий. Синим цветом обозначены сжатые стержни, красным — растянутые. Нижний пояс при такой нагрузке и  $n=4$  сжат, верхний — растянут. Усилия в стержнях средней части решетки незначительные. Такое распределение характерно для распорных (арочных) ферм небольшой длины. Вычисления показывают, что при  $n > 6$  распределение сжатых и растянутых стержней в поясах меняется на обратное: верхний пояс сжат, нижний растянут. Для усилий в стержнях середины пролета можно получить аналитические выражения зависимостей от числа панелей. Рассчитывая ряд ферм с увеличивающимся числом панелей, получаем последовательность значений усилий в стержне середины верхнего пояса при  $n = 4, \dots, 8$ :  $O/P = 13a/(2h), 5a/h, 5a/(2h), -a/h, -11a/h, \dots$ . После  $n = 6$  знак усилия действительно меняется. Общий член последовательности имеет вид:  $O = -Pa(n^2 - 6n - 5)/(2h)$ . Аналогично выводится формула для усилия в стержне середины нижнего пояса:  $U = -Pa(n^2 - 9n - 6)/(2h)$ . Для реакций опор:  $X_A = Pa(3n + 2)/(2h), Y_A = P(2n + 1)/2$ . При нагружении узлов нижнего пояса (рисунок 2) имеем:  $O = -Pa(2n^2 - 12n + 5)/(4h), U = -Pa(n^2 - 9n + 2)/(2h), X_A = Pa(6n - 1)/(4h), Y_A = P(2n - 1)/2$ .

### Прогиб

Для определения прогиба конструкции в центральном узле  $C$  нижнего пояса используем формулу Максвелла—Мора:

$$\Delta = \sum_{k=1}^N \frac{S_k s_k l_k}{EF} \quad (1)$$

Суммирование ведется по всем деформируемым стержням фермы, кроме четырех опорных. Используются обозначения:  $S_k$  — усилия в  $k$ -м стержне фермы от действия приложенной нагрузки,  $s_k$  — усилие от действия единичной вертикальной силы, приложенной к узлу  $C$ . Принято, что жесткость  $EF$  всех стержней одинакова. Расчет прогиба ряда ферм в символьной форме показал, что для любого числа панелей вид итоговой формулы один и тот же:

$$\Delta_n = P \frac{C_1 a^3 + C_2 c^3 + C_3 h^3 + C_4 d^3}{EFh^2}, \quad (2)$$

где  $c = \sqrt{a^2 + h^2}$ ,  $d = \sqrt{9a^2 + h^2}$ . Рассмотрим случай нагружения верхнего пояса. Последовательность решений имеет вид:

$$\begin{aligned} \Delta_3 &= P \frac{24a^3 + 53c^3 + 12h^3 + 3d^3}{EFh^2}, \\ \Delta_4 &= -P \frac{26a^3 - 29c^3}{EFh^2}, \\ \Delta_5 &= P \frac{140a^3 + 75c^3 + 18h^3 + 4d^3}{EFh^2}, \\ \Delta_6 &= -3P \frac{52a^3 - 15c^3}{EFh^2}, \\ \Delta_7 &= P \frac{164a^3 + 102c^3 + 24h^3 + 5d^3}{EFh^2}, \dots \end{aligned}$$

Для получения решения, справедливого при любом  $n$ , необходимо обобщить эти выражения, используя метод индукции. Наиболее сложным оказалось найти зависимость  $C_1(n)$ . Чтобы определить общий член последовательности 24, -26, 140, -156, 164... потребовалось найти аналитические решения для 20 ферм. Оператор `rgf_findrecur` системы Maple дает следующее рекуррентное уравнение для общего члена последовательности:

$$C_{1,n} = C_{1,n-1} + 4C_{1,n-2} - 4C_{1,n-3} - 6C_{1,n-4} + 6C_{1,n-5} + 4C_{1,n-6} - 4C_{1,n-7} - C_{1,n-8} + C_{1,n-9}.$$

Решение этого уравнения получается с помощью встроенного оператора `rsolve` и имеет вид:  $C_1 = (10n^4 + 10(2(-1)^n - 15)n^3 + 2(319 - 117(-1)^n)n^2 + 5(53(-1)^n - 81)n - 1113 + 657(-1)^n) / 12$ . (3)

Аналогично находятся и остальные коэффициенты:

$$\begin{aligned} C_2 &= (2n^2 + 3(7 - 3(-1)^n)n + 68 - 32(-1)^n) / 4, \\ C_3 &= 3(n + 1)(1 - (-1)^n) / 2, \\ C_4 &= (n + 3)(1 - (-1)^n) / 4. \end{aligned} \quad (4)$$

В случае загрузки нижнего пояса коэффициенты в (2) имеют вид:

$$\begin{aligned} C_1 &= (20n^4 + 20(2(-1)^n - 15)n^3 + 2(731 - 234(-1)^n)n^2 + (998(-1)^n - 2214)n + 69(-1)^n + 147) / 24, \\ C_2 &= (4n^2 + 6(7 - 3(-1)^n)n + 59 - 31(-1)^n) / 8, \\ C_3 &= 3(2n + 1)(1 - (-1)^n) / 4, \quad C_4 = (4n + 5)(1 - (-1)^n) / 16. \end{aligned} \quad (5)$$

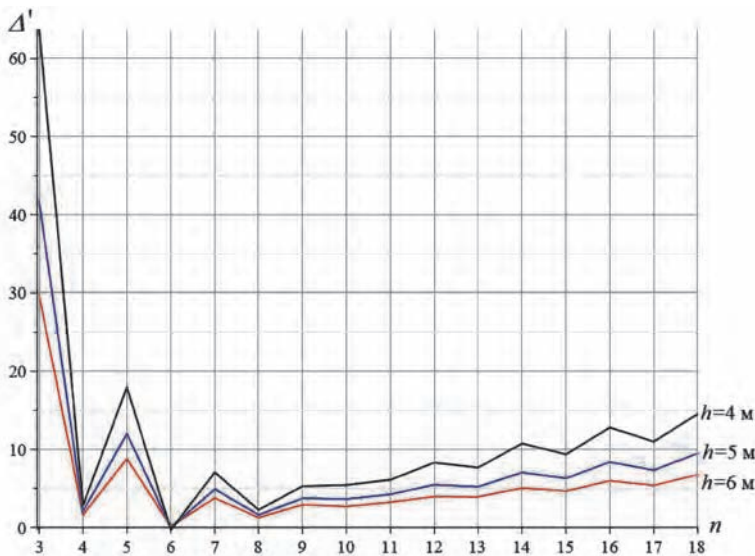


Рисунок 4. Зависимость относительного прогиба от числа панелей

Коэффициенты в (2) при действии на ферму силы  $P$ , сосредоточенной в среднем узле  $C$ :

$$\begin{aligned} C_1 &= (4n^3 + 15(-1)^n - 3)n^2 + (197 - 117(-1)^n)n + 210(-1)^n - 282 / 6, \\ C_2 &= (4n + 9 - 9(-1)^n) / 4, \quad C_3 = 3(1 - (-1)^n) / 2, \quad C_4 = (1 - (-1)^n) / 4. \end{aligned} \quad (6)$$

Наглядное представление о характере найденной зависимости безразмерного прогиба от числа панелей  $n$  для различных значений высоты  $h$  дает график на рисунке 4, построенный по формулам (2), (5) для случая нагружения нижнего пояса (рисунок 2). Введем обозначение для относительного прогиба  $\Delta' = EF\Delta / (LP_{sum})$ , где  $P_{sum} = P(2n - 1)$ ,  $L = 4na = 100$  м. Значительные скачки прогиба характерны для распорных систем со сложной раскосной решеткой [3] и объясняются сглаживаемыми с коэффициентом  $(-1)^n$  в решении. Особенно велики скачки при малом числе панелей, далее кривая несколько сглаживается. Несмотря на скачкообразный вид зависимости, здесь средствами системы Maple можно выявить линейные асимптоты:  $\lim_{n \rightarrow \infty} \Delta' / n = h / (4L)$ .

### Заключение

Предложена статически определимая регулярная схема фермы распорного типа. Математическая модель фермы допускает аналитическое решение задачи о зависимости прогиба от числа панелей, нагрузки и размеров конструкции. Выведенная методом индукции формула может быть использована для оценки точности численных решений и для предварительного расчета проектируемой конструкции. Скачкообразная зависимость прогиба от числа панелей дает возможность провести оптимизацию фермы по жесткости выбором надлежащего числа панелей.

Работа выполнена в рамках проекта «Динамика легких стержневых конструкций манипуляторов» при поддержке гранта НИУ «МЭИ» на реализацию программ научных исследований «Технологии индустрии 4.0 для промышленности и робототехника» 2020–2022 гг.

### Список литературы

1. Goloskokov D.P., Matrosov A.V. A Superposition Method in the Analysis of an Isotropic Rectangle // Applied Mathematical Sciences. – 2016. – 10(54). DOI:10.12988/ams.2016.67211. URL: www.m-hikari.comhttp://dx.doi.org/10.12988/ams.2016.67211 (date of application: 06/17/2020).
2. Goloskokov D.P., Matrosov A.V. Comparison of two analytical approaches to the analysis of grillages // 2015 International Conference on “Stability and Control Processes” in Memory of V.I. Zubov, SCP 2015. Proceedings. – 2015. – Pp. 382–385. DOI:10.1109/SCP.2015.7342169.
3. Kirsanov M.N. Planar Trusses: Schemes and Formulas. Cambridge Scholars Publishing. 2019. Lady Stephenson Library, Newcastle upon Tyne, NE6 2PA, UK ISBN (13): 978-1-5275-3531-2
4. Игнатьев В.А. Расчет регулярных стержневых систем. Саратов: Саратовское высшее военно-химическое военное училище, 1973.
5. Guest S.D., Hutchinson J.W. On the determinacy of repetitive structures // J. Mech. Phys. Solids. – 2003. – 51. – Pp. 383–391.
6. Hutchinson R.G., Fleck N.A. Microarchitected cellular solids – the hunt for statically determinate periodic trusses // ZAMM Z. Angew. Math. Mech. – 2005. – 85. – № 9. – Pp. 607–617.
7. Hutchinson R.G., Fleck N.A. The structural performance of the periodic truss // Journal of the Mechanics and Physics of Solids. – 2006. – Vol. 54. – № 4. – Pp. 756–782.
8. Zok F.W., Latture R.M., Begley M.R. Periodic truss structures // Journal of the Mechanics and Physics of Solids. – 2016. – Vol. 96. – Pp. 184–203. https://doi.org/10.1016/j.jmps.2016.07.007
9. Kaveh A., Rahami H., Shojaei I. Swift Analysis of Civil Engineering Structures Using Graph Theory Methods. 2020. 290. DOI:10.1007/978-3-030-45549-1. URL: http://link.springer.com/10.1007/978-3-030-45549-1 (date of application: 03/11/2022)
10. Dai Q. Analytical Dependence of Planar Truss Deformations on the Number of Panels // AlfaBuild. – 2021. – 17. – P. 1701. DOI:10.34910/ALF.17.1.
11. Ilyushiz A.S. The formula for calculating the deflection of a compound externally statically indeterminate truss // Structural mechanics and structures. – 2019. – 22(3). – Pp. 29–38. URL: https://elibrary.ru/item.asp?id=41201106 (date of application: 27.02.2021).
12. Беланкин Н.А., Бойко А.Ю. Формулы для прогиба балочной фермы с произвольным числом панелей при равномерном нагружении // Строительная механика и конструкции. – 2019. – № 1 (20). – С. 21–29.
13. Ткачук Г.Н. Формула зависимости прогиба несимметрично нагруженной плоской фермы с усиленными раскосами от числа панелей // Строительная механика и конструкции. – 2019. – № 2 (21). – С. 32–39.
14. Kirsanov M. Deformations of the Rod Pyramid: An Analytical Solution // Construction of Unique Buildings and Structures. – 2021. – 95. – Pp. 9501. DOI:10.4123/CUBS.95.1.
15. Кирсанов М.Н. Оценка прогиба и устойчивости пространственной балочной фермы // Строительная механика и расчет сооружений. – 2016. – № 5 (268). – С. 19–22.
16. Vorobei O.V. Bilateral Analytical Estimation of the First Frequency of a Plane Truss // Construction of Unique Buildings and Structures. – 2020. – 92 (7). – Pp. 9204–9204. DOI:10.18720/CUBS.92.4. URL: https://unistroy.spbstu.ru/article/2020.92.4 (date of application: 17.04.2021).

17. Vorobev O.V. On methods of obtaining an analytical solution for the problem of natural frequencies of hinged structures // Structural mechanics and structures. – 2020. – 24 (1). – Pp. 25–38. URL: [http://vuz.exponenta.ru/pdf/NAUKA/elibrary\\_42591122\\_21834695.pdf](http://vuz.exponenta.ru/pdf/NAUKA/elibrary_42591122_21834695.pdf).
18. Petrenko V.F. The natural frequency of a two-span truss // AlfaBuild. – 2021. – 20. – Pp. 2001. DOI:10.34910/ALF.20.1.

## FORMULA FOR CALCULATION OF THE DEFLECTION OF A FLAT STRUT BRIDGE WITH AN ARBITRARY NUMBER OF PANELS

M.N. Kirsanov, National Research University "MPEI"; e-mail: c216@ya.ru

**Abstract.** *The problem of finding an analytical solution to the problem of deflection of a planar model of a bridge truss with two fixed hinged supports is posed. Formulas are derived for the dependence of deflection, reactions of supports and forces in characteristic rods on the number of panels in the structure. Maple computer mathematics operators are used. The deflection is sought by the Maxwell-Mohr formula. A series of individual solutions obtained for trusses with a successively increasing number of panels are generalized to an arbitrary number of panels. A picture of the distribution of forces on the truss rods is obtained. It is shown that the change of force signs in the truss chords does not depend on its geometrical parameters, but depends only on the number of panels.*

**Key words:** *truss, thrust, deflection, Maple, induction, number of panels, asymptotics.*

### References

- Goloskokov D.P., Matrosov A.V. A Superposition Method in the Analysis of an Isotropic Rectangle. Applied Mathematical Sciences. 2016. 10(54). DOI:10.12988/ams.2016.67211. URL: [www.m-hikari.com/http://dx.doi.org/10.12988/ams.2016.67211](http://www.m-hikari.com/http://dx.doi.org/10.12988/ams.2016.67211) (date of application: 06/17/2020).
- Goloskokov D.P., Matrosov A.V. Comparison of two analytical approaches to the analysis of grillages. 2015 International Conference on "Stability and Control Processes" in Memory of V.I. Zubov, SCP 2015. Proceedings. 2015. Pp. 382–385. DOI:10.1109/SCP.2015.7342169.
- Kirsanov M.N. Planar Trusses: Schemes and Formulas. Cambridge Scholars Publishing. 2019. Lady Stephenson Library, Newcastle upon Tyne, NE6 2PA, UK ISBN (13): 978-1-5275-3531-2
- Ignatiev V.A. Calculation of regular rod systems. Saratov: Saratov Higher Military Chemical Military School. 1973.
- Guest S.D., Hutchinson J.W. On the determinacy of repetitive structures. J. Mech. Phys. Solids. 2003. 51. Pp. 383–391.
- Hutchinson R.G., Fleck N.A. Microarchitected cellular solids – the hunt for statically determinate periodic trusses. ZAMM Z. Angew. Math. Mech. 2005. 85, No. 9. Pp. 607–617.
- Hutchinson R.G., Fleck N.A. The structural performance of the periodic truss // Journal of the Mechanics and Physics of Solids. 2006. Vol. 54. No. 4. Pp. 756–782.
- Zok F.W., Latture R.M., Begley M.R. Periodic truss structures. Journal of the Mechanics and Physics of Solids. 2016. Vol. 96. Pp. 184–203. <https://doi.org/10.1016/j.jmps.2016.07.007>
- Kaveh A., Rahami H., Shojaei I. Swift Analysis of Civil Engineering Structures Using Graph Theory Methods. 2020. 290. DOI:10.1007/978-3-030-45549-1. URL: <http://link.springer.com/10.1007/978-3-030-45549-1> (date of application: 03/11/2022)
- Dai Q. Analytical Dependence of Planar Truss Deformations on the Number of Panels. AlfaBuild. 2021. 17. Pp. 1701. DOI:10.34910/ALF.17.1.
- Ilyushiz A.S. The formula for calculating the deflection of a compound externally statically indeterminate truss. Structural mechanics and structures. 2019. 22(3). Pp. 29–38. URL: <https://elibrary.ru/item.asp?id=41201106> (date of application: 27.02.2021).
- Belyankin N.A., Boyko A.YU. Formuly dlya progiba balochnoy fermy s proizvol'nym chislom paneley pri ravnomernom zagruzhenii. Stroitel'naya mekhanika i konstruksii. 2019. № 1 (20). Pp. 21–29.
- Tkachuk G.N. Formula zavisimosti progiba nesimmetrichno nagruzhennoy ploskoy fermy s usilennymi raskosami ot chisla paneley. Stroitel'naya mekhanika i konstruksii. 2019. № 2 (21). Pp. 32–39.
- Kirsanov M. Deformations of the Rod Pyramid: An Analytical Solution // Construction of Unique Buildings and Structures. 2021. 95. Pp. 9501. DOI:10.4123/CUBS.95.1.
- Kirsanov M.N. Otsenka progiba i ustoychivosti prostranstvennoy balochnoy fermy. Stroitel'naya mekhanika i raschet sooruzheniy. 2016. № 5 (268). Pp. 19–22.
- Vorobev O.V. Bilateral Analytical Estimation of the First Frequency of a Plane Truss. Construction of Unique Buildings and Structures. 2020. 92(7). Pp. 9204–9204. DOI:10.18720/CUBS.92.4. URL: <https://unistroy.spbstu.ru/article/2020.92.4> (date of application: 17.04.2021).
- Vorobev O.V. On methods of obtaining an analytical solution for the problem of natural frequencies of hinged structures. Structural mechanics and structures. 2020. 24(1). Pp. 25–38. URL: [http://vuz.exponenta.ru/pdf/NAUKA/elibrary\\_42591122\\_21834695.pdf](http://vuz.exponenta.ru/pdf/NAUKA/elibrary_42591122_21834695.pdf).
- Petrenko V.F. The natural frequency of a two-span truss. AlfaBuild. 2021.(20). Pp. 2001. DOI:10.34910/ALF.20.1.

**Для цитирования:** Кирсанов М.Н. Формулы для расчета прогиба плоской распорной фермы моста с произвольным числом панелей // Строительная механика и расчет сооружений. 2022. № 3. С. 9–13. DOI: 10.37538/0039-2383.2022.3.9.13

**For citation:** Kirsanov M.N. Formula for calculation of the deflection of a flat strut bridge with an arbitrary number of panels. Structural Mechanics and Analysis of Constructions. 2022. no. 3. pp. 9–13. (In Russian). DOI: 10.37538/0039-2383.2022.3.9.13