

М.Н. КИРСАНОВ, д-р физ.-мат. наук, проф.

Национальный исследовательский университет «МЭИ», e-mail: c216@ya.ru

## АНАЛИТИЧЕСКАЯ ОЦЕНКА ПЕРВОЙ ЧАСТОТЫ СОБСТВЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ МНОГОПРОЛЕТНОЙ ФЕРМЫ

Ставится задача определения зависимости нижней границы основной частоты собственных колебаний статически определимой фермы от числа пролетов. Верхний пояс фермы прямолинейный, нижний пояс пролетов — арочный. Инерционные свойства фермы моделируются одинаковыми сосредоточенными массами в узлах. Каждая масса имеет две степени свободы. Усилия в стержнях и реакции опор находятся методом вырезания узлов в символьной форме из решения общей системы уравнений равновесия узлов фермы. Все преобразования производятся в системе компьютерной математики Maple. Для нахождения матрицы жесткости конструкции используется формула Максвелла — Мора. Первая собственная частота конструкции находится по приближенному методу Донкерлея. Обобщение серии отдельных решений, найденных для ферм с различным числом пролетов, на произвольное число пролетов выполняется методом индукции с применением операторов системы Maple. Для сравнения используется наименьшая частота колебаний системы с многими степенями свободы, полученная численно. Выведена формула для нижней оценки первой частоты в зависимости от размеров фермы и числа пролетов. Сравнение аналитического решения с численным показывает хорошую степень приближения формулы для первой частоты. Погрешность существенно зависит от высоты фермы. Выявлены случаи кинематической изменяемости конструкции при четном числе пролетов.

**Ключевые слова:** ферма, Maple, индукция, число панелей, первая частота колебаний, нижняя оценка.

### Постановка задачи

Ставится задача получить математическую модель деформирования конструкции плоской многопролетной регулярной фермы и найти аналитическую зависимость первой собственной частоты колебаний от числа пролетов. Первая (наименьшая в спектре) частота колебаний конструкции, так же, как жесткость и прочность, является важной эксплуатационной характеристикой конструкции. Известно, что решение задачи о собственных колебаниях систем с многими степенями свободы в аналитическом виде невозможно, если число степеней свободы больше пяти, поэтому в данной работе для решения задачи применяется приближенный метод Донкерлея для определения нижней оценки частоты. Обобщение ряда решений на произвольное число пролетов выполняется методом индукции в системе компьютерной математики Maple. Обычно в инженерной практике расчет собственных частот колебаний ферм выполняется численно [1, 2]. Метод Донкерлея для получения аналитических оценок собственной частоты однопролетных ферм с произвольным числом панелей применялся в [3–5]. Метод индукции для аналитического исследования статических прогибов плоских регулярных ферм использован в [6–11]. Впервые проблема существования статически определимых регулярных систем и общие подходы к их изучению рассматривались в [12–15]. Задачи собственных колебаний плоских ферм методом индукции с применением системы компьютерной математики Maple решались в [16, 17], для пространственных — в [18, 19]. Применительно к задачам оптимизации регулярные системы исследовались в работе [20].

### Расчетная модель. Анализ кинематической изменяемости

Многопролетная статически определимая ферма имеет прямолинейный верхний пояс и арочную форму нижних поясов отдельных пролетов (рисунок 1). Длина фермы  $L = 4an$ , где  $n$  — число пролетов. Ферма имеет две неподвижные шарнирные опоры  $A, B$ . Промежуточные опоры — подвижные шарниры. Общее число стержней фермы  $n_s = 13n + 1$ . В это число не входят стержни, моделирующие опоры.

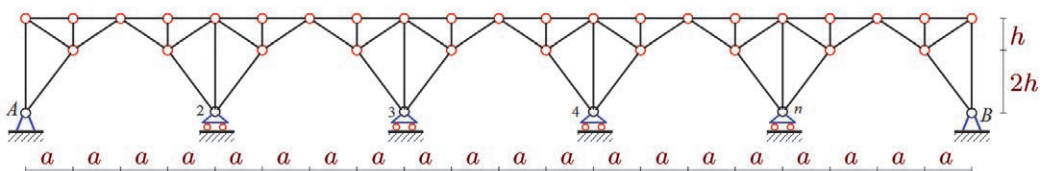


Рисунок 1. Схема фермы,  $n=5$

Стержни конструкции предполагаются упругими. Ферма внешне статически неопределимая. Реакции опор можно найти только одновременно с усилиями во всех стержнях фермы из решения системы линейных уравнений равновесия узлов:  $G\bar{S} = \bar{T}$ , где  $\bar{T}$  — вектор узловых нагрузок,  $\bar{S}$  — вектор неизвестных усилий в стержнях. Матрица  $G$  составляется из направляющих косинусов усилий в стержнях, для вычисления которых задаются координаты узлов. Начало координат расположено в левой подвижной опоре. Фрагмент программы ввода координат в системе Maple имеет вид:

```

for i to 4*n+1 do x[i]:=a*i-a; y[i]:=3*h; end:
for i to 2*n do x[i+4*n+1]:=2*a*(i-1)+a:y[i+4*n+1]:=2*h:end:
for i to n+1 do x[i+6*n+1]:=4*a*(i-1): y[i+6*n+1]:=0: end:

```

Пробные расчеты усилий в ферме под действием произвольной нагрузки, например, сосредоточенной в середине какого-либо пролета, показали, что для четного числа пролетов определитель матрицы  $G$  обращается в ноль независимо от нагрузки и размеров конструкции. Это подтверждает найденная при  $n=2$  картина распределения возможных скоростей узлов (рисунок 2). Крайние части фермы, образующие неизменяемые диски, совершают мгновенные повороты вокруг опор  $A$  и  $B$ , средняя часть поворачивается вокруг мгновенного центра скоростей  $P$ . Очевидно соотношение скоростей:  $v / \sqrt{4a^2 + 9h^2} = u / (6h)$ . Таким образом, все расчеты имеет смысл производить только для нечетного числа пролетов:  $n = 2k - 1, k = 1, 2, \dots$

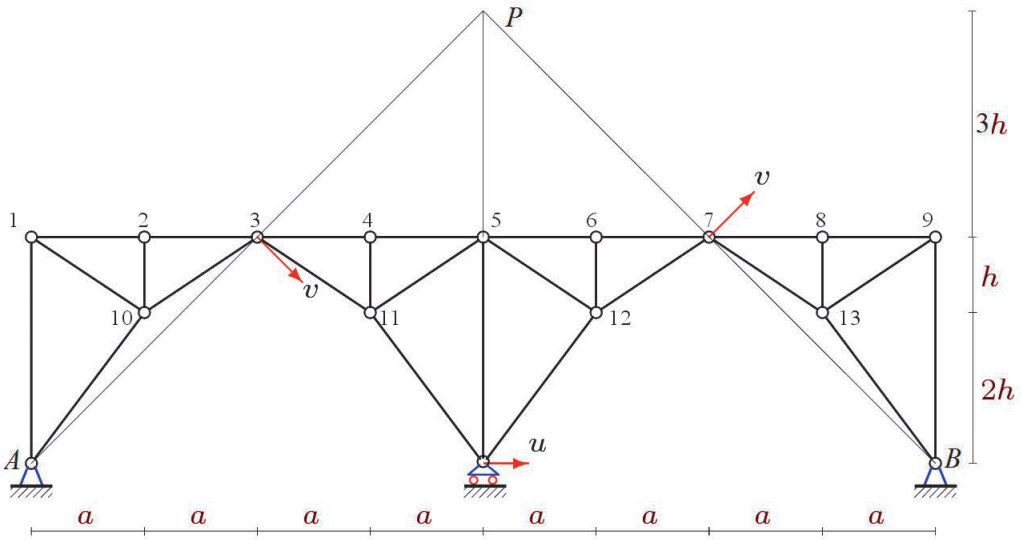


Рисунок 2. Возможные скорости мгновенно изменяемой фермы при  $n=2$

### Расчет собственных частот

Инерционные свойства фермы моделируются одинаковыми массами  $m$ , расположенными во всех узлах, кроме опорных. Предполагается, что каждая такая масса имеет две степени свободы. Общее число степеней свободы конструкции в принятой постановке равно  $2N$ , где  $N = 6n + 1$  — число масс в узлах.

Дифференциальные уравнения динамики системы грузов имеют вид:

$$\mathbf{M}_{2N} \ddot{\mathbf{U}} + \mathbf{D}_{2N} \dot{\mathbf{U}} = 0, \quad (1)$$

где  $\mathbf{U} = [u_1, u_2, \dots, u_{2N}]^T$  — вектор горизонтальных и вертикальных смещений масс,  $\mathbf{M}_{2N}$  — диагональная матрица инерции размером  $2N \times 2N$ ,  $\mathbf{D}_{2N}$  — матрица жесткости,  $\ddot{\mathbf{U}}$  — вектор ускорений. Так как массы одинаковые, то матрица инерции пропорциональна единичной  $\mathbf{M}_{2N} = m\mathbf{I}_{2N}$ . Матрицей, обратной к матрице жесткости  $\mathbf{D}_{2N}$ , является матрица податливости  $\mathbf{B}_{2N}$ , элементы которой вычисляются по формуле Максвелла — Мора:

$$b_{i,j} = \sum_{\alpha=1}^{n_r} S_{\alpha}^{(i)} S_{\alpha}^{(j)} l_{\alpha} / (EF), \quad i, j = 1, \dots, N, N+1, \dots, 2N, \quad (2)$$

где  $EF$  — жесткость, принятая для всех стержней одинаковой,  $S_{\alpha}^{(i)}$  — усилие в стержне  $\alpha$  от действия единичной вертикальной (или горизонтальной) силы на узел  $i$ ,  $l_{\alpha}$  — длина стержня  $\alpha$ . Суммирование ведется по всем стержням фермы, кроме опорных связей. Умножением (1) на матрицу  $\mathbf{B}_{2N}$  слева с учетом тождества  $\ddot{\mathbf{U}} = -\omega^2 \mathbf{U}$ , справедливого для гармонических колебаний вида

$$u_i = w_i \sin(\omega t + \varphi_0), \quad (3)$$

задача сводится к проблеме собственных чисел матрицы  $\mathbf{B}_{2N} \cdot \mathbf{B}_{2N} \mathbf{U} = \lambda \mathbf{U}$ , где  $\lambda = 1 / (m\omega^2)$  — одно из собственных чисел матрицы  $\mathbf{B}_{2N}$ ,  $\omega$  — собственная частота колебаний фермы. В общем случае эту задачу можно решить только численно.

Приближенное решение задачи о первой собственной частоте в аналитической форме возможно по методу Донкерлея. Нижняя оценка первой частоты колебаний имеет вид:

$$\omega_D^{-2} = \sum_{i=1}^N \omega_i^{-2} + \sum_{i=N+1}^{2N} \omega_i^{-2} = \Delta_v + \Delta_h. \quad (4)$$

В первую сумму  $\Delta_v$  входят парциальные частоты  $\omega_i$  по вертикальной форме колебаний масс  $m$ , во вторую — по горизонтальной. Уравнение (1) в случае колебаний одной массы имеет простой скалярный вид:  $m\ddot{u}_i + d_i u_i = 0$ , где  $u_i$  — перемещение массы,  $\ddot{u}_i$  — ее ускорение,  $d_i$  — коэффициент жесткости. Парциальная частота колебаний массы имеет вид:  $\omega_i = \sqrt{d_i / m}$ . Коэффициент жесткости, обратный коэффициенту податливости, определяется по формуле Максвелла — Мора:

$$\delta_i = 1 / d_i = \sum_{\alpha=1}^{n_r} (\tilde{S}_{\alpha}^{(i)})^2 l_{\alpha} / (EF).$$

В этой формуле при вычислении парциальных частот по вертикальным колебаниям  $\tilde{S}_{\alpha}^{(i)}$  — это усилие в стержне  $\alpha$  от действия вертикальной силы на узел  $i$ . Для колебаний масс в узлах по горизонтали  $\tilde{S}_{\alpha}^{(i)}$  — усилие от действия горизонтальной силы на узел  $i$ . Отсюда:

$$\omega_i^{-2} = m / d_i = m \sum_{\alpha=1}^{n_r} (\tilde{S}_{\alpha}^{(i)})^2 l_{\alpha} / (EF).$$

Таким образом, первое слагаемое в (4) вычисляется двойным суммированием:

$$\Delta_v = m \sum_{i=1}^N \sum_{\alpha=1}^{n_r} (\tilde{S}_{\alpha}^{(i)})^2 l_{\alpha} / (EF).$$

Рассчитывая сумму  $\Delta_v$  для ферм с последовательно увеличивающимся числом пролетов, получаем:

$$\begin{aligned} \Delta_v(1) &= m(14a^3 + 16c^3 + 4d^3 + 93h^3) / (9h^2 EF), \\ \Delta_v(2) &= m(74a^3 + 36c^3 + 12d^3 + 81h^3) / (3h^2 EF), \\ \Delta_v(3) &= m(638a^3 + 280c^3 + 100d^3 + 441h^3) / (9h^2 EF), \\ \Delta_v(4) &= (1262a^3 + 532c^3 + 196d^3 + 687h^3) / (9h^2 EF) \dots \end{aligned}$$

С помощью операторов системы Maple можно обобщить эти решения на случай произвольного числа пролетов:

$$\Delta_v = m(C_1 a^3 + C_2 c^3 + C_3 d^3 + C_4 h^3) / (h^2 EF), \quad (5)$$

где

$$\begin{aligned} C_1 &= 2(52k^2 - 52k + 7) / 9, \quad C_2 = 4(5k - 1)(2k - 1) / 9, \\ C_3 &= 4(2k - 1)^2 / 9, \quad C_4 = (8k^2 + 26k - 3) / 3. \end{aligned}$$

Аналогично для горизонтальных парциальных частот получаем сумму:

$$\Delta_h = m(C_5 a^3 + C_6 c^3 + C_7 d^3 + C_8 h^3) / (a^2 EF), \quad (6)$$

где

$$\begin{aligned} C_5 &= (2912k^2 - 2678k + 239) / 36, \quad C_6 = (1120k^2 - 982k + 175) / 36, \\ C_7 &= (112k - 47)(2k - 1) / 18, \quad C_8 = (448k^2 - 404k + 105) / 24. \end{aligned}$$

Нижнюю оценку первой собственной частоты колебаний конструкции вместе с выражениями (5) и (6) дает формула

$$\omega_D = 1 / \sqrt{\Delta_v + \Delta_h}. \quad (7)$$

Погрешность полученного решения оценим, сравнивая его с численным решением задачи о спектре колебаний системы с числом степеней свободы  $2N$ . Для определения собственных чисел матрицы  $\mathbf{B}_N$  воспользуемся оператором *Eigenvalues* из пакета *LinearAlgebra* системы Maple в численном режиме. На графике (3) представлены кривые зависимости первой частоты спектра, полученной численно и по формуле (7) оценки Донкерлея. Модуль упругости стали принят  $E = 2,1 \cdot 10^5$  МПа, площадь сечений стержней:  $F = 16$  см<sup>2</sup>, массы в узлах:  $m = 600$  кг, размеры:  $a = 3$  м,  $h = 1$  м. С увеличением числа пролетов основная частота собственных колебаний уменьшается. Решение (7) дает нижнюю границу первой частоты. Оценить точность аналитической оценки можно по величине относительной погрешности  $\varepsilon = (\omega_1 - \omega_D) / \omega_1$  (рисунок 3). На характер зависимости этой величины от числа пролетов существенно влияет высота фермы. Для ферм с большей высотой погрешность уменьшается с ростом числа пролетов, для меньших — увеличивается, хотя и незначительно. В любом случае кривые погрешностей выходят на горизонтальные асимптоты. Заметим, что другая известная оценка, допускающая аналитическое решение — верхняя оценка Рэля [16], дает значительно большую точность при решении аналогичных задач о колебании фермы, но расчетные формулы при этом получаются весьма громоздкими.

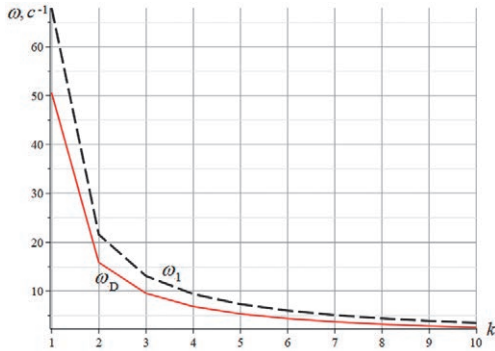


Рисунок 3. Зависимость первой частоты от числа пролетов

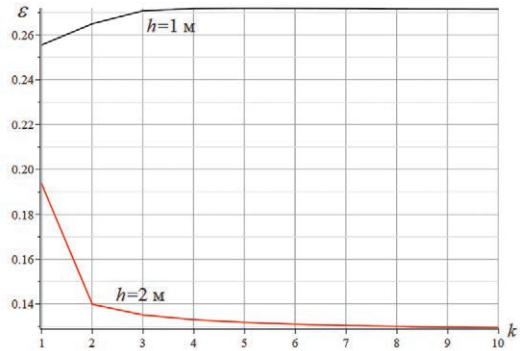


Рисунок 4. Зависимость погрешности оценки Донкерлея от числа пролетов

### Заключение

Особенностью рассмотренной регулярной фермы является то, что порядком регулярно-сти в ней является не число панелей в пролете, как в аналогичных работах [3–9], а число пролетов. В каждом пролете число панелей фиксировано. При этом удается получить аналитическую зависимость нижней границы первой частоты собственных колебаний от порядка конструкции. Характерна также хорошая точность нижней границы, что позволяет использовать найденную оценку для предварительного расчета проектируемой конструкции и тестирования численных решений. Обнаруженная особенность мгновенного кинематического вырождения фермы при четном числе панелей весьма коварна. Во-первых, при численных расчетах вырождение определителя можно не заметить за погрешностями округлений в процессе счета, особенно в процедурах решения систем линейных уравнений большого порядка. Во-вторых, естественное желание расчетчика воспользоваться готовым решением для фермы с одним числом пролетов для расчета внешне близкой фермы, но с числом пролетов всего на один больше или меньше, может привести к непредсказуемым результатам из-за кинематического вырождения полученной фермы. Особенно эффективна выведенная формула для ферм с большим числом пролетов, для которых численные расчеты начинают давать сбои из-за известного «проклятия размерности».

Расчет многопролетных ферм в численной форме содержится в [21–23].

*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФ 22-21-00473.*

## Список литературы

1. *Khodzhaev D., Abdikarimov R., Vatin N.* Nonlinear oscillations of a viscoelastic cylindrical panel with concentrated masses // МАТЕС Web of Conferences. 2018. (245). С. 01001. DOI:10.1051/mateconf/201824501001.
2. *Abdikarimov R., Vatin N., Normuminov B., Khodzhaev D.* Vibrations of a viscoelastic isotropic plate under periodic load without considering the tangential forces of inertia // Journal of Physics: Conference Series. 2021. № 1(1928). DOI:10.1088/1742-6596/1928/1/012037.
3. *Petrenko V.F.* The natural frequency of a two-span truss. AlfaBuild. – 2021. – № 20. – P. 2001. DOI:10.34910/ALF.20.1.
4. *Петренко В.Ф.* Оценка собственной частоты двухпролетной фермы с учетом жесткости опор // Строительная механика и конструкции. – 2021. – № 4 (31). – С. 16–25.
5. *Sviridenko O., Komerzan E.* The dependence of the natural oscillation frequency of the console truss on the number of panels // Construction of Unique Buildings and Structures. 2022. 101Article No 10101. DOI: 10.4123/CUBS.101.1.
6. *Комерзан Е.В., Луинов Н.А., Оситова Т.С.* Аналитический расчет прогиба плоской шпренгельной фермы с произвольным числом панелей // Строительная механика и конструкции. – 2022. – № 2 (33). – С. 17–25.
7. *Комерзан Е.В., Свириденко О.В.* Аналитический расчет прогиба плоской внешне статически неопределимой фермы с произвольным числом панелей // Строительная механика и конструкции. – 2021. – № 2 (29). – С. 29–37.
8. *Терзе С.В.* Аналитический расчет зависимости деформаций консольной стойки от числа панелей в системе Maple // Строительная механика и конструкции. – 2020. – № 2 (25). – С. 16–24.
9. *Овсянникова В.М.* Зависимость прогиба плоской внешне статически неопределимой фермы от числа панелей // Строительная механика и конструкции. – 2020. – № 4 (27). – С. 16–25.
10. *Петриченко Е.А.* Нижняя граница частоты собственных колебаний фермы Финка // Строительная механика и конструкции. – 2020. № 3 (26). – С. 21– 29.
11. *Суд И.Б.* Формулы для прогиба шпренгельной балочной фермы с произвольным числом панелей // Строительная механика и конструкции. – 2020. – № 2 (25). – С. 25–32.
12. *Ивантеев В.А.* Расчет регулярных стержневых систем. – Саратов: Саратовское высшее военно-химическое военное училище, 1973.
13. *Hutchinson R.G., Fleck N.A.* Microarchitected cellular solids – The hunt for statically determinate periodic trusses // ZAMM Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik. 2005. 85(9). Pp. 607–617. DOI:10.1002/zamm.200410208.
14. *Guest S.D., Hutchinson J.W.* On the determinacy of repetitive structures // J. Mech. Phys. Solids. 2003. 51, Pp. 383–391.
15. *Zok F.W., Lature R.M., Begley M.R.* Periodic truss structures // Journal of the Mechanics and Physics of Solids. 2016. vol. 96. Pp. 184–203. <https://doi.org/10.1016/j.jmps.2016.07.007>
16. *Vorobev O.V.* Bilateral Analytical Estimation of the First Frequency of a Plane Truss // Construction of Unique Buildings and Structures. 2020. № 7(92). С. 9204–9204. DOI:10.18720/CUBS.92.4.
17. *Kirsanov M.N.* The natural frequency of a truss with double braces // AlfaBuild 2022. 22 Article No 2202. DOI: 10.57728/ALF.22.2.
18. *Кирсанов М.Н.* Деформации и собственная частота колебаний фермы пространственной модели многоэтажного здания // Вестник МГСУ. – 2022. – Т. 17. – Вып. 5. – С. 580–588. DOI: 10.22227/1997-0935.2022.5.580-588.
19. *Kirsanov M. N.* Model of a spatial dome cover. Deformations and oscillation frequency // Construction of Unique Buildings and Structures. 2022. 99 Article No 9904. DOI: 10.4123/CUBS.99.4.
20. *Kaveh A.* Optimal analysis of structures by concepts of symmetry and regularity. New York: Springer, 2013. 463 p.
21. *He Z.Q., Xu T., Liu Z.* Decoupling of arch action and truss action in deep beams by strain energy // Structures. 2020. 26. Pp. 185–192. DOI:10.1016/J.ISTRUC.2020.04.020.
22. *Shi M., Yuan B., Jiang T., Wei Y.* In-plane failure mechanisms and strength design of circular steel tubular Vierendeel truss arches with rectangular section // Structures. 2021. 29. Pp. 1779–1790. DOI:10.1016/J.ISTRUC.2020.12.040.
23. *Li L.Y., He S.C., He X.H.* Aeroelastic model design and sensitivity analysis of a complicated steel truss arch tower to skew incident winds based on wind tunnel tests // Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics. 2021. 214. Pp. 104646. DOI:10.1016/J.JWEIA.2021.104646.

## ANALYTICAL EVALUATION OF THE FIRST NATURAL FREQUENCY OF A MULTI-SPAN TRUSS

M.N. Kirsanov, National Research University "MPEI"; e-mail: c216@ya.ru

**Abstract.** The task is to obtain the dependence of the lower limit of the fundamental frequency of natural oscillations of a statically determinate truss on the number of spans. The upper belt of the truss is straight, the lower belt of spans is arched. The inertial properties of the truss are modeled by the same concentrated masses in the nodes. Each mass has two degrees of freedom. The forces in the rods and the reactions of the supports are found by cutting out the nodes in symbolic form from the solution of the general system of equations for the equilibrium of the truss nodes. All transformations are made in the Maple computer mathematics system. To find the structural stiffness matrix, the Maxwell – Mohr formula is used. The first natural frequency of the structure is found using the approximate Dunkerley method. The generalization of a series of individual solutions found for trusses with a different number of spans to an arbitrary number of spans is performed by induction using Maple system operators. For comparison, the lowest oscillation fre-

quency of a system with many degrees of freedom obtained numerically is used. A formula is derived for the lower estimate of the first frequency depending on the size of the truss and the number of spans. Comparison of the analytical solution with the numerical one shows a good degree of approximation of the formula for the first frequency. It is shown that the error significantly depends on the height of the truss. Cases of kinematic variability of the structure with an even number of spans are revealed.

**Key words:** truss, Maple, induction, number of panels, first oscillation frequency, lower estimate.

## References

1. *Khodzhaev D., Abdikarimov R., Vatin N.* Nonlinear oscillations of a viscoelastic cylindrical panel with concentrated masses. MATEC Web of Conferences. 2018. (245). p. 01001. DOI:10.1051/mateconf/201824501001.
2. *Abdikarimov R., Vatin N., Normuminov B., Khodzhaev D.* Vibrations of a viscoelastic isotropic plate under periodic load without considering the tangential forces of inertia. Journal of Physics: Conference Series. 2021. № 1(1928). DOI:10.1088/1742-6596/1928/1/012037.
3. *Petrenko V.F.* The natural frequency of a two-span truss. AlfaBuild. 2021. № 20. p. 2001. DOI:10.34910/ALF.20.1.
4. *Petrenko V.F.* Evaluation of the natural frequency of a two-span truss, taking into account the rigidity of the supports. Stroitel'naya mekhanika i konstruksii. 2021. No. 4 (31). Pp. 16-25.
5. *Sviridenko O., Komerzan E.* The dependence of the natural oscillation frequency of the console truss on the number of panels. Construction of Unique Buildings and Structures. 2022. 101Article No 10101. DOI: 10.4123/CUBS.101.1.
6. *Komerzan E.V., Lushnov N.A., Osipova T.S.* Analytical calculation of the deflection of a flat trussed truss with an arbitrary number of panels. Stroitel'naya mekhanika i konstruksii. 2022. No. 2(33). Pp. 17-25.
7. *Komerzan E.V., Sviridenko O.V.* Analytical calculation of the deflection of a flat externally statically indeterminate truss with an arbitrary number of panels. Stroitel'naya mekhanika i konstruksii. 2021. No. 2 (29). p. 29-37.
8. *Terze S.V.* Analytical calculation of dependence of cantilever rack deformations on the number of panels in the Maple system. Stroitel'naya mekhanika i konstruksii. 2020. No. 2 (25). Pp. 16-24.
9. *Ovsyannikova V.M.* Dependence of the deflection of a flat outwardly statically indeterminate truss on the number of panels. Stroitel'naya mekhanika i konstruksii. 2020. No. 4 (27). Pp. 16-25.
10. *Petrichenko E.A.* The lower limit of the frequency of natural vibrations of the Fink truss. Stroitel'naya mekhanika i konstruksii. 2020. No. 3 (26). Pp. 21-29.
11. *Sud I. B.* Formulas for the deflection of a trussed beam truss with an arbitrary number of panels. Stroitel'naya mekhanika i konstruksii. 2020. No. 2 (25). Pp. 25-32.
12. *Ignatiev V.A.* Calculation of regular core systems. Saratov: Saratov Higher Military Chemical Military School, 1973.
13. *Hutchinson R.G., Fleck N.A.* Microarchitected cellular solids – The hunt for statically determinate periodic trusses. ZAMM Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik. 2005. 85(9). Pp. 607–617. DOI:10.1002/zamm.200410208.
14. *Guest S.D., Hutchinson J.W.* On the determinacy of repetitive structures. J. Mech. Phys. Solids. 2003. 51, Pp. 383–391.
15. *Zok F.W., Latture R.M., Begley M.R.* Periodic truss structures. Journal of the Mechanics and Physics of Solids. 2016. vol. 96. Pp. 184–203. <https://doi.org/10.1016/j.jmps.2016.07.007>.
16. *Vorobev O.V.* Bilateral Analytical Estimation of the First Frequency of a Plane Truss. Construction of Unique Buildings and Structures. 2020. № 7(92). C. 9204–9204. DOI:10.18720/CUBS.92.4.
17. *Kirsanov M.N.* The natural frequency of a truss with double braces. AlfaBuild 2022. 22 Article No 2202. DOI: 10.57728/ALF.22.2
18. *Kirsanov M.N.* Deformations and natural oscillation frequency of the truss of a spatial model of a multi-storey building. Vestnik MGSU. 2022. Vol. 17. Issue. 5. S. 580–588. DOI: 10.22227/1997-0935.2022.5.580-588
19. *Kirsanov M.N.* Model of a spatial dome cover. Deformations and oscillation frequency. Construction of Unique Buildings and Structures. 2022. 99 Article No 9904. DOI: 10.4123/CUBS.99.4
20. *Kaveh A.* Optimal analysis of structures by concepts of symmetry and regularity. New York: Springer, 463 p. DOI:10.1007/978-3-7091-1565-7.
21. *He Z.Q., Xu T., Liu Z.* Decoupling of arch action and truss action in deep beams by strain energy. Structures. 2020. 26. Pp. 185–192. DOI:10.1016/J.ISTRUC.2020.04.020.
22. *Shi M., Yuan B., Jiang T., Wei Y.* In-plane failure mechanisms and strength design of circular steel tubular Vierendeel truss arches with rectangular section. Structures. 2021. 29. Pp. 1779–1790. DOI:10.1016/J.ISTRUC.2020.12.040.
23. *Li L.Y., He S.C., He X.H.* Aeroelastic model design and sensitivity analysis of a complicated steel truss arch tower to skew incident winds based on wind tunnel tests. Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics. 2021. 214. Pp. 104646. DOI:10.1016/J.JWEIA.2021.104646.

**Для цитирования:** Кирсанов М.Н. Аналитическая оценка первой частоты собственных колебаний многопролетной фермы // Строительная механика и расчет сооружений. 2022. № 5. С. 42–47. DOI: 10.37538/0039-2383.2022.5.42.47

**For citation:** Kirsanov M.N. Analytical evaluation of the first natural frequency of a multi-span truss. Structural Mechanics and Analysis of Constructions. 2022. no. 5. pp. 42–47. (In Russian). DOI: 10.37538/0039-2383.2022.5.42.47