

АНАЛИТИЧЕСКИЙ РАСЧЕТ ПРОГИБА ШПРЕНГЕЛЬНОЙ ФЕРМЫ

Analytical calculation of the deflection of the trussed construction

М. С. Салимов, аспирант, Национальный исследовательский университет «МЭИ»

Рецензент: М.Н. Кирсанов, доктор физико-математических наук,
профессор

Аннотация

Раскосы плоской балочной фермы укреплены дополнительными шпренгельными элементами. Ставится задача нахождения зависимости прогиба конструкции от числа панелей. Ферма нагружена равномерной нагрузкой по узлам верхнего пояса. Жесткость всех стержней принята одинаковой. Обобщение ряда отдельных решений для ферм с последовательно увеличивающимся числом панелей выполнено методом индукции с использованием операторов системы символьной математики Maple. Прогиб определяется с помощью интеграла Мора.

Ключевые слова: ферма, усиление элементов, интеграл Мора, прогиб, индукция, Maple

Summary

Bracing of the planar beam trusses reinforced by additional trussing elements. The task is to find the dependence of the structure deflection on the number of panels. The truss is loaded with a uniform load on the nodes of the upper belt. The stiffness of all rods is assumed to be the same. The generalization of a number of individual solutions for trusses with a successively increasing number of panels was performed by induction using the operators of the system of symbolic mathematics Maple. The deflection is determined using the Mohr's integral.

Keywords: truss, reinforcement of elements, Mohr's integral, deflection, induction, Maple

Для уменьшения рабочей длины стержней фермы, особенно тех, что подвержены сжатию и имеют тенденцию к потере устойчивости, используется усиление их с помощью дополнительных стержней. В ферме на рисунке 1 — это два коротких стержня длиной h и $c = \sqrt{a^2 + h^2}$, шарнирно закрепленные на середине нисходящего раскоса.

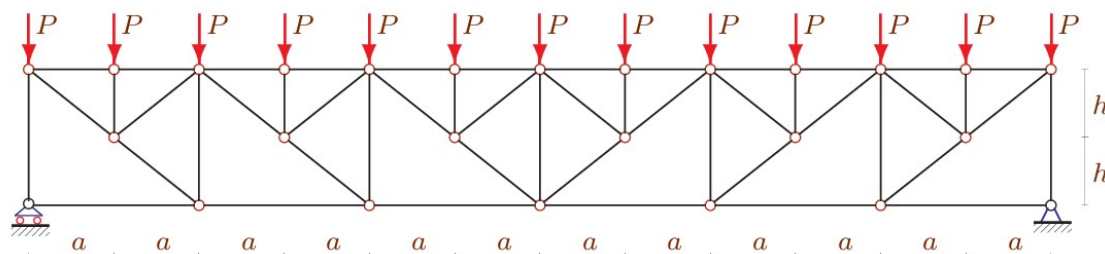


Рис. 1. Ферма под нагрузкой, $n = 3$

В ферме $2n$ панелей при этом она состоит из $n_s = 16n + 4$ стержней, включая три опорные (два стержня моделируют неподвижную опору, один — подвижную).

Для расчета усилий в стержнях и одновременно реакций опор используется программа [1-10], написанная на языке системы символьной математики Maple. Ранее эта программа ис-

пользовалась при аналитическом расчете плоских ферм с простой [2-8] и шпренгельной [9-12] решеткой. В [13-24] на основе этой программы и метода индукции получены решения для ферм с различным очертанием поясов и арочных ферм.

Для ввода данных о ферме в программу необходимо пронумеровать узлы и стержни (рис. 2).

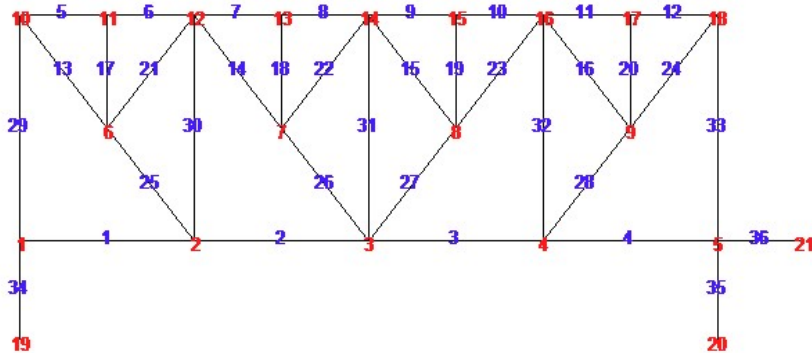


Рис. 2. Номера стержней и узлов, $n = 2$

Координаты узлов задаются в циклах. Начало координат расположено в левой опоре, ось x горизонтальная. Приведем фрагмент программы:

```
> for i to 2*n do x[i+2*n+1]:=2*a*i-a: y[i+2*n+1]:=h:od:
> for i to 4*n+1 do
>   x[i+4*n+1]:=a*(i-1);
>   y[i+4*n+1]:=2*h:
> od:
```

Также вводятся и координаты опорных шарниров (равновесие этих шарниров в программе не рассматривается):

```
> x[m3-2]:=0:   y[m3-2]:=-7:   # левая подвижная опора (число 7 произвольно,
т.к. усилие этого стержня не входит в сумму Максвелла - Мора)
> x[m3-1]:=x[2*n+1]: y[m3-1]:=-7: # правая неподвижная опора
> x[m3]:=x[2*n+1]+7: y[m3]:=0:
```

Здесь $m3:=8*n+5$ число всех узлов фермы.

Порядок соединения стержней (граф фермы) определяется специальными векторами N :

```
> for i to 2*n do
>   N[i]:=[i,i+1];
>   N[i+6*n]:=[2*i+4*n,i+2*n+1];
>   N[i+8*n]:=[2*i+4*n+1,i+2*n+1];
>   N[i+10*n]:=[2*i+4*n+2,i+2*n+1];
> od:
> for i to 4*n do
>   N[i+2*n]:=[i+4*n+1,i+4*n+2];
```

```

> od:
> for i to n do
> N[i+12*n]:= [i+1,i+2*n+1];N[i+13*n]:= [i+n,i+3*n+1];
> od:
> for i to 2*n+1 do
> N[i+14*n]:= [i,2*i+4*n];
> od:

```

Опорные стержни кодируются следующим образом

```

> N[m-2]:= [1, m3 -2]; N[m-1]:= [2*n+1,m3-1]; N[m]:= [2*n+1,m3]:

```

Здесь $m:=16*n+4$, $m3$ — число узлов в ферме.

Величина прогиба находится с помощью интеграла Мора:

$$\Delta = P \sum_{i=1}^{n_s-3} S_i^{(P)} s_i l_i / (EF).$$

Здесь введены обычные обозначения: l_i — длина стержня i , $S_i^{(P)}$ — усилие от действия распределенной нагрузки, S_i — усилия от единичной силы в точке определения прогиба, EF — жесткость стержней. Показано, что вид решения для ферм с разным числом панелей не меняется:

$$EF\Delta_n = P \frac{A_n a^3 + C_n c^3 + H_n h^3}{2h^2}. \quad (1)$$

Коэффициенты вычисляются индуктивно. Доказано, что коэффициент A_n удовлетворяет однородному рекуррентному уравнению пятого порядка

$$A_n = 5A_{n-1} - 10A_{n-2} + 10A_{n-3} - 5A_{n-4} + A_{n-5}.$$

Решение этого уравнения дает оператор **rsolve**:

$$A_n = n(10n^3 + 5n + 3) / 3.$$

Аналогично получают и другие коэффициенты:

$$C_n = 4n^2 + n, \quad H_n = 4n^2 + 8n - 2.$$

На рисунке 3 приведены кривые зависимости относительного прогиба $\Delta' = \Delta EF / (PL)$ от n при $L=an=10$ м. Кривые имеют экстремальные точки, полезные в задачах оптимизации ферм по жесткости. В приведенном примере они приходятся на нереально большие значения длины панелей $a = L/n \approx 10/2 = 5$ м. Аналитическое выражение для экстремальной точки найти не удается.

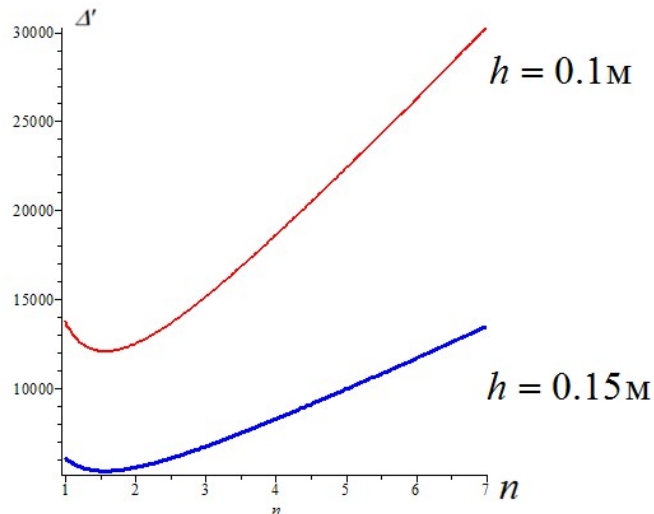


Рис. 3. Зависимость прогиба от числа панелей.

Индуктивный метод вывода точных решений ранее применялся и в задачах о пространственных фермах [25–29]. Обзоры аналитических решений для плоских ферм даны в [21, 30, 31].

Библиографический список

1. Кирсанов М.Н. Расчет прогиба плоской решетчатой фермы с четырьмя опорами // Транспортное строительство. 2017. № 7. С. 15-18.
2. Кирсанов М.Н. Аналитический расчет многорешетчатой фермы // Строительная механика и расчет сооружений. 2014. № 6 (257). С. 2-6.
3. Кирсанов М.Н. К выбору решетки балочной фермы // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2017. № 3. С. 23-27.
4. Кирсанов М.Н., Горбунова А.С., Лепетюха В.А. Расчет прогиба симметричной фермы с решеткой "Star" в аналитической форме // Строительная механика и конструкции. 2017. Т. 1. № 14. С. 36-41.
5. Кирсанов М.Н. Аналитический расчет балочной фермы с решеткой типа "Butterfly" // Строительная механика и расчет сооружений. 2016. № 4 (267). С. 2-5.
6. Kirsanov M. N. A Precise Solution of the Task of a Bend in a Lattice Girder with a Random Number of Panels// Russian Journal of Building Construction and Architecture. 2018. No. 1(37). P.92-99.
7. Кирсанов М.Н. Аналитический расчет прогиба балочной фермы с двойными раскосами// Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2018. Т. 14. № 2. С. 105-111.
8. Кирсанов М.Н. Формулы для расчета прогиба и усилий в решетчатой ферме//Механизация строительства. 2017. Т. 78. № 4. С. 20-23.
9. Кирсанов М.Н. Аналитический метод расчета прогиба плоской фермы со сложной решеткой шпренгельного типа //Транспортное строительство. 2017. № 5. С. 11-13.
10. Кирсанов М.Н. Формулы для расчета прогиба и усилий в шпренгельной ферме с произвольным числом панелей // International Journal for Computational Civil and Structural Engineering. 2018. Т. 14. № 2. С. 90-95.

11. Гавриленко А.Б., Кирсанов М.Н. Аналитическая оценка жесткости шпренгельной фермы // Строительство и реконструкция. 2018. № 2 (76). С. 12-17.
12. Кирсанов М.Н. Формулы для оценки жесткости шпренгельной фермы // Современная наука и инновации. 2017. № 1 (17). С. 139-143.
13. Kirsanov M.N. Formula for the deflection of the planar hinged-pivot frame // Строительная механика и конструкции. 2018. Т. 2. № 17. С. 67-71.
14. Kirsanov M.N. Analytical calculation, marginal and comparative analysis of a flat girder // Scientific Herald of the Voronezh State University of Architecture and Civil Engineering. Construction and Architecture. 2016. № 1. С. 84.
15. Кирсанов М.Н. Аналитический расчет прогиба балочной фермы с двойными раскосами // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2018. Т. 14. № 2. С. 105-111.
16. Кирсанов М.Н., Москвин В.Г. Деформации плоской фермы с усиленной решеткой // Строительная механика и расчет сооружений. 2018. № 4 (279). С. 10-14.
17. Кирсанов М.Н. Сравнительный анализ жесткости двух схем арочной фермы // Строительство уникальных зданий и сооружений. 2015. № 9 (36). С. 44-55.
18. Кирсанов М.Н. Индуктивный анализ деформации арочной фермы // International Journal for Computational Civil and Structural Engineering. 2018. Т. 14. № 1. С. 64-70.
19. Кирсанов М.Н. Аналитическое исследование деформаций плоской фермы арочного типа // Вестник государственного университета морского и речного флота им. адмирала С.О. Макарова. 2015. № 3 (31). С. 42-48.
20. Кирсанов М.Н. Формулы для расчета прогиба арочной фермы // Строительная механика и конструкции. 2018. Т. 1. № 16. С. 7-11.
21. Осадченко Н.В. Аналитические решения задач о прогибе плоских ферм арочного типа // Строительная механика и конструкции. 2018. Т.1. №16. С.12-33.
22. Тиньков Д.В. Индуктивный вывод формулы для горизонтального перемещения башенной конструкции // В сборнике: Международный научный семинар "Нелинейные модели в механике, статистике, теории поля и космологии" - GRACOS-17. Международная школа по математическому моделированию в системах компьютерной математики - "KAZCAS-2017". Международная научно-практическая конференция - "ИТОН-2017" Материалы семинара, школы и конференции. Под общей редакцией Ю.Г. Игнатьева. 2017. С. 249-254.
23. Тиньков Д.В. Формулы для расчёта прогиба вспарушенной балочной раскосной фермы с произвольным числом панелей // Строительная механика и конструкции. 2016. Т. 2. № 13. С. 10-14.
24. Комерзан Е.В., Свириденко О.В. Аналитический расчет прогиба балочной фермы с приподнятой панелью в нижнем поясе // Постулат. 2017. № 12 (26). С. 104.
25. Кирсанов М.Н. Анализ прогиба фермы прямоугольного пространственного покрытия // Инженерно-строительный журнал. 2015. № 1 (53). С. 32-38.
26. Кирсанов М.Н. Статический расчет и анализ пространственной стержневой системы // Инженерно-строительный журнал. 2011. № 6 (24). С. 28-34.
27. Кирсанов М.Н. Аналитический расчет пространственной стержневой системы // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2012. № 1. С. 49-53.
28. Кирсанов М.Н. Напряженное состояние и деформации прямоугольного пространственного стержневого покрытия // Научный вестник Воронежского государственного

архитектурно-строительного университета. Строительство и архитектура. 2016. № 1 (41). С. 93-100.

29. *Курсанов М.Н.* Аналитический расчет прогиба пространственного прямоугольного покрытия // Вестник МГСУ. 2018. Т. 13. № 5 (116). С. 579-586.

30. *Осадченко Н.В.* Расчёт прогиба плоской неразрезной статически определимой фермы с двумя пролётами // Постулат. 2017. № 12. С. 28.

31. *Тиньков Д.В.* Сравнительный анализ аналитических решений задачи о прогибе ферменных конструкций // Инженерно-строительный журнал. 2015. №5(57). С. 66–73.