

Издается по решению ученого совета СамГТУ (протокол № 8 от 28.03.2019 г.)

УДК 69.05(06)  
ББК 38.6Я4  
М 550

М 550 **Механизация и автоматизация строительства** [Электронный ресурс]: сборник статей / под ред. С.Я. Галицкова, М.В. Шувалова, Т.Е. Гордеевой, Н.Г. Чумаченко, А.К. Стрелкова. – Самара: Самар. гос. техн. ун-т, 2019. – 1 электрон. опт. диск.

ISBN 978-5-7964-2241-0

В сборнике представлены статьи, затрагивающие широкий круг проблем механизации и автоматизации строительства. Авторы научных работ акцентируют внимание на технических, методических и экономических аспектах вопросов механизации и автоматизации строительного производства. Особое внимание уделено средствам автоматизации технологических процессов, механическому оборудованию строительства и строительного производства, вопросам оптимизации технологических процессов, методике преподавания дисциплин, связанных с механизацией и автоматизацией строительства.

Издание адресовано преподавателям, аспирантам и студентам строительных вузов, интересующимся вопросами механизации и автоматизации строительства, технологических процессов.

Сборник зарегистрирован в системе РИНЦ

УДК 69.05(06)  
ББК 38.6Я4  
М 550

ISBN 978-5-7964-2241-0

Минимальные системные требования:  
PC 486 DX-33; Microsoft Windows XP; Adobe Reader 6.0

© Авторы, 2019  
© Самарский государственный  
технический университет, 2019

**РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ**

*Председатель редакционной коллегии:*

**Галицков С.Я.** – д.т.н., профессор, зав. кафедрой механизации, автоматизации и энергоснабжения строительства АСА СамГТУ

*Члены редакционной коллегии:*

**Шувалов М.В.** – к.т.н., доцент, директор АСА СамГТУ

**Гордеева Т.Е.** – к.т.н., доцент, декан строительно-технологического факультета АСА СамГТУ

**Чумаченко Н.Г.** – д.т.н., профессор, зав. кафедрой производства строительных материалов, изделий и конструкций АСА СамГТУ

**Стрелков А.К.** – д.т.н., профессор, зав. кафедрой водоснабжения и водоотведения АСА СамГТУ

*Ответственный секретарь редакционной коллегии:*

**Назаров М.А.** – к.т.н., доцент кафедры механизации, автоматизации и энергоснабжения строительства АСА СамГТУ

## СОДЕРЖАНИЕ

<b>МЕХАНИЧЕСКОЕ ОБОРУДОВАНИЕ СТРОИТЕЛЬСТВА И ДОРОЖНЫХ РАБОТ</b> .....	6
<b>Чухарев Р.А., Чабуткин Е.К.</b> Трамбовка ударного действия для уплотнения грунтов естественного сложения .....	7
<b>Фурманов Д.В., Чижов В.С., Клочко Н.Н.</b> Анализ взаимодействия рабочего органа строительных и дорожных машин при разработке прочных материалов .....	13
<b>Илюшин А.С.</b> Аналитический расчет прогиба составной внешне статически неопределимой рамы .....	18
<b>Антифеева В.С., Закиров М.Ф.</b> Машины и оборудование для переработки строительного мусора и отходов .....	24
<b>Бойко А.Ю., Ткачук Г.Н., Плясова А.А.</b> Зависимость прогиба плоской шарнирно-стержневой рамы от числа панелей .....	31
<b>Галиев И.Х.</b> Норма времени работы мини-экскаватора с объемом ковша менее 0,15 м <sup>3</sup> .....	37
<b>Савельева Е.В., Постольный А.А., Карлов А.Е.</b> Применение линейно-гравитационного компенсатора в строительных экзоскелетах .....	42
<b>Ткачук Г.Н., Бойко А.Ю.</b> Аналитический расчет прогиба рамной фермы с произвольным числом панелей в системе Maple .....	48
<b>Чинченко А.М.</b> Analytical calculation of the size of the bend of rectangular shape frame truss with a random number of panels in the Maple system .....	54
<b>Ким Б.Г., Шакир З., Насруллоева Р.А.</b> Повышение эффективности организации функционирования машинных парков с учетом внешних рисков .....	59
<b>АВТОМАТИЗАЦИЯ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ СТРОИТЕЛЬНОГО ПРОИЗВОДСТВА</b> .....	65
<b>Бирюков А.Н., Бирюков Ю.А., Добрышкин Е.О., Кравченко И.Н.</b> Технические решения по мониторингу технического состояния объектов энергетики в условиях Арктики .....	66
<b>Шломов С.В.</b> Параметризация процесса осцилляции сварочной горелки на роботах KUKA с применение сканера шва IBvision .....	73
<b>Ерофеева Н.В., Закиров М.Ф.</b> Перспективы применения 3D-печати при строительстве зданий и сооружений .....	77
<b>Райманов Э.Ф., Ленивец А.Г.</b> Технологический процесс горячей регенерации асфальтобетонного покрытия как объект автоматизации .....	84
<b>Фурсов П.О., Болховецкий А.С.</b> Анализ методов и средств утилизации тепловой энергии при автоклавной обработке ячеисто-бетонных изделий .....	88
<b>Ким Б.Г., Насруллоева Р.А., Сурков А.А., Терещенков Д.С.</b> О программном обеспечении АСУ технической эксплуатации парков строительных машин .....	93
<b>Фадеев А.С., Галицков К.С., Пушкаренко С.К.</b> Многоканальный цифровой измеритель температуры технологического оборудования предприятий строительной индустрии .....	97
<b>Зотов Н.С., Галицков К.С.</b> Динамика заполнителя бетонной смеси в форме при управлении амплитудой и частотой виброколебаний .....	108

<i>Чумаченко Н.Г., Хафизов И.М.</i> Влияние сепарации глиняного порошка после помола на качество керамзитового гравия.....	115
<i>Галицков С.Я., Лукьянов А.С., Фадеев А.С.</i> Анализ причин появления ошибок при высотном позиционировании отвала автогрейдера системой автоматического управления на базе приемника глобальной навигационной спутниковой системы .....	119
<b>МЕХАНИЧЕСКОЕ ОБОРУДОВАНИЕ И АВТОМАТИЗАЦИЯ ИНЖЕНЕРНЫХ СИСТЕМ ЗДАНИЙ И СООРУЖЕНИЙ</b> .....	
<i>Исаков В.Г., Пономарев Д.С., Бурт А.А.</i> Применение систем машинного обучения для автоматизации дозирования сорбента при подготовке питьевой воды населенных пунктов.....	129
<i>Масляницын А.П., Масляницына Е.В.</i> Анализ современных систем регулирования теплоснабжения жилых и административных зданий .....	133
<i>Пушин Д.В., Назаров М.А.</i> Идентификация аэротенка-смесителя как объекта управления по его динамическим характеристикам .....	138
<i>Языкин Д.А., Назаров М.А.</i> Математическое описание регенератора как динамического элемента системы рециркуляции активного ила при биологической очистке сточных вод.....	144
<i>Пушин Д.В.</i> Сравнительный анализ двух вариантов систем управления процессом биологической очистки сточных вод в аэротенке .....	150
<i>Екимова Д.Е.</i> Анализ возможности использования дымовых газов от печи обжига керамзита для отопления производственных помещений.....	154
<b>СОВЕРШЕНСТВОВАНИЕ МЕТОДИКИ ПОДГОТОВКИ СПЕЦИАЛИСТОВ В ОБЛАСТИ МЕХАНИЗАЦИИ И АВТОМАТИЗАЦИИ СТРОИТЕЛЬСТВА</b> .....	
<i>Шакуров И.И., Сердцева А.В.</i> Обучение методам настройки ПИД-регуляторов, используемых в автоматизированных системах управления параметрами микроклимата чистых помещений .....	162
<i>Никишкин П.П., Дуданов И.В.</i> Освоение системы инженерного анализа в учебном процессе на примере расчета прочностных характеристик рамы бетоноукладчика .....	166
<i>Нестеренко В.М., Мельник Н.М.</i> Педагогические условия коэволюции человеческого потенциала и человеческого капитала в строительной отрасли .....	171

УДК 624.072.33.041.1

## АНАЛИТИЧЕСКИЙ РАСЧЕТ ПРОГИБА СОСТАВНОЙ ВНЕШНЕ СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМОЙ РАМЫ

*Илюшин Александр Сергеевич*

*Национальный исследовательский университет «МЭИ»*

С использованием системы компьютерной математики и метода индукции выведена формула зависимости прогиба плоской стержневой рамы составного типа, опирающейся на четыре шарнирные опоры, две из которых являются подвижными. Внешней нагрузкой является вертикальная сосредоточенная нагрузка в сочленяющем шарнире. Показано, что зависимость прогиба от числа панелей в ригеле имеет полиномиальный характер.

**Ключевые слова:** ферма, прогиб, индукция, Maple, точное решение.

Рассмотрим составную раму решетчатого типа с крестообразной решеткой и четырьмя опорами (рис. 1). Особенность конструкций опор не позволяет определить их реакции обычными методами механики из уравнения равновесия рамы в целом и ее отдельных частей после разбиения ее на части по внутреннему сочленяющему шарниру. Реакции опор в таких «внешне неопределимых» конструкциях определяются из решения уравнений равновесия всех узлов фермы вместе с определением усилий в стержнях. В настоящей работе ставится задача получить точную формулу для зависимости прогиба фермы от числа панелей в ригеле при фиксированном числе панелей в боковых стойках.

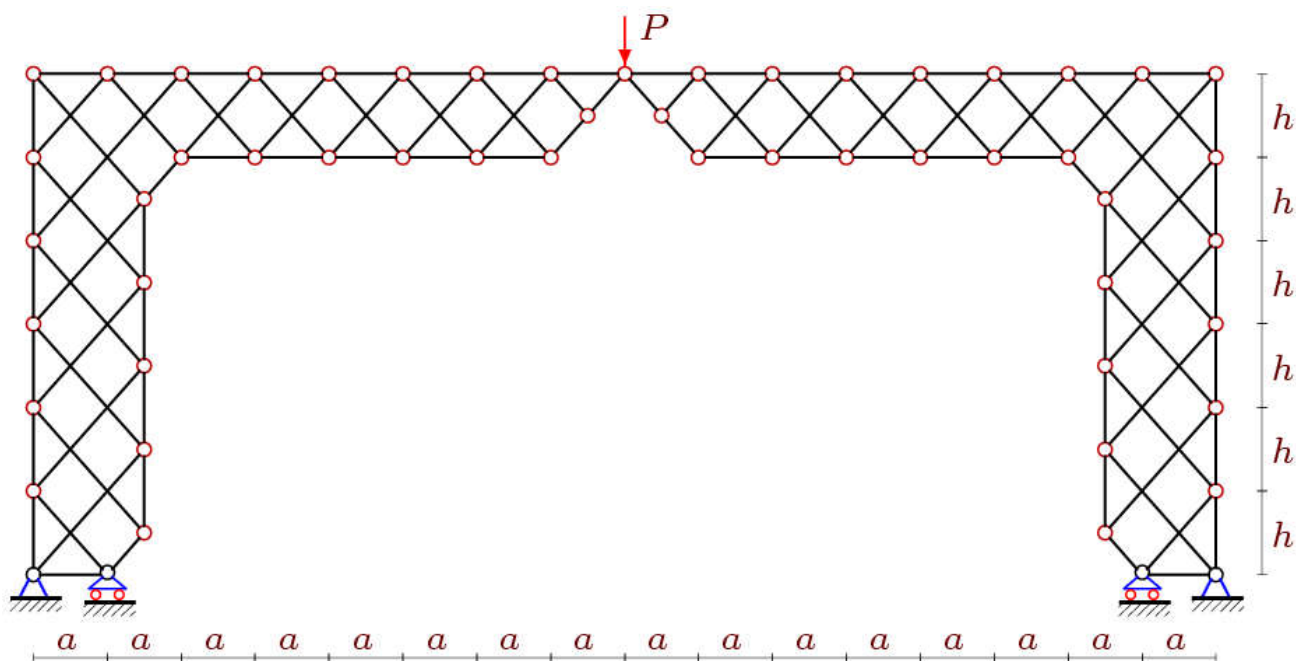


Рис. 1. Ферма под действием сосредоточенной нагрузки

Для расчета прогиба рамы (вертикальное перемещение сочленяющего узла) используется программа определения усилий в стержнях статически определимых ферм, написанная на языке системы компьютерной математики Maple [1]. Метод, использованный для вывода искомой формулы, ранее применялся для расчета ряда решетчатых ферм [2-13], ферм арочного типа [14-19] и пространственных структур регулярного типа [20-29]. Аналитические решения для ферм, которые допускают мгновенную переменность, рассчитаны в [30-33]. Индукционный метод, примененный в [34,35], дал возможность получить статические соотношения для ножничных механизмов. Аналитические решения для регулярных ферм типа Больмана или Финка были получены в [36-40]. Расчет прогиба плоской статически определимой рамы индукционным методом был сделан в [41]. Обзоры работ с использованием индукционного метода расчета ферм содержатся в [42-44]. В [45] получено решение о прогибе Г-образного кронштейна-фермы для крепления уличного освещения или рекламы.

В результате расчётов ряда ферм с различным последовательно увеличивающимся числом панелей получено выражение для прогиба фермы, не зависящее по форме от числа панелей:

$$EF\Delta = P(Aa^3 + Bc^3 + Ch^3) / (2h^2), \quad (1)$$

где  $c = \sqrt{a^2 + h^2}$  – длина короткого раскоса в ригеле. Характерная черта *регулярных* конструкций – постоянство формы конечного решения для различного числа панелей [46,47]. С помощью метода индукции найдены коэффициенты, зависящие от числа панелей [2-8].

С помощью оператора «rgf\_findrecur» из специализированного пакета «genfunc» по данным расчета четырнадцати ферм получаем линейные однородные рекуррентные уравнения порядков 7 и 5:

$$A_n = A_{n-1} + 3A_{n-2} - 3A_{n-3} - 3A_{n-4} + 3A_{n-5} + A_{n-6} - A_{n-7};$$

$$B_n = B_{n-1} + 2B_{n-2} - 2B_{n-3} - B_{n-4} + B_{n-5};$$

$$C_n = C_{n-1} + 2C_{n-2} - 2C_{n-3} - C_{n-4} + C_{n-5}.$$

Находим решения приведенных уравнений с помощью оператора «rsolve» в виде полиномов третьего и второго порядка по числу панелей:

$$A = \frac{46n^3 + 6n^2(34 + (-1)^n) + (221 - 45(-1)^n)n - 93(-1)^n + 165}{192};$$

$$B = \frac{36n^2 + (43 - 7(-1)^n)n - 25(-1)^n + 49}{16};$$

$$C = \frac{58n^2 + 10n(5 - (-1)^n) - 65(-1)^n + 137}{32}.$$

Полученное решение (1) легко обобщить на произвольное соотношение жесткостей стержней различной длины:

$$EF\Delta = P(A\gamma_a a^3 + B\gamma_b c^3 + C\gamma_c h^3) / (2h^2),$$

где введены коэффициенты жесткостей стержней соответствующей длины:

$$EF_a = EF / \gamma_a; EF_b = EF / \gamma_b; EF_c = EF / \gamma_c.$$

Модули упругости стержней принимаются равными, а площади сечения варьируются по отношению к некоторой постоянной площади  $F$ .

Для безразмерного относительного прогиба  $\Delta' = \Delta EF / (LP)$  на рис. 2 построены кривые по формуле (1) при длине пролета  $L = 100$  м. Длина панели  $a$  зависит от пролета:  $a = L / (2n + 5)$ . Высота  $h$  указана в метрах.

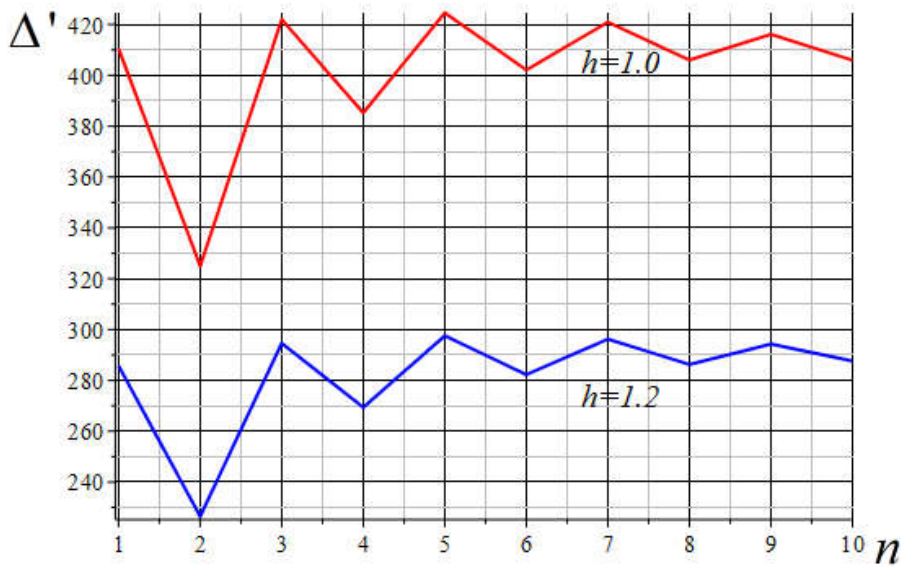


Рис. 2. Зависимость прогиба от числа панелей

С увеличением числа панелей уменьшается колебание величины прогиба. Тем самым зависимость напоминает график затухающих колебаний. Наименьшая величина прогиба достигается при  $n=2$ . Аналогичная «пилообразная» зависимость прогиба от числа панелей получена в [9] для рамы (рис. 3).

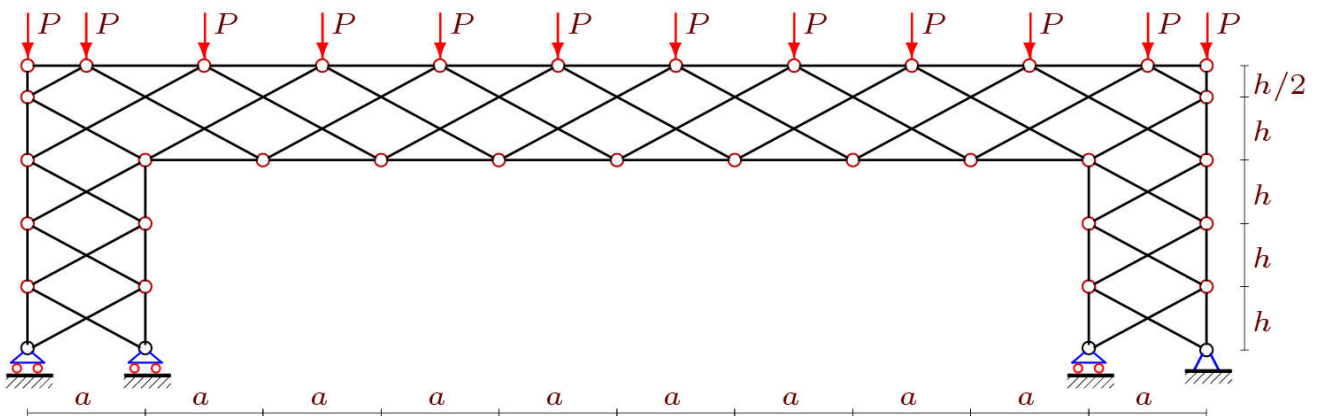


Рис. 3. Стержневая внешне статически неопределимая рама [9]

Конструкции этой рамы (рис. 3) и рассмотренной выше (рис. 1) объединяет тип решетки и наличие внешней статической неопределенности. Вполне возможно, что именно это и является причиной скачкообразной зависимости прогиба от числа панелей. Практическое использование обнаруженного факта резких изменений жесткости рамы при изменении числа панелей может быть в оптимизации ее конструкции рациональным выбором ее параметров.

### БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Кирсанов М.Н. Maple и Maple. Решения задач механики. СПб.: Изд-во Лань, 2012. 512 с.
2. Кирсанов М.Н., Москвин В.Г. Деформации плоской фермы с усиленной решеткой // Строительная механика и расчет сооружений. 2018. № 4 (279). С. 10-14.
3. Кирсанов М.Н. Аналитический расчет многорешетчатой фермы // Строительная механика и расчет сооружений. 2014. № 6 (257). С. 2-6.
4. Кирсанов М.Н. К выбору решетки балочной фермы // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2017. № 3. С. 23-27.
5. Кирсанов М.Н. Аналитический расчет балочной фермы с решеткой типа «Butterfly» // Строительная механика и расчет сооружений. 2016. № 4 (267). С. 2-5.
6. Кирсанов М.Н. Формулы для расчета прогиба и усилий в решетчатой ферме // Механизация строительства. 2017. Т. 78. № 4. С. 20-23.
7. Кирсанов М.Н. Аналитический расчет балочной фермы со сложной решеткой // Строительная механика и расчет сооружений. 2015. № 3 (260). С. 7-12.
8. Кирсанов М.Н. Аналитический метод расчета прогиба плоской фермы со сложной решеткой шпренгельного типа // Транспортное строительство. 2017. № 5. С. 11-13.
9. Кирсанов М.Н. Аналитический расчет рамы с произвольным числом панелей // Инженерно-строительный журнал. 2018. № 6 (82). С. 127-135. DOI: 10.18720/MCE.82
10. Кирсанов М.Н. Статический расчет плоской фермы с двойной треугольной решеткой // Справочник. Инженерный журнал с приложением. 2017. № 11 (248). С. 32-36.
11. Кирсанов М.Н. Аналитический расчет регулярной балочной фермы с произвольным числом панелей со сложной решеткой // Строительная механика и расчет сооружений. 2016. № 3 (266). С. 16-19.
12. Белянкин Н.А., Бойко А.Ю., Кирсанов М.Н. Аналитический расчет прогиба балочной фермы с усиленной треугольной решеткой // Строительство и архитектура. 2017. Т. 5. № 2. С. 122-125.
13. Кирсанов М.Н., Горбунова А.С., Лепетюха В.А. Расчет прогиба симметричной фермы с решеткой «Star» в аналитической форме // Строительная механика и конструкции. 2017. Т. 1. № 14. С. 36-41.
14. Кирсанов М.Н. Индуктивный анализ деформации арочной фермы // International Journal for Computational Civil and Structural Engineering. 2018. Т. 14. № 1. С. 64-70.
15. Кирсанов М.Н. Аналитическое исследование деформаций плоской фермы арочного типа // Вестник государственного университета морского и речного флота им. адмирала С.О. Макарова. 2015. № 3 (31). С. 42-48.
16. Кирсанов М.Н. Сравнительный анализ жесткости двух схем арочной фермы // Строительство уникальных зданий и сооружений. 2015. № 9 (36). С. 44-55.
17. Кирсанов М.Н. Формулы для расчета деформаций арочной фермы с произвольным числом панелей // Строительство уникальных зданий и сооружений. 2018. 4 (67). С. 86-94. DOI: 10.18720/CUBS.67.7
18. Кирсанов М.Н. Формулы для расчета прогиба арочной фермы // Строительная механика и конструкции. 2018. Т. 1. № 16. С. 7-11.
19. Кирсанов М.Н. Аналитическая оценка прогиба и усилий в критических стержнях арочной фермы // Транспортное строительство. 2017. № 9. С. 8-10.



20. Кирсанов М.Н. Анализ прогиба фермы прямоугольного пространственного покрытия // Инженерно-строительный журнал. 2015. № 1 (53). С. 32-38.
21. Кирсанов М.Н. Аналитический расчет и оптимизация пространственной балочной фермы // Вестник Московского энергетического института. 2012. № 5. С. 5-8.
22. Кирсанов М.Н. Анализ зависимости прогиба фермы прямоугольного покрытия от числа панелей // Строительная механика и конструкции. 2018. № 4 (19). С. 52-57
23. Кирсанов М.Н. Статический расчет и анализ пространственной стержневой системы // Инженерно-строительный журнал. 2011. № 6 (24). С. 28-34.
24. Кирсанов М.Н. Оценка прогиба и устойчивости пространственной балочной фермы // Строительная механика и расчет сооружений. 2016. № 5 (268). С. 19-22.
25. Кирсанов М.Н. Аналитический расчет пространственной стержневой системы // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2012. № 1. С. 49-53.
26. Кирсанов М.Н. Напряженное состояние и деформации прямоугольного пространственного стержневого покрытия // Научный вестник Воронежского государственного архитектурно-строительного университета. Строительство и архитектура. 2016. № 1 (41). С. 93-100.
27. Кирсанов М.Н. Учет строительного подъема в аналитическом расчете пространственной балочной фермы // Известия Московского государственного технического университета МАМИ. 2014. Т. 4. № 2 (20). С. 36-39.
28. Леонов П.Г., Кирсанов М.Н. Аналитический расчет и анализ пространственной стержневой конструкции в системе Maple // Информатизация инженерного образования ИНФОРИНО-2014: труды Международной научно-методической конференции. 2014. С. 239-242.
29. Кирсанов М.Н. Аналитический расчет прогиба пространственного прямоугольного покрытия // Вестник МГСУ. 2018. Т. 13. № 5 (116). С. 579-586.
30. Кирсанов М.Н. Расчет пространственной стержневой системы, допускающей мгновенную изменяемость // Строительная механика и расчет сооружений. 2012. № 3 (242). С. 48-51.
31. Кирсанов М.Н. Вывод формулы для прогиба решетчатой фермы, имеющей случаи кинематической изменяемости // Строительная механика и конструкции. 2017. Т. 1. № 14. С. 27-30.
32. Кирсанов М.Н., Тиньков Д.В. Аналитическое решение задачи о частоте колебания груза в произвольном узле балочной фермы в системе Maple // Строительство: наука и образование. 2018. Т. 8. Вып. 4. Ст. 3. URL: <http://nso-journal.ru>. DOI: 10.22227/2305-5502.2018.4.3.
33. Кирсанов М.Н. Формула для прогиба и анализ кинематической изменяемости решетчатой фермы // Строительная механика и конструкции. 2017. Т. 2. № 15. С. 5-10.
34. Кийко Л.К., Кирсанов М.Н. Аналитический расчет подъемника параллелограммного типа с произвольным числом секций // Проблемы машиностроения и автоматизации. 2016. № 3. С. 48-53.
35. Кирсанов М.Н. Аналитический расчет параллелограммного механизма с произвольным числом секций // Вестник машиностроения. 2018. № 1. С. 37-39.
36. Пережилова Е.Д. Точное решение задачи о смещении подвижной опоры фермы с произвольным числом панелей // Научный альманах. 2016. № 9-2 (23). С. 42-45.
37. Савиных А.С. Формула для расчета смещения подвижной опоры плоской статически определимой фермы // Научный альманах. 2016. № 9-2 (23). С. 46-49.
38. Харик С.А. Индуктивный метод для расчета прогиба плоской статически определимой фермы, загруженной в середине пролета // Научный альманах. 2016. № 11-2 (25). С. 332-334
39. Васильченко Д.И. Формула для смещения опоры балочной фермы типа Больмана // Научный альманах. 2016. № 8-1 (22). С. 261-263.
40. Васильков И.Д., Кирсанов М.Н. Формулы для определения прогиба и смещения опоры фермы Больмана с произвольным числом панелей // Научный альманах. 2016. № 11-2 (25). С. 289-292.
41. Кирсанов М.Н. Расчетная модель плоской фермы рамного типа с произвольным числом панелей // Вестник МГСУ. 2018. Т. 13. Вып. 9. С. 1184-1192. DOI: 10.22227/1997-0935.2018.10.1184-1192.

42. Тиньков Д.В. Сравнительный анализ аналитических решений задачи о прогибе ферменных конструкций // Инженерно-строительный журнал. 2015. № 5 (57). С. 66-73.
43. Осадченко Н.В. Аналитические решения задач о прогибе плоских ферм арочного типа // Строительная механика и конструкции. 2018. №. 1. С. 12-33.
44. Осадченко Н.В. Расчёт прогиба плоской неразрезной статически определимой фермы с двумя пролётами // Постулат. 2017. № 12.
45. Кирсанов М.Н. Расчет Г-образной фермы крепления дорожных знаков и оборудования // Научный журнал строительства и архитектуры. 2019. № 1 (53). С. 84-92. DOI: 10.25987/VSTU.2019.53.1.008.
46. Hutchinson R.G., Fleck N.A. The structural performance of the periodic truss // Journal of the Mechanics and Physics of Solids. 2006. Vol. 54. Issue 4. Pp. 756-782.
47. Hutchinson R.G., Fleck N.A. Microarchitected cellular solids – the hunt for statically determinate periodic trusses // ZAMM Z. Angew. Math. Mech. 2005. 85. No. 9. Pp. 607-617.

## ANALYTICAL CALCULATION OF THE DEFLECTION OF A COMPOSITE EXTERNAL STATICALLY UNCERTAINLY FRAME

*Ilyushin Alexander Sergeevich*

*National Research University «MPEI»*

*Using a computer mathematics system and induction method, a formula is derived for the dependence of the deflection of a flat rod frame of a composite type, based on four articulated supports, two of which are movable. The external load is the vertical concentrated load in the articulated joint. It is shown that the dependence of the deflection on the number of panels in the crossbar is polynomial.*

**Keywords:** *truss, deflection, induction, Maple, exact solution.*

### ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРЕ

**Илюшин Александр Сергеевич**

студент института тепловой и атомной энергетики  
Национальный исследовательский университет  
«МЭИ»  
111250, Россия, Москва, ул. Красноказарменная, 14  
E-mail: ilyushin.as@yandex.ru

### INFORMATION ABOUT AUTHOR

**Ilyushin Alexander Sergeevich**

Student of Thermal and Nuclear Power Engineering  
Institute  
National Research University «MPEI»  
111250, Russia, Moscow, Krasnokazarmennaya st., 14  
E-mail: ilyushin.as@yandex.ru

УДК 624.04

## ЗАВИСИМОСТЬ ПРОГИБА ПЛОСКОЙ ШАРНИРНО-СТЕРЖНЕВОЙ РАМЫ ОТ ЧИСЛА ПАНЕЛЕЙ

*Бойко Андрей Юрьевич<sup>1</sup>  
Ткачук Георгий Николаевич<sup>2</sup>  
Плясова Анна Алексеевна<sup>3</sup>*

<sup>1</sup> *Национальный исследовательский университет «МЭИ»*

<sup>2</sup> *Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет)*

<sup>3</sup> *Российский химико-технологический университет им. Д.И. Менделеева*

*Анализируется деформация плоской решетчатой фермы рамного типа под действием сосредоточенной нагрузки в середине пролета или равномерной нагрузки по верхнему поясу ригеля. Выводится функция величины прогиба рамы от числа панелей. Для решения поставленной задачи применяются специальные операторы системы Maple и метод вырезания узлов. Индуктивный метод по двум независимым параметрам фермы дает возможность обобщить частные решения на произвольное число панелей. Для определения перемещения используется интеграл Мора.*

**Ключевые слова:** *ферма, рама, формула Максвелла-Мора, прогиб, индукция, Maple.*

Аналитический метод расчета ферм во многом является альтернативным по отношению к традиционному численному. Значимость формул в аналитическом виде для расчета строительных конструкций определяется их простотой и числом независимых параметров конкретной задачи, характеризующими вместе с размерами форму конструкции. Простые формулы для расчета конструкции с фиксированным числом узлов, в которые входят только размеры, величина нагрузки определенного вида и характеристики свойств материала, получаются в известных современных системах компьютерной математики, одной из которых является Maple [1].

Область применения формул для расчета ферм, обладающих некоторой периодичностью структуры, при использовании двух параметров (рис. 1, 2) значительно шире, чем в задачах с одним параметром. В рассматриваемой ферме с  $2n$  панелями в ригеле высотой  $2b$  и высотой боковых опорных ферм  $mh$  это параметры  $m$  и  $n$ . При малом числе  $n$  и большом  $m$  ферма имеет вертикальную форму башенного типа, а при  $m = 1$  – это балочная ферма. В ферме содержится  $N_s = 8(m + n) + 16$  стержней (вместе с тремя опорными).

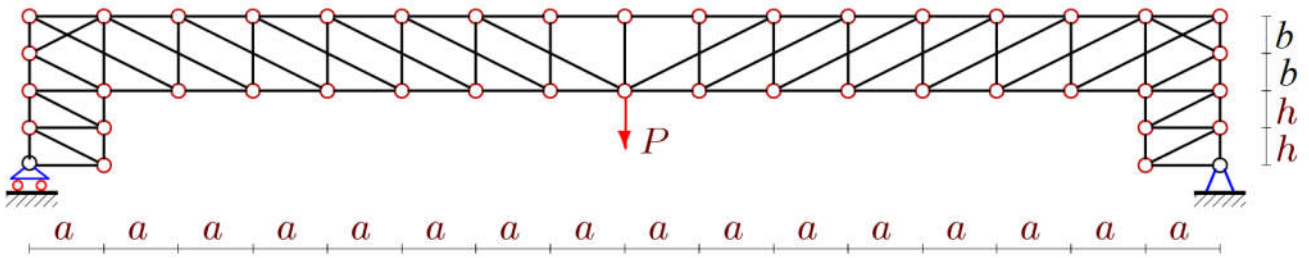


Рис. 1. Ферма при  $n=7, m=2$  при нагружении в середине пролета

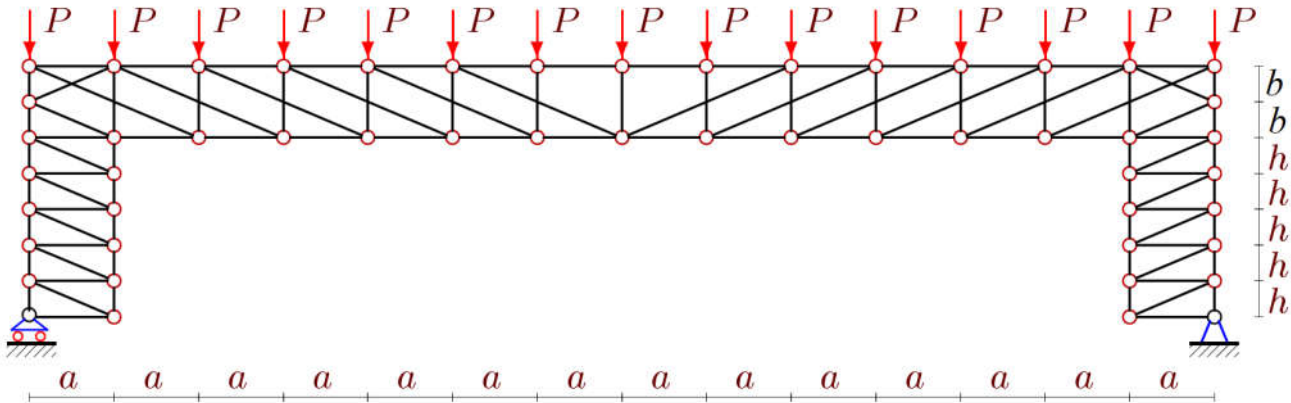


Рис. 2. Ферма при  $n=6, m=5$  с распределенной нагрузкой по верхнему поясу

Решение задачи о выводе аналитической зависимости прогиба от числа панелей начинается с определения усилий в стержнях. В компьютерной математической системе Maple разработана программа [1], основанная на методе вырезания узлов и составления матрицы уравнений равновесия всех узлов, дающая решение задачи об усилиях в символьной форме. В программу вводятся координаты узлов, порядок соединения стержней и узлов. Ранее эта программа применялась в некоторых аналитических расчетах плоских арочных [2-5], решетчатых [6-12] и пространственных фермах [13-20].

В настоящей работе для нагрузки по середине ригеля применим формулу Максвелла-Мора:

$$\Delta = \sum_{i=1}^{N_s-3} S_i^{(P)} S_i^{(1)} l_i / (EF), \quad (1)$$

где  $EF$  – продольная жесткость упругих (модуль упругости  $E$ ) стержней;  $S_i^{(P)}$  – усилие в стержне с номером  $i=1, \dots, N_s-3$  фермы от заданной нагрузки;  $l_i$  – длина стержня;  $S_i^{(1)}$  – усилие в этом же стержне от действия единичной силы, приложенной к среднему узлу нижнего пояса, прогиб которого (вертикальное смещение) вычисляется. Жесткость стержней принята одинаковой для всех стержней фермы. Метод индукции дает возможность получить общее для всех ферм

с произвольными числами панелей в ригеле и стойках выражение для смещения среднего узла ригеля вида:

$$\Delta = P(C_1 a^3 + C_2 d^3 + C_3 b^3 + C_4 h b^2) / (b^2 EF), \quad (2)$$

где  $P$  – величина нагрузки на раму;  $C_i$  – искомые коэффициенты аналитического выражения.

Отметим также, что  $d = \sqrt{a^2 + b^2}$  — длина раскоса в стойках.

Крайне важно отметить, что прогиб зависит от числа панелей как в вертикальном, так и в горизонтальном направлении. Это говорит о необходимости расчета числовых последовательностей от параметра  $n$  при постоянном  $m$ , а затем, наоборот, для параметра  $m$  при постоянном  $n$ .

Рассчитаем коэффициенты  $C_i$  в (2) от единичной нагрузки, применяя метод индукции и выявляя числовые последовательности коэффициентов перед степенями линейных размеров  $a$ ,  $b$ ,  $d$ , а также используя оператор **rgf\_findrecur** из пакета **genfunc** системы Maple. По этим данным для каждого из случаев, описанных выше, получим рекуррентные уравнения при постоянном параметре  $m$ :

$$C_{1(n)} = 3C_{1(n-1)} - 2C_{1(n-2)} - 2C_{1(n-3)} + 3C_{1(n-4)} - C_{1(n-5)}; \quad C_{2(n)} = C_{2(n-1)} + C_{2(n-2)} + C_{2(n-3)};$$

$$C_{3(n)} = C_{3(n-1)} + C_{3(n-2)} - C_{3(n-3)}; \quad C_{4(n)} = C_{4(n-1)}.$$

Аналогично получим уравнения при постоянном параметре  $n$ :

$$C_{1(m)} = C_{1(m-1)}; \quad C_{2(m)} = C_{2(m-1)}; \quad C_{3(m)} = C_{3(m-1)}; \quad C_{4(m)} = 2C_{4(m-1)} - C_{4(m-2)}.$$

Используя оператор *rsolve* для решения рекуррентных уравнений в виде аналитических выражений, получим коэффициенты  $C_i$ , зависящие от чисел  $m$  и  $n$  [21-22]:

$$C_1 = (2n^3 + 6n^2 + 10n - 3(-1)^n + 3) / 24; \quad C_2 = (4n - (-1)^n + 3) / 8; \quad C_3 = (4n - 3(-1)^n + 1) / 8; \quad C_4 = m / 2.$$

В задаче о прогибе фермы под действием равномерной нагрузки выражение для прогиба имеет тот же вид (2). Аналогично, используя оператор **rgf\_findrecur** из пакета **genfunc** системы Maple по данным, полученным для различных  $m$  и  $n$ , выведем рекуррентные уравнения при постоянном параметре  $m$ , а затем и  $n$  соответственно. Уравнения получаются большего порядка и для их вывода требуется большее время:

$$C_{1(n)} = 3C_{1(n-1)} - C_{1(n-2)} - 5C_{1(n-3)} + 5C_{1(n-4)} + C_{1(n-5)} - 3C_{1(n-6)} + C_{1(n-7)};$$

$$C_{2(n)} = C_{2(n-1)} + 2C_{2(n-2)} - 2C_{2(n-3)} - C_{2(n-4)} + C_{2(n-5)};$$

$$C_{3(n)} = C_{3(n-1)} + 2C_{3(n-2)} - 2C_{3(n-3)} - C_{3(n-4)} + C_{3(n-5)}; \quad C_{4(n)} = 2C_{4(n-1)} - C_{4(n-2)}.$$

Как показывают расчеты, некоторые коэффициенты не зависят от числа панелей по вертикали фермы. Для коэффициента при  $hb^2$  имеем простое однородное уравнение второго порядка  $C_{4(m)} = 2C_{4(m-1)} - C_{4(m-2)}$ . С помощью оператора *rsolve* найдем решения этих уравнений

$$C_1 = (10n^4 + 30n^3 + 68n^2 + 20n - (12n - 3)(-1)^n - 3) / 96; \quad C_2 = (2n^2 + 3n - n(-1)^n + 2) / 8;$$

$$C_3 = (2n^2 + 13n - (3n - 4)(-1)^n + 10) / 8; \quad C_4 = m(4n + 3) / 2.$$

Основываясь на полученные результаты, можно установить, что выведены достаточно простые формулы, позволяющие оценить деформацию предложенной схемы фермы. Алгоритм, с помощью которого были получены формулы, может быть перенастроен и на другие нагрузки. Примечательно, что весьма эффективным полученное решение является при большом числе панелей в ферме, т.е. в тех случаях, когда при численном решении системы уравнений большой размерности возникают трудности ее преодоления, что объясняется неизбежным накоплением погрешностей счета.

Отметим, что метод индукции и программа расчета усилий на языке Maple также использовались при расчете плоских распорных рам и арок [23,24], слабо вварушенной фермы [25], решетчатой фермы, имеющей случаи кинематической изменяемости [26], конструкции башенного типа [27] и некоторых других плоских статически определимых ферм [28-31]. Методом индукции получены аналитические выражения для частот колебаний балочных ферм [32,33]. Обзор некоторых аналогичных работ, использующих программу [1] в задачах о прогибе плоских ферм, выполнен в [4,34].

### БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Кирсанов М. Н. Maple и Maplet. Решения задач механики. СПб.: Изд-во Лань, 2012. 512 с.
2. Кирсанов М.Н. Сравнительный анализ жесткости двух схем арочной фермы // Строительство уникальных зданий и сооружений. 2015. № 9 (36). С. 44-55.
3. Кирсанов М.Н. Аналитическое исследование деформаций плоской фермы арочного типа // Вестник государственного университета морского и речного флота им. адмирала С.О. Макарова. 2015. № 3 (31). С. 42-48.
4. Осадченко Н.В. Аналитические решения задач о прогибе плоских ферм арочного типа // Строительная механика и конструкции. 2018. Т. 1. № 16. С. 12-33.
5. Тиньков Д.В. Расчет прогиба плоской арочной фермы с крестообразной решеткой // Постулат. 2017. № 12.
6. Кирсанов М.Н. Аналитический расчет многорешетчатой фермы // Строительная механика и расчет сооружений. 2014. № 6 (257). С. 2-6.
7. Кирсанов М.Н. Расчет жесткости стержневой решетки // Вестник машиностроения. 2015. № 8. С. 48-51.
8. Кирсанов М.Н. Статический анализ и монтажная схема плоской фермы // Вестник государственного университета морского и речного флота им. адмирала С.О. Макарова. 2016. № 5 (39). С. 61-68.
9. Кирсанов М.Н. Аналитический расчет балочной фермы со сложной решеткой // Строительная механика и расчет сооружений. 2015. № 3 (260). С. 7-12.
10. Кирсанов М.Н. Точные формулы для расчета прогиба и усилий в стержнях типовой фермы «молодечно» с произвольным числом панелей // Инженерно-строительный журнал. 2016. № 1 (61). С. 33-41.

11. Белянкин Н.А., Бойко А. Ю., Плясова А.А. Индуктивный анализ деформативности многорешетчатой фермы при несимметричном нагружении // Строительная механика и конструкции. 2018. № 3 (18). С. 33-41.
12. Доманов Е.В. Вывод формулы для прогиба балочной фермы с крестообразной решеткой // Строительная механика и конструкции. 2017. № 2 (15). С. 15-19.
13. Kirsanov M.N. The deflection of spatial coatings with periodic structure // Инженерно-строительный журнал. 2017. № 8 (76). С. 58-66.
14. Кирсанов М.Н. Аналитический расчет пространственной стержневой системы // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2012. № 1. С. 49-53.
15. Кирсанов М.Н. Напряженное состояние и деформации прямоугольного пространственного стержневого покрытия // Научный вестник Воронежского государственного архитектурно-строительного университета. Строительство и архитектура. 2016. № 1 (41). С. 93-100.
16. Кирсанов М.Н. Аналитическое исследование жесткости пространственной статически определимой фермы // Вестник МГСУ. 2017. Т. 12. № 2 (101). С. 165-171.
17. Кирсанов М.Н. Аналитический расчет и оптимизация пространственной балочной фермы // Вестник Московского энергетического института. Вестник МЭИ. 2012. № 5. С. 5-8.
18. Кирсанов М.Н. Аналитический расчет пространственной стержневой регулярной структуры с плоской гранью // Строительная механика и расчет сооружений. 2015. № 2 (259). С. 2-6.
19. Кирсанов М.Н. Оценка прогиба и устойчивости пространственной балочной фермы // Строительная механика и расчет сооружений. 2016. № 5 (268). С. 19-22.
20. Леонов П.Г., Кирсанов М.Н. Аналитический расчет и анализ пространственной стержневой конструкции в системе Maple // Информатизация инженерного образования ИНФОРИНО-2014: труды Международной научно-методической конференции. 2014. С. 239-242.
21. Kirsanov M.N. A precise solution of the task of a bend in a lattice girder with a random number of panels // Russian Journal of Building Construction and Architecture. 2018. № 1 (37). С. 92-99.
22. Кирсанов М.Н. Формулы для расчета прогиба и усилий в решетчатой ферме // Механизация строительства. 2017. Т. 78. № 4. С. 20-23.
23. Кирсанов М.Н. Аналитический расчет прогиба распорной фермы с произвольным числом панелей // Механизация строительства. 2017. Т. 78. № 3. С. 26-29.
24. Кирсанов М.Н. Скрытая особенность и асимптотические свойства одной плоской балочной фермы // Строительная механика и расчет сооружений. 2014. № 4 (255). С. 9-13.
25. Тиньков Д.В. Формулы для расчёта прогиба впарушенной балочной раскосной фермы с произвольным числом панелей // Строительная механика и конструкции. 2016. Т. 2. № 13 (13). С. 10-14.
26. Кирсанов М.Н. Вывод формулы для прогиба решетчатой фермы, имеющей случаи кинематической изменяемости // Строительная механика и конструкции. 2017. Т. 1. № 14. С. 27-30.
27. Тиньков Д.В. Индуктивный вывод формулы для горизонтального перемещения башенной конструкции // Международный научный семинар «Нелинейные модели в механике, статистике, теории поля и космологии» – GRACOS-17. Казань: Изд-во Академии наук РТ, 2017. С. 249-254.
28. Кирсанов М.Н. О влиянии наклона подвижной опоры на жесткость балочной фермы // Вестник МГСУ. 2016. № 10. С. 35-44.
29. Кирсанов М.Н. К выбору решетки балочной фермы // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2017. № 3. С. 23-27.
30. Широков А.С. Аналитический расчет смещения опоры балочной фермы с верхними шпренгелями // Строительная механика и конструкции. 2017. № 2 (15). С. 11-14.
31. Широков А.С. Вывод формулы для прогиба статически определимой порталной фермы в зависимости от числа панелей // Молодежь и наука. 2018. № 5. С. 119.
32. Кирсанов М.Н., Тиньков Д.В. Аналитические выражения частот малых колебаний балочной фермы с произвольным числом панелей // Строительная механика и конструкции. 2019. Т. 1. № 20. С. 14-20.

33. Кирсанов М.Н., Тиньков Д.В. Аналитический расчет частоты колебания груза в произвольном узле балочной фермы // Транспортное строительство. 2018. № 12. С. 21-23.

34. Осадченко Н.В. Расчёт прогиба плоской неразрезной статически определимой фермы с двумя пролётами [Электронный ресурс] // Постулат. 2017. № 12. URL: <http://e-postulat.ru/index.php/Postulat/article/view/958/984> (дата обращения: 15.10.2019).

## DEPENDENCE OF THE BEND OF THE PLANE HINGE-ROD FRAME ON THE NUMBER OF PANELS

*Boyko Andrey Yurievich*<sup>1</sup>  
*Tkachuk Georgyi Nikolayevich*<sup>2</sup>  
*Plyasova Anna Alexeevna*<sup>3</sup>

<sup>1</sup>*National Research University «MPEI»*

<sup>2</sup>*Moscow Institute of Physics and Technology (National Research University)*

<sup>3</sup>*Mendeleev University of Chemical Technology of Russia*

*The deformation of a flat lattice frame-type truss under the influence of a concentrated load in the middle of the span or a uniform load along the upper girder belt is analyzed. The function of the amount of deflection of the frame on the number of panels is displayed. To solve this problem, special operators of the Maple system and the method of cutting nodes are used. The inductive method for two independent parameters of the truss makes it possible to generalize particular solutions to an arbitrary number of panels. To determine the displacement, the Mohr integral is used.*

**Keywords:** *truss, lattice, frame, Maxwell-Mohr's integral, deflection, induction, Maple.*

### ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРАХ

**Бойко Андрей Юрьевич**

магистрант

Национальный исследовательский университет «МЭИ»

111250, Россия, г. Москва, ул. Красноказарменная, 14

E-mail: boykoanyu@mail.ru

**Ткачук Георгий Николаевич**

магистрант

Московский физико-технический институт

(национальный исследовательский университет)

117303, Россия, г. Москва, ул. Керченская, 1А,

корп. 1

E-mail: geoyukos@yandex.ru

**Плясова Анна Алексеевна**

магистрант

Российский химико-технологический

университет им. Д.И. Менделеева

125047, Россия, г. Москва, Миусская пл., 9

E-mail: annaplyasova13@gmail.com

### INFORMATION ABOUT AUTHORS

**Boyko Andrey Yurievich**

Master Student

National Research University «MPEI»

111250, Russia, Moscow, Krasnokazarmennaya st., 14

E-mail: boykoanyu@mail.ru

**Tkachuk Georgyi Nikolayevich**

Master Student

Moscow Institute of Physics and Technology

(National Research University)

117303, Russia, Moscow, Kerchenskaya st., 1A,

corp. 1

E-mail: geoyukos@yandex.ru

**Plyasova Anna Alexeevna**

Master Student

Mendeleev University of Chemical Technology of

Russia

125047, Russia, Moscow, Miuskaya sq., 9

E-mail: annaplyasova13@gmail.com



УДК 624.04

## АНАЛИТИЧЕСКИЙ РАСЧЕТ ПРОГИБА РАМНОЙ ФЕРМЫ С ПРОИЗВОЛЬНЫМ ЧИСЛОМ ПАНЕЛЕЙ В СИСТЕМЕ MAPLE

*Ткачук Георгий Николаевич<sup>1</sup>  
Бойко Андрей Юрьевич<sup>2</sup>*

<sup>1</sup> *Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет)*

<sup>2</sup> *Национальный исследовательский университет «МЭИ»*

*Плоская статически определимая ферма с раскосной прямоугольной решеткой имеет две опоры и произвольное число панелей в ригеле. К ферме приложена нагрузка в середине пролета. Задачей работы является получение зависимости прогиба фермы в аналитическом виде от числа панелей в ригеле и числа панелей в боковых опорных фермах. Для решения задачи используются операторы системы компьютерной математики Maple и метод индукции по двум независимым параметрам при обобщении частных решений на общий случай.*

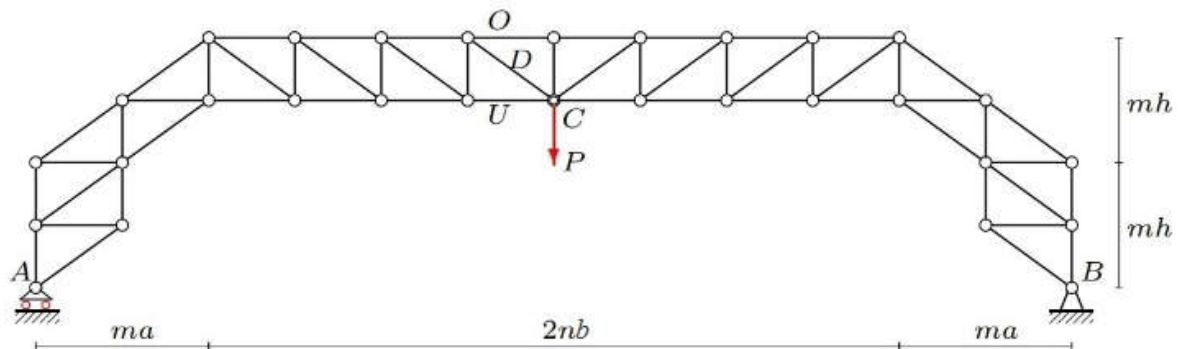
**Ключевые слова:** *ферма, рама, формула Максвелла-Мора, прогиб, индукция, Maple.*

Методы компьютерной математики при расчете строительных конструкций с развитием программного обеспечения занимают все более значимое место в инженерной практике и научных исследованиях [1-4]. Не отрицая первостепенную роль численных методов и соответствующих разнообразных пакетов для их реализации, заметим, что короткие, простые формулы, позволяющие получить решение для конструкций с произвольным числом элементов, всегда будут востребованы как в практике (хотя бы для оценки численных решений), так и в теории. Вывод формул для расчета конструкций, несмотря на очевидные теоретические трудности, оправдан возможностью многократного их применения. Для регулярных ферм с произвольным числом элементов периодичности (панелей или групп панелей) такие решения можно получить методом индукции. В настоящей работе применяется метод индукции по двум независимым параметрам, что существенно расширяет область применимости итоговой формулы.

Ферма высотой  $2mh$  (см. рисунок) с пролетом, состоящим из  $2n$  панелей длиной  $a$ , нагружена вертикальной силой  $P$  в середине пролета по нижнему поясу ригеля. Ферма является плоской и при этом статически определимой. В симметричной раме выделены три части: ригель с  $2n$  панелями, наклонные и вертикальные части с  $2t$  панелями. Все панели имеют симметричную относительно центра пролета наклонную решетку. Произведем методом вырезания всех узлов рамы расчет реакций опор и усилий одновременно. Для этого применим программу, которая ранее использовалась в некоторых аналитических расчетах различных

плоских шпренгельных, арочных и пространственных ферм. Для расчета многорешетчатых ферм эта программа является наиболее эффективной.

В рассматриваемой ферме с  $n$  панелями в половине пролета число стержней –  $N_s = 8(n + 2m) - 7$ . Опорные стержни, моделирующие опоры, предполагаются жесткими и в расчет величины прогиба не входят. Используем программу [1-4], разработанную в системе Maple, которая была апробирована в некоторых работах [5-8] для расчета усилий в стержнях в аналитической форме.



Ферма при  $n = 4, m = 2$

Расчет начинается с кодирования структуры фермы. Ниже представлен фрагмент кода программы для ввода координат узлов на языке системы символьной математики Maple:

```

> H := 2 * m * h :
> for i to m do
>   x[i] := a; y[i] := h * i;           x[i + 3 * m + 2 * n - 3] := 2 * n * b + 2 * m * a - a;
>   y[i + 3 * m + 2 * n - 3] := m * h - (i - 1) * h; x[i + 5 * m + 2 * n - 2] := i * a;
>   y[i + 5 * m + 2 * n - 2] := h * i + m * h;   x[i + 6 * m + 4 * n - 3] := i * a + 2 * n * b + m * a - a;
>   y[i + 6 * m + 4 * n - 3] := H - (i - 1) * h;
> od:
> for i to m - 1 do
>   x[i + m] := a * i + a; y[i + m] := h * i + m * h;
>   x[i + 2 * m + 2 * n - 2] := a * m + 2 * n * b + a * i - a; y[i + 2 * m + 2 * n - 2] := 2 * m * h - i * h;
> od:
> for i to 2 * n - 1 do
>   x[i + 2 * m - 1] := m * a + b * i; y[i + 2 * m - 1] := 2 * m * h - h;
>   x[i + 6 * m + 2 * n - 2] := m * a + b * i; y[i + 6 * m + 2 * n - 2] := H;
> od:

```

С помощью специальных векторов, содержащих номера концов соответствующего стержня, определяется структура соединений узлов и стержней [9].

Также составляются уравнения равновесия в проекциях на оси координат для узлов фермы. Система вводится в компьютер в матричном виде.

Решение системы линейных уравнений в символьной форме (задействованы операторы системы символьной математики Maple) дает выражения для усилий во всех стержнях. Для вычисления прогиба используется интеграл Мора в виде:

$$\Delta = P(C_1 a^3 + C_2 c^3 + C_3 h^3 + C_4 f^3 + b^3 C_5 + C_6 a^2 b + C_7 b^2 a) / (2h^2 EF),$$

где  $EF$  – жесткость стержней;  $h$  – высота пролета;  $P$  – нагрузка на ферму;  $C_i$  – искомые коэффициенты. В свою очередь,  $c = \sqrt{a^2 + h^2}$ ,  $f = \sqrt{b^2 + h^2}$ .

Отметим, что прогиб зависит от числа панелей как в вертикальном, так и в горизонтальном направлении. Таким образом, необходим расчет числовых последовательностей от параметра  $n$  при постоянном  $m$ , а затем, наоборот, для параметра  $m$  при постоянном  $n$ .

Для получения аналитических выражений коэффициентов  $C_i$  с помощью анализа числовых последовательностей в каждом случае был применен оператор *rgf\_findrecur* пакета *genfunc* системы Maple. Так, можно получить линейные однородные рекуррентные уравнения для коэффициентов  $C_i$ . Уравнения при постоянном параметре  $m$  имеют вид:

$$C_{1(n)} = C_{1(n-1)}; \quad C_{2(n)} = C_{2(n-1)}; \quad C_{3(n)} = 2C_{3(n-1)} - C_{3(n-2)}; \quad C_{4(n)} = 2C_{4(n-1)} - C_{4(n-2)};$$

$$C_{5(n)} = 4C_{5(n-1)} - 6C_{5(n-2)} + 4C_{5(n-3)} - C_{5(n-4)}; \quad C_{6(n)} = 2C_{6(n-1)} - C_{6(n-2)}; \quad C_{7(n)} = 3C_{7(n-1)} - 3C_{7(n-2)} + C_{7(n-3)}.$$

Аналогично приведем рекуррентные уравнения при постоянном (фиксированном)  $n$ :

$$C_{1(m)} = 2C_{1(m-1)} - C_{1(m-2)}; \quad C_{2(m)} = 4C_{2(m-1)} - 6C_{2(m-2)} + 4C_{2(m-3)} - C_{2(m-4)};$$

$$C_{3(m)} = 3C_{3(m-1)} - 3C_{3(m-2)} + C_{3(m-3)}; \quad C_{4(m)} = C_{4(m-1)}; \quad C_{5(m)} = C_{5(m-1)};$$

$$C_{6(m)} = 3C_{6(m-1)} - 3C_{6(m-2)} + C_{6(m-3)}; \quad C_{7(m)} = 2C_{7(m-1)} - C_{7(m-2)}.$$

Используя оператор *rsolve*, найдем решения рекуррентных уравнений  $C_i$ :

$$C_1 = m; \quad C_2 = (2m^3 + m) / 3; \quad C_3 = m^2 + n - 1; \quad C_4 = n; \quad C_5 = (2n^3 + n) / 3; \quad C_6 = 2m^2 n; \quad C_7 = 2n^2 m.$$

Программа расчета усилий, а также метод индукций на языке Maple использовались ранее при расчете решетчатых ферм [1-12], пространственных конструкции регулярного типа [13-22], а также ферм арочного типа [23-28]. Благодаря методу индукции в работе [29] выведены соотношения статики регулярных ножничных механизмов, а в [30,31] получены аналитические решения для ферм типа Финка или Больмана. В свою очередь, аналитические решения для ферм, допускающих мгновенную изменяемость, рассчитаны в работах [32-34]. Задача о смещении подвижной опоры фермы в аналитическом виде с применением системы Maple решена в [35,36]. Частоты колебания груза в произвольном узле балочной фермы также методом индукции получены в [37-39]. Фермы рамного типа аналитически рассчитаны в [40,41]. Отметим обзоры [42-44] работ, использующих метод индукции при расчете плоских статически определимых ферм.

**БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК**

1. Кирсанов М.Н. Расчет прогиба плоской решетчатой фермы с четырьмя опорами // Транспортное строительство. 2017. № 7. С. 15-18.
2. Кирсанов М.Н. Аналитический расчет многорешетчатой фермы // Строительная механика и расчет сооружений. 2014. № 6 (257). С. 2-6.
3. Кирсанов М.Н. К выбору решетки балочной фермы // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2017. № 3. С. 23-27.
4. Кирсанов М.Н. Аналитический расчет балочной фермы с решеткой типа «butterfly» // Строительная механика и расчет сооружений. 2016. № 4 (267). С. 2-5.
5. Кирсанов М.Н. Формулы для расчета прогиба и усилий в решетчатой ферме // Механизация строительства. 2017. Т. 78. № 4. С. 20-23.
6. Кирсанов М.Н. Аналитический расчет балочной фермы со сложной решеткой // Строительная механика и расчет сооружений. 2015. № 3 (260). С. 7-12.
7. Кирсанов М.Н. Аналитический метод расчета прогиба плоской фермы со сложной решеткой шпренгельного типа // Транспортное строительство. 2017. № 5. С. 11-13.
8. Кирсанов М.Н. Аналитический расчет рамы с произвольным числом панелей // Инженерно-строительный журнал. 2018. № 6 (82). С. 127-135.
9. Кирсанов М.Н. Статический расчет плоской фермы с двойной треугольной решеткой // Справочник. Инженерный журнал с приложением. 2017. № 11 (248). С. 32-36.
10. Кирсанов М.Н. Расчет жесткости стержневой решетки // Вестник машиностроения. 2015. № 8. С. 48-51.
11. Белянкин Н.А., Бойко А.Ю., Кирсанов М.Н. Аналитический расчет прогиба балочной фермы с усиленной треугольной решеткой // Строительство и архитектура. 2017. Т. 5. № 2. С. 122-125.
12. Кирсанов М.Н., Горбунова А.С., Лепетюха В.А. Расчет прогиба симметричной фермы с решеткой «Star» в аналитической форме // Строительная механика и конструкции. 2017. Т. 1. № 14. С. 36-41.
13. Кирсанов М.Н. Анализ прогиба фермы прямоугольного пространственного покрытия // Инженерно-строительный журнал. 2015. № 1 (53). С. 32-38.
14. Кирсанов М.Н. Аналитическое исследование жесткости пространственной статически определимой фермы // Вестник МГСУ. 2017. Т. 12. № 2 (101). С. 165-171.
15. Кирсанов М.Н. Анализ зависимости прогиба фермы прямоугольного покрытия от числа панелей // Строительная механика и конструкции. 2018. №4(19). С. 52-57
16. Кирсанов М.Н. Статический расчет и анализ пространственной стержневой системы // Инженерно-строительный журнал. 2011. № 6 (24). С. 28-34.
17. Кирсанов М.Н. Оценка прогиба и устойчивости пространственной балочной фермы // Строительная механика и расчет сооружений. 2016. № 5 (268). С. 19-22.
18. Кирсанов М.Н. Аналитический расчет пространственной стержневой системы // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2012. № 1. С. 49-53.
19. Кирсанов М.Н. Напряженное состояние и деформации прямоугольного пространственного стержневого покрытия // Научный вестник Воронежского государственного архитектурно-строительного университета. Строительство и архитектура. 2016. № 1 (41). С. 93-100.
20. Леонов П.Г., Кирсанов М.Н. Аналитический расчет и анализ пространственной стержневой конструкции в системе Maple // Информатизация инженерного образования ИНФОРИНО-2014: труды Международной научно-методической конференции. 2014. С. 239-242.
21. Кирсанов М.Н. Аналитический расчет прогиба пространственного прямоугольного покрытия // Вестник МГСУ. 2018. Т. 13. № 5 (116). С. 579-586.
22. Кирсанов М.Н. Аналитический расчет пространственной стержневой регулярной структуры с плоской гранью // Строительная механика и расчет сооружений. 2015. № 2 (259). С. 2-6.

23. Кирсанов М.Н. Индуктивный анализ деформации арочной фермы // International Journal for Computational Civil and Structural Engineering. 2018. Т. 14. № 1. С. 64-70.
24. Кирсанов М.Н. Аналитическое исследование деформаций плоской фермы арочного типа // Вестник государственного университета морского и речного флота им. адмирала С.О. Макарова. 2015. № 3 (31). С. 42-48.
25. Кирсанов М.Н. Сравнительный анализ жесткости двух схем арочной фермы // Строительство уникальных зданий и сооружений. 2015. № 9 (36). С. 44-55.
26. Кирсанов М.Н., Степанов А.С. О зависимости деформаций плоской арочной фермы от числа панелей // Строительная механика и расчет сооружений. 2017. № 5 (274). С. 9-14.
27. Кирсанов М.Н. Формулы для расчета прогиба арочной фермы // Строительная механика и конструкции. 2018. Т. 1. № 16. С. 7-11.
28. Кирсанов М.Н. Аналитическая оценка прогиба и усилий в критических стержнях арочной фермы // Транспортное строительство. 2017. № 9. С. 8-10.
29. Кирсанов М.Н. Аналитический расчет параллелограммного механизма с произвольным числом секций // Вестник машиностроения. 2018. № 1. С. 37-39.
30. Васильченко Д.И. Формула для смещения опоры балочной фермы типа Больмана // Научный альманах. 2016. N 8-1(22). С. 261-263.
31. Васильков И.Д., Кирсанов М.Н. Формулы для определения прогиба и смещения опоры фермы Больмана с произвольным числом панелей // Научный альманах. 2016. № 11-2 (25). С. 289-292.
32. Кирсанов М.Н. Формула для прогиба и анализ кинематической изменяемости решетчатой фермы // Строительная механика и конструкции. 2017. Т. 2. № 15. С. 5-10.
33. Кирсанов М.Н. Расчет пространственной стержневой системы, допускающей мгновенную изменяемость // Строительная механика и расчет сооружений. 2012. № 3 (242). С. 48-51.
34. Кирсанов М.Н. Вывод формулы для прогиба решетчатой фермы, имеющей случаи кинематической изменяемости // Строительная механика и конструкции. 2017. Т. 1. № 14. С. 27-30.
35. Пережилова Е.Д. Точное решение задачи о смещении подвижной опоры фермы с произвольным числом панелей // Научный альманах. 2016. № 9-2(23). С. 42-45.
36. Савиных А.С. Формула для расчета смещения подвижной опоры плоской статически определимой фермы // Научный альманах. 2016. № 9-2(23). С. 46-49.
37. Кирсанов М.Н., Тиньков Д.В. Аналитическое решение задачи о частоте колебания груза в произвольном узле балочной фермы в системе Maple // Строительство: наука и образование. 2018. Т. 8. Вып. 4. Ст. 3. URL: <http://nso-journal.ru>. DOI: 10.22227/2305-5502.2018.4.3.
38. Кирсанов М.Н., Тиньков Д.В. Аналитические выражения частот малых колебаний балочной фермы с произвольным числом панелей // Строительная механика и конструкции. 2019. Т. 1. № 20. С. 14-20.
39. Кирсанов М.Н., Тиньков Д.В. Аналитический расчет частоты колебания груза в произвольном узле балочной фермы // Транспортное строительство. 2018. № 12. С. 21-23.
40. Кирсанов М.Н. Расчетная модель плоской фермы рамного типа с произвольным числом панелей // Вестник МГСУ. 2018. Т. 13. Вып. 9. С. 1184-1192. DOI: 10.22227/1997-0935.2018.10.1184-1192
41. Кирсанов М.Н. Статический анализ и монтажная схема плоской фермы // Вестник государственного университета морского и речного флота им. адмирала С.О. Макарова. 2016. № 5 (39). С. 61-68.
42. Осадченко Н.В. Аналитические решения задач о прогибе плоских ферм арочного типа // Строительная механика и конструкции. 2018. №. 1. С. 12-33.
43. Осадченко Н.В. Расчёт прогиба плоской неразрезной статически определимой фермы с двумя пролётами // Постулат. 2017. № 12.
44. Тиньков Д.В. Сравнительный анализ аналитических решений задачи о прогибе ферменных конструкций // Инженерно-строительный журнал. 2015. № 5 (57). С. 66-73.

## ANALYTICAL CALCULATION OF THE FRAME FARM BEND FARM WITH A RANDOM NUMBER OF PANELS IN THE MAPLE SYSTEM

*Tkachuk Georgyi Nikolayevich<sup>1</sup>*  
*Boyko Andrey Yurievich<sup>2</sup>*

<sup>1</sup>*Moscow Institute of Physics and Technology (National Research University)*

<sup>2</sup>*National Research University «MPEI»*

*A flat statically definable truss with a diagonal rectangular lattice has two supports and an arbitrary number of panels in the crossbar. A load is applied to the truss in the middle of the span. The aim of the work is to obtain the dependence of the deflection of the truss in an analytical form on the number of panels in the crossbar and the number of panels in the side support trusses. To solve the problem, the operators of the Maple computer mathematics system and the method of induction by two independent parameters are used when generalizing partial solutions to the General case.*

**Keywords:** *truss, lattice, frame, Maxwell-Mohr's integral, deflection, induction, Maple*

### ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРАХ

**Ткачук Георгий Николаевич**

магистрант

Московский физико-технический институт  
(национальный исследовательский университет)  
117303, Россия, г. Москва, ул. Керченская, 1А,  
корп. 1

E-mail: geoyukos@yandex.ru

**Бойко Андрей Юрьевич**

магистрант

Национальный исследовательский университет  
«МЭИ»  
111250, Россия, г. Москва, ул. Красноказарменная, 14  
E-mail: boykoanyu@mail.ru

### INFORMATION ABOUT AUTHORS

**Tkachuk Georgyi Nikolayevich**

Master Student

Moscow Institute of Physics and Technology  
(National Research University)  
117303, Russia, Moscow, Kerchenskaya st., 1A,  
corp. 1

E-mail: geoyukos@yandex.ru

**Boyko Andrey Yurievich**

Master Student

National Research University «MPEI»  
111250, Russia, Moscow, Krasnokazarmennaya st., 14  
E-mail: boykoanyu@mail.ru

УДК 624.04

## ANALYTICAL CALCULATION OF THE SIZE OF THE BEND OF RECTANGULAR SHAPE FRAME TRUSS WITH A RANDOM NUMBER OF PANELS IN THE MAPLE SYSTEM

*Chinchenko Anna Mikhailovna*

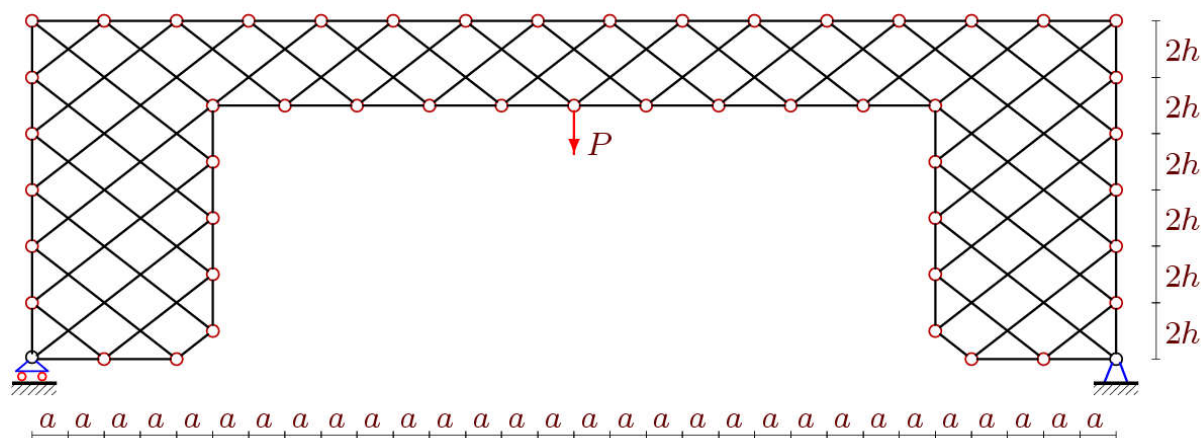
*National Research University «MPEI»*

*The dependence of the deflection of the elastic truss on the number of panels in the crossbar is deduced. A flat statically definable multi-lattice truss of rectangular shape has two supports and is loaded along the upper belt or in the middle of the span. The operators of the Maple system of symbolic mathematics and the method of generalization of partial solutions to the General case are used.*

**Keywords:** *truss, lattice, frame, Maxwell-Mohr's integral, deflection, induction, Maple.*

For a long time, the calculation of building structures was carried out only by numerical methods in specialized packages (for example, Lear), the basis of which is the finite element method. The result of numerical calculation is a graph or some data that needs to be obtained again when the input parameters (dimensions, number of panels) are changed. Significantly more effective is the use of accurate solutions. There are still few such solutions. In [1-9], based on the induction method using the Maple computer mathematics system, a number of solutions for flat trusses were obtained. In [10-16], the derivation of formulas for the deflection of spatial trusses is given; in [17-22], the problems of arch deflection are solved in an analytical form.

In the considered truss (see figure) with  $n$  panels at half span, the number of rods is  $N = 8(n + m) + 27$ . The support rods modeling the supports are assumed to be rigid and are not included in the calculation of the magnitude of the deflection. We use the program [23] developed in the Maple system.



Truss for  $n = 5, m = 4$

For calculation, it is necessary to enter in the program the coordinates of the truss nodes and the order of the rods. Below is a snippet of program code for entering node coordinates:

```
> H:=h*(4+2*m) :
> x[1]:=2*a: x[2]:=4*a: y[1]:=0: y[2]:=0:
> for i to m do x[i+2]:=5*a; y[i+2]:=2*h*i-h;
> x[i+m1+n+3]:=a*4*n+5*a; y[i+m1+n+3]:=H-2*h*i-3*h;
od:
> for i to m+3 do x[i+2*m1+5]:=0; y[i+2*m1+5]:=2*h*i-2*h;
> x[i+2*m1+m+2*n+12]:=10*a+4*n*a;
y[i+2*m1+m+2*n+12]:=H-2*h*i+2*h;
end:
```

Coordinates are entered in **for i to .. do .. end** loops: for an arbitrary number of panels  $n$ . Using special vectors containing the numbers of the ends of the rods, the structure of the joints of nodes and rods is defined.

A matrix  $G$  of equilibrium equations is compiled in projections on the coordinate axis for truss nodes. The odd equations correspond to the projections onto the  $x$  axis, the even equations correspond to the  $y$  axis:

```
> N:=8*(m+n)+30; G:=Matrix(N, N) :
> for i to N do
> L_x_y[1]:=x[ST[i][2]]-x[ST[i][1]]:
> L_x_y[2]:=y[ST[i][2]]-y[ST[i][1]]:
> L[i]:=subs(a^2+h^2=c^2,sqrt(L_x_y[1]^2+L_x_y[2]^2));
> for j1 to 2 do
> jj:=2*ST[i][2]-2+j1:
> if jj<=N then G[jj,i]:=-L_x_y[j1]/L[i]:fi;
> jj:=2*ST[i][1]-2+j1:
> if jj<=N then G[jj,i]:= L_x_y[j1]/L[i]:fi;
> od;
> od:
```

Solving a system of linear equations in symbolic form (operators of the Maple symbolic mathematics system are involved) gives expressions for efforts in all the rods. To calculate the deflection, the Mohr's integral is used in the form:

$$\Delta = P(C_1 a^3 + C_2 c^3 + C_3 h^3) / (2h^2 EF), \quad (1)$$



where  $EF$  is the stiffness of the rods,  $h$  is the height of the panel,  $P$  is the load on the truss,  $C_i$  are the desired coefficients,  $c = \sqrt{a^2 + h^2}$  is the length of the smallest brace.

In the general case, the deflection depends both on the number of panels  $m$  vertically and horizontally  $n$ . Consider the case  $m=4$ . Calculation of a number of trusses with a successively increasing number of panels  $n$  gives a series of numbers — coefficients  $C_i$  in (1). The analysis of these sequences and the derivation of their common members constitute the main mathematical difficulty of the task. The first numerical calculations show that for some values of  $n$  the determinant of the system vanishes. Analyzing the pattern of occurrence of these cases, we find that the calculation is possible only with  $n = (1 - (-1)^k + 6k) / 4$ ,  $k = 1, 2, 3, \dots$ . Thus, the parameter  $k$  becomes the number  $k$ , which is uniquely related to the number of panels in the crossbar.

Using the operator **rgf\_findrecur** from the **genfunc** package of the Maple system, one can obtain linear homogeneous recurrence equations for the coefficients  $C_i$  of various degrees:

$$C_{1,k} = C_{1,k-1} + 3C_{1,k-2} - 3C_{1,k-3} - 3C_{1,k-4} + 3C_{1,k-5} + C_{1,k-6} - C_{1,k-7};$$

$$C_{2,k} = 2C_{2,k-2} - C_{2,k-4};$$

$$C_{3,k} = C_{3,k-2}.$$

The **rsolve** operator gives solutions of these equations in the form of polynomials in  $k$

$$C_1 = (4k^3 + 2k^2(11 - (-1)^k) + 2k(48 - 25(-1)^k) - 125(-1)^k + 167) / 2;$$

$$C_2 = (2k(33 - 24(-1)^k) - 459(-1)^k + 549) / 2;$$

$$C_3 = 4(29 - 18(-1)^k).$$

For a distributed load, linear homogeneous recurrence equations for the coefficients  $C_i$  have the form of a more complex form:

$$C_{1,k} = C_{1,k-1} + 4C_{1,k-2} - 4C_{1,k-3} - 6C_{1,k-4} + 6C_{1,k-5} + 4C_{1,k-6} - 4C_{1,k-7} - C_{1,k-8} + C_{1,k-9};$$

$$C_{2,k} = 3C_{2,k-2} - 3C_{2,k-4} + C_{2,k-6};$$

$$C_{3,k} = 2C_{3,k-2} - C_{3,k-4}.$$

Note that the coefficients in the recurrence equations are binomial numbers. The solutions of the recurrence equations for the case of distributed load are also more complicated, the degree of polynomials is higher:

$$C_1 = (30k^4 + 20k^3(11 - (-1)^k) + 2k^2(555 - 183(-1)^k) + (331 - 167(-1)^k)8k - 1231(-1)^k + 1999) / 8;$$

$$C_2 = (2k^2(147 - 72(-1)^k) + 6k(461 - 251(-1)^k) - 1965(-1)^k + 3237) / 4;$$

$$C_3 = 2(6k(23 - 6(-1)^k) - 61(-1)^k + 197).$$

In [24-27], the oscillation frequencies of loads of flat trusses were obtained by induction on the basis of the Mohr integral. Reviews of works using the inductive method of deriving formulas for deflection of statically definable trusses are contained in [28-30].

### БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Арутюнян В.Б. Формулы для расчета прогиба плоской раскосной фермы с параллельными поясами // *Строительная механика и конструкции*. 2018. № 4 (19). С. 29-37.
2. Белянкин Н.А., Бойко А. Ю., Плясова А.А. Индуктивный анализ деформативности многорешетчатой фермы при несимметричном нагружении // *Строительная механика и конструкции*. 2018. № 3 (18). С. 33-41.
3. Широков А.С. Аналитический расчет смещения опоры балочной фермы с верхними шпренгелями // *Строительная механика и конструкции*. 2017. № 2 (15). С. 11-14.
4. Доманов Е.В. Вывод формулы для прогиба балочной фермы с крестообразной решеткой // *Строительная механика и конструкции*. 2017. № 2 (15). С. 15-19.
5. Тиньков Д.В. Формулы для расчёта прогиба впарушенной балочной раскосной фермы с произвольным числом панелей // *Строительная механика и конструкции*. 2016. Т. 2. № 13 (13). С. 10-14.
6. Белянкин Н.А., Бойко А.Ю. Формулы для прогиба балочной фермы с произвольным числом панелей при равномерном нагружении // *Строительная механика и конструкции*. 2019. № 1 (20). С. 21-29.
7. Кирсанов М.Н., Горбунова А.С., Лепетюха В.А. Расчет прогиба симметричной фермы с решеткой «Star» в аналитической форме // *Строительная механика и конструкции*. 2017. Т. 1. № 14. С. 36-41.
8. Ткачук Г.Н. Формула зависимости прогиба несимметрично нагруженной плоской фермы с усиленными раскосами от числа панелей // *Строительная механика и конструкции*. 2019. № 2 (21). С. 32-39.
9. Кирсанов М.Н. Расчет прогиба плоской решетчатой фермы с четырьмя опорами // *Транспортное строительство*. 2017. № 7. С. 15-18.
10. Кирсанов М.Н. Анализ зависимости прогиба фермы прямоугольного покрытия от числа панелей // *Строительная механика и конструкции*. 2018. № 4 (19). С. 52-57.
11. Кирсанов М.Н. Анализ прогиба фермы прямоугольного пространственного покрытия // *Инженерно-строительный журнал*. 2015. № 1 (53). С. 32-38.
12. Кирсанов М.Н. Оценка прогиба и устойчивости пространственной балочной фермы // *Строительная механика и расчет сооружений*. 2016. № 5 (268). С. 19-22.
13. Кирсанов М.Н. Аналитическое исследование жесткости пространственной статически определимой фермы // *Вестник МГСУ*. 2017. Т. 12. № 2 (101). С. 165-171.
14. Кирсанов М.Н. Статический расчет и анализ пространственной стержневой системы // *Инженерно-строительный журнал*. 2011. № 6 (24). С. 28-34.
15. Кирсанов М.Н. Аналитический расчет пространственной стержневой системы // *Строительная механика инженерных конструкций и сооружений*. 2012. № 1. С. 49-53.
16. Кирсанов М.Н. Напряженное состояние и деформации прямоугольного пространственного стержневого покрытия // *Научный вестник Воронежского государственного архитектурно-строительного университета. Строительство и архитектура*. 2016. № 1 (41). С. 93-100.
17. Кирсанов М.Н. Индуктивный анализ деформации арочной фермы // *International Journal for Computational Civil and Structural Engineering*. 2018. Т. 14. № 1. С. 64-70.
18. Кирсанов М.Н. Аналитическое исследование деформаций плоской фермы арочного типа // *Вестник государственного университета морского и речного флота им. адмирала С.О. Макарова*. 2015. № 3 (31). С. 42-48.
19. Кирсанов М.Н. Сравнительный анализ жесткости двух схем арочной фермы // *Строительство уникальных зданий и сооружений*. 2015. № 9 (36). С. 44-55.

20. Кирсанов М.Н., Степанов А.С. О зависимости деформаций плоской арочной фермы от числа панелей // Строительная механика и расчет сооружений. 2017. № 5 (274). С. 9-14.
21. Кирсанов М.Н. Формулы для расчета прогиба арочной фермы // Строительная механика и конструкции. 2018. Т. 1. № 16. С. 7-11.
22. Кирсанов М.Н. Аналитическая оценка прогиба и усилий в критических стержнях арочной фермы // Транспортное строительство. 2017. № 9. С. 8-10.
23. Кирсанов М. Н. Maple и MapleT. Решения задач механики. СПб.: Изд-во Лань, 2012. 512 с.
24. Кирсанов М.Н., Тиньков Д.В. Аналитическое решение задачи о частоте колебания груза в произвольном узле балочной фермы в системе Maple [Электронный ресурс] // Строительство: наука и образование. 2018. Т. 8. Вып. 4. Ст. 3. URL: <http://nso-journal.ru>. (дата обращения: 19.10.2019). DOI: 10.22227/2305-5502.2018.4.3.
25. Кирсанов М.Н., Тиньков Д.В. Аналитические выражения частот малых колебаний балочной фермы с произвольным числом панелей // Строительная механика и конструкции. 2019. Т. 1. № 20. С. 14-20.
26. Кирсанов М.Н., Тиньков Д.В. Аналитический расчет частоты колебания груза в произвольном узле балочной фермы // Транспортное строительство. 2018. № 12. С. 21-23.
27. Кирсанов М.Н., Тиньков Д.В. Спектр собственных частот колебаний внешне статически неопределимой фермы // Транспортное строительство. 2019. № 2. С. 20-23.
28. Осадченко Н.В. Расчёт прогиба плоской неразрезной статически определимой фермы с двумя пролётами // Постулат. 2017. № 12.
29. Осадченко Н.В. Аналитические решения задач о прогибе плоских ферм арочного типа // Строительная механика и конструкции. 2018. №. 1. С. 12-33.
30. Тиньков Д.В. Сравнительный анализ аналитических решений задачи о прогибе ферменных конструкций // Инженерно-строительный журнал. 2015. № 5 (57). С. 66-73.

## АНАЛИТИЧЕСКИЙ РАСЧЕТ ВЕЛИЧИНЫ ПРОГИБА РАМНОЙ ФЕРМЫ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ФОРМЫ С ПРОИЗВОЛЬНЫМ ЧИСЛОМ ПАНЕЛЕЙ В СИСТЕМЕ MAPLE

*Чинченко Анна Михайловна*

*Национальный исследовательский университет «МЭИ»*

*Приводится вывод зависимости прогиба упругой фермы от числа панелей в ригеле. Плоская статически определимая многорешетчатая ферма прямоугольной формы имеет две опоры и нагружена по верхнему поясу или в середине пролета. Используются операторы системы символьной математики Maple и метод обобщения частных решений на общий случай.*

**Ключевые слова:** *Maple, ферма, рама, интеграл Мора, прогиб, индукция.*

### ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРЕ

**Чинченко Анна Михайловна**

студент

Национальный исследовательский университет «МЭИ»

111250, Россия, г. Москва, ул. Красноказарменная, 14

E-mail: [chinchenko.anyuta@mail.ru](mailto:chinchenko.anyuta@mail.ru)

### INFORMATION ABOUT AUTHOR

**Chinchenko Anna Mikhailovna**

Student

National Research University «MPEI»

111250, Russia, Moscow, Krasnokazarmennaya st., 14

E-mail: [chinchenko.anyuta@mail.ru](mailto:chinchenko.anyuta@mail.ru)