

## ФОРМУЛА ДЛЯ НИЖНЕЙ ОЦЕНКИ СОБСТВЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ ПЛОСКОЙ РЕГУЛЯРНОЙ БАЛОЧНОЙ ФЕРМЫ С ПРЯМОЛИНЕЙНЫМ ВЕРХНИМ ПОЯСОМ

Е. Д. Щиголь

Национальный исследовательский университет «МЭИ»

Россия, г. Москва

---

Студентка кафедры робототехники, мехатроники, динамики и прочности машин, тел.: +7(916)756-91-15,  
e-mail: kateshch@yandex.ru

---

Рассмотрена плоская статически определимая ферма, имеющая форму плоской рамы. Верхний пояс прямолинейный, нижний — криволинейный. Конструкция установлена на двух опорах: неподвижной и подвижной. Силы в стержнях покрытия определяются путем вырезания узлов с использованием программного пакета для научных и технических аналитических расчётов Maple. Анализ последовательностей коэффициентов в решениях для отдельных ферм с различным количеством панелей дает выражения для решения в общем виде. В результате исследования установлена зависимость нижней границы первой собственной частоты колебаний фермы от ее размера, массы и количества панелей в аналитической форме. Итоговые формулы получены путем обобщения ряда отдельных решений с применением метода индукции. Используется нижняя оценка первой частоты по Донкерлею.

**Ключевые слова:** ферма, число панелей, плоская рама, Maple, собственная частота, метод Донкерлея, прогиб.

**Введение.** Конструкции, представляющие собой фермы, широко применяются в строительстве по причине того, что имеют меньшую массу и стоимость относительно монолитных сооружений. В настоящее время в инженерной практике большинство задач наряду с численным решением используют аналитический метод, суть которого сводится к разложению целого на составные части и анализу каждой из них отдельно с целью более глубокого понимания происходящих процессов в них при воздействии на конструкцию извне. Далее результаты, полученные для отдельных составляющих, объединяются при помощи метода индукции. При этом данный алгоритм позволяет получать не просто аналитические решения [1 – 4], а небольшие формулы, которые будут справедливы для конструкции различного порядка регулярности [5], при этом под порядком можно понимать, скажем, число панелей фермы. Справочник [6] содержит схемы арочных и рамных ферм, а также формулы для прогиба [7 – 11] и усилий в критических опорных стержнях. При исследовании данной задачи были использованы труды двух учёных R. G. Hutchinson и N. A. Fleck, которые стояли на пороге отыскания аналитических решения для статически определимых регулярных стержневых конструкций [12]. В [13] получено аналитическое решение задачи о деформации фермы пространственного шестигранного купола с регулярным основанием. Для определения аналитических оценок первой собственной частоты свободных колебаний ферм по методу Донкерлея [14 – 18] используется метод математической индукции. Получены также формулы для расчета консольных, балочных и арочных ферм [19 – 20].

### Описание объекта исследования

На рис. 1 представлена плоская ферма, которая состоит из  $n$  панелей в половине пролета. Левая опора — подвижный шарнир, а правая — неподвижный. Длина пролета фермы:  $L = 2a(2n - 1)$ , где  $2a$  — длина горизонтального стержневого элемента конструкции в верхнем поясе. Число стержней конструкции, включая три стержня, моделирующие опоры —  $n_s = 8n + 6$ .

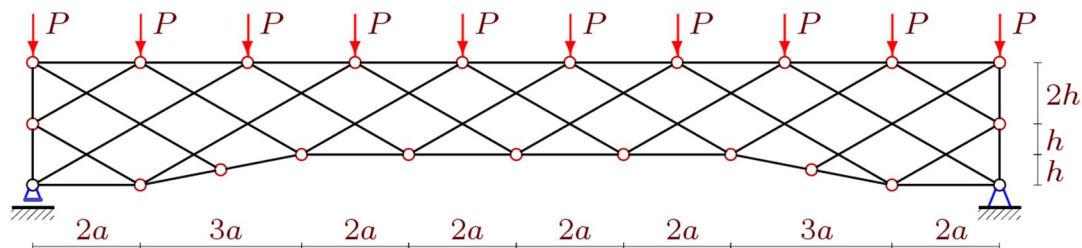


Рис. 1. Схема плоской рамы при  $n = 5$  с узловой нагрузкой по верхнему поясу

Нумерация стержней начинается с нижнего пояса (рис. 2), затем нумеруются стержни решетки. В программу, написанную на языке Maple, вводятся координаты узлов. Начало координат с осями XY размещается в подвижной опоре.

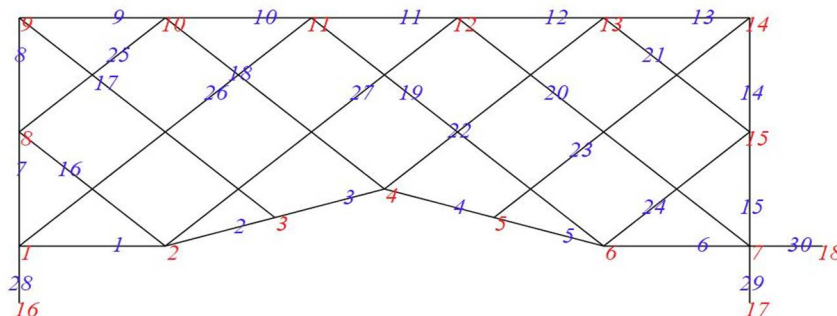


Рис. 2. Схема плоской рамы с нумерацией узлов и стержней при  $n = 3$

С использованием упорядоченных списков с номерами концов стержней создаётся схема фермы.

### Нижняя оценка по методу Донкерлея

Для расчета частот используется наиболее распространенная и достаточно точная модель инерционных свойств фермы: масса фермы концентрируется во всех ее узлах, кроме опорных. Таким образом, общая масса конструкции равна  $m = 300$ . Частоты свободных колебаний конструкции определяются из анализа системы уравнений движения масс. Если считать, что массы конструкции движутся вдоль оси Y, выходит, что число степеней свободы конструкции равно  $K = 4n + 3$ . В матричном виде система записывается следующим образом:

$$mI_K \ddot{Y} + D_K Y = 0. \quad (1)$$

Здесь  $I_K$  — единичная матрица,  $\ddot{Y}$  — вектор ускорений,  $D_K$  — матрица жесткости,  $Y$  — вектор смещения масс в узлах фермы. В случае гармонических колебаний с частотой  $\omega$  справедлива связь  $\ddot{Y} = -\omega^2 Y$ . Матрица  $D_K$  является обратной к матрице податливости  $B_K$ . Элементы матрицы (1) определяются при помощи упрощённой формулы Максвелла–Мора, которая имеет вид:

$$b_{i,j} = \sum_{\alpha=1}^{n_{st}} S_{\alpha}^{(i)} S_{\alpha}^{(j)} l_{\alpha} / (EF). \quad (2)$$

Здесь введены следующие обозначения:  $b_{i,j}$  — перемещение узла  $i$  от действия единичной безразмерной силы, приложенной к узлу  $j$ ;  $S_{\alpha}^{(i)}$  усилия в стержнях с номерами  $\alpha$  от действия единичной силы, приложенной к узлу  $i$ , где расположена масса  $m$  по направлению движения массы;  $l_{\alpha}$  — длина стержня  $\alpha$ ,  $n_{st}$  — число стержней в ферме. При умножении равенства (1) на матрицу  $B_K$  задача сводится к проблеме нахождения собственных значений матрицы  $B_K$ :  $B_K Y = \lambda Y$ , где  $\lambda = 1/\omega^2 m$  — собственные числа матрицы  $B_K$ . Приближенное аналитическое решение для нижней оценки  $\omega_D$  первой частоты  $\omega_1$  выводится по формуле Донкерлея:

$$\omega_D^{-2} = \sum_{p=1}^K \omega_p^{-2}. \quad (3)$$

где  $\omega_p$  — парциальные частоты.

Значения усилия в стержнях, входящие в (2), определяются методом вырезания узлов.

Для расчета парциальных частот составляется уравнение движения отдельной массы. Предполагается движение по оси  $K$ :

$$m\ddot{y}_p + D_p y_p = 0, \quad p = 1, 2, \dots, K. \quad (4)$$

Коэффициент жесткости  $D_p$  обратный к коэффициенту податливости, который также как и в системе с  $K$  степенями свободы вычисляется по формуле Максвелла–Мора:

$$\delta_p = 1/D_p = \sum_{\alpha=1}^{n_{st}} S_{\alpha}^{(p)^2} l_{\alpha} / (EF).$$

Фактически в такой постановке вычисляются только диагональные элементы матрицы  $B_K$ . Из формулы (4) при  $y_p = A_p \sin(\omega t + \varphi)$  следует  $\omega_p = \sqrt{D_p/m}$ . С учетом (3)

$$\text{имеем: } \omega_D^{-2} = m \sum_{p=1}^K \delta_p = m \Delta_n.$$

Стоит отметить, что в данной задаче число панелей  $n$  выражается через  $k$  соотношением:  $n = (6k + (-1)^k + 7)/4$ . При значениях  $n = 4, 7, 10, \dots$  определитель системы уравнений равновесия вырождается, что свидетельствует о кинематической изменяемости фермы при этих значениях числа панелей [6].

Расчет серии ферм с разным числом панелей показал, что  $\Delta_n$  имеет вид, не зависящий от параметра  $n$ :

$$\Delta_2 = \frac{P(28136a^3 + 4199c^3 + 393d^3 + 1088h^3)}{256h^2 EF}, \quad \Delta_3 = \frac{P(96048a^3 + 6173c^3 + 433d^3 + 816h^3)}{192h^2 EF},$$

$$\Delta_4 = \frac{P(1555160a^3 + 54315c^3 + 3025d^3 + 4352h^3)}{1024h^2 EF}, \quad \Delta_5 = \frac{P(5828544a^3 + 126691c^3 + 5827d^3 + 6800h^3)}{1600h^2 EF},$$

$$\Delta_6 = \frac{P(17249864a^3 + 254847c^3 + 9961d^3 + 9792h^3)}{2304h^2EF},$$

$$\Delta_7 = \frac{P(43282544a^3 + 462079c^3 + 15683d^3 + 13328h^3)}{3136h^2EF}.$$

где  $c = \sqrt{a^2 + h^2}$ ,  $d = \sqrt{9a^2 + h^2}$ . Свойство сохранения формы решения имеет место для регулярных конструкций  $\Delta_n = P(C_1a^3 + C_2c^3 + C_3d^3 + C_4h^3) / h^2EF$ .

В рассматриваемой задаче потребовалось рассчитать девять ферм с числом панелей от 2 до 28. Символьные преобразования в *Maple* выполняются достаточно медленно, в зависимости от видеокарты компьютера. Время расчета собственных частот каждой последующей фермы примерно в два раза больше предыдущей. В результате коэффициенты Донкерлея  $C_i$  при  $i = 1 \dots 4$  получились следующими:

$$C_1 = (576k^6 + 576((-1)^k + 5)k^5 + 40(60(-1)^k + 293)k^4 + 40(198(-1)^k + 443)k^3 + (9180(-1)^k + 14249)k^2 + (4699(-1)^k + 6900)k + 1020(-1)^k + 300) / 20;$$

$$C_2 = (21888k^4 + 192(64(-1)^k + 365)k^3 + 6(4940(-1)^k + 13827)k^2 + 2(11565(-1)^k + 22871)k + 6487(-1)^k + 10163) / 64;$$

$$C_3 = (576k^3 + 18(16(-1)^k + 45)k^2 + 2(135(-1)^k + 211)k + 65(-1)^k + 205) / 64;$$

$$C_4 = (32(47 - 16(-1)^k)k^3 + 2(2473 - 184(-1)^k)k^2 + 2(419(-1)^k + 2541)k + 679(-1)^k + 1805) / 8.$$

Окончательно имеем аналитическую оценку для нижней частоты по методу Донкерлея:

$$\omega_D^{-2} = m(C_1a^3 + C_2c^3 + C_3d^3 + C_4h^3) / (h^2EF). \quad (5)$$

Пусть ферма имеет: длину панелей  $2a = 4$  м, площадь поперечного сечения стержней  $F = 9$  см<sup>2</sup>, модуль упругости стали  $E = 2,1 \cdot 10^5$  МПа. На рис. 3 показаны кривые зависимости частоты, полученной аналитически по формуле (5) при  $n = 5$ . График 1 построен по результатам численного решения, а 2 – с использованием метода Донкерлея.

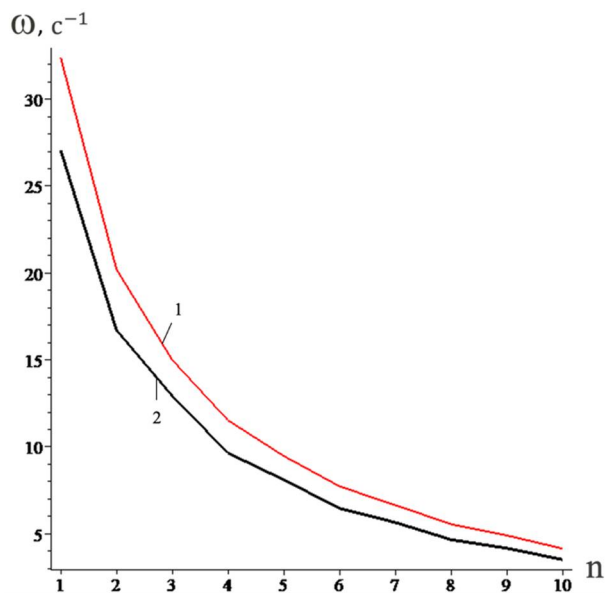


Рис. 3. Первая частота колебаний фермы

На рис. 4 представлено 2 графика зависимости погрешности оценки Донкерлея от числа панелей. Видно, что с увеличением их числа погрешность уменьшается и стремится к определённому значению (около 0,155). Характерна также для этой задачи весьма неравномерная, пилообразная, зависимость точности аналитической формулы от числа панелей. Обычно для плоских ферм эта зависимость гладкая [17,18].

Другая возможность получить аналитическую оценку первой частоты в зависимости от числа панелей — использование метода Рэля [18]. Этот метод дает значительно большую точность, чем метод Донкерлея, однако соответствующие расчетные формулы оказываются весьма громоздкими. В [21] предложен модифицированный метод Рэля, сохраняющий высокую точность и дающий сравнительно компактный аналитический результат.

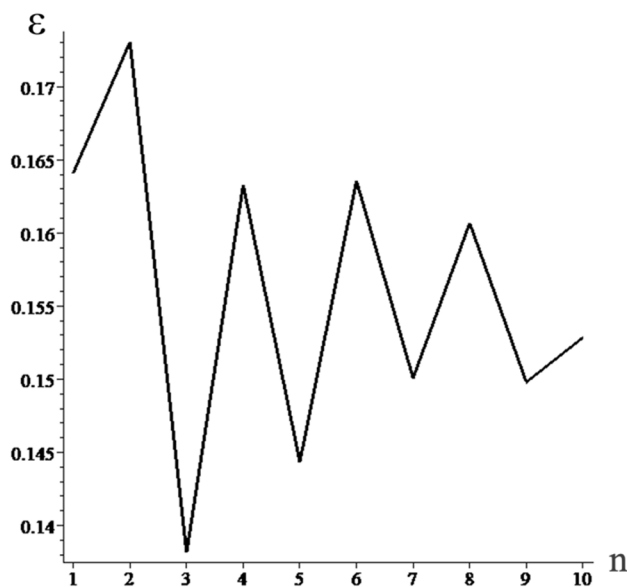


Рис. 4. Зависимость погрешности оценки Донкерлея от числа панелей

**Заключение.** В работе рассмотрена статически определимая ферма, представляющая собой плоскую раму. Был проведён анализ первой частоты колебаний, который показал, что с увеличением числа панелей частота собственных колебаний уменьшается.

Рассматриваемая ферма может быть использована как часть мостовых конструкций, а также покрытия сооружений, промышленных комплексов и жилых домов.

#### Библиографический список

1. Кирсанов М.Н., Воропай Р.А. Вывод зависимости величины прогиба плоской фермы от числа панелей // Постулат. 2018. №2-1(28). С. 15.
2. Кирсанов М.Н., Воробьев О.В. Аналитические оценки деформаций и собственных частот опор линий электропередач // Вестник МЭИ. 2021. № 4. С. 122-128. DOI: 10.24160/1993-6982-2021-4-122-128
3. M. N. Kirsanov, Sun Jiaxuan Analytical dependence of the lower bound of the natural oscillation frequencies of the manipulator truss from the number of panels // Строительная механика и конструкции. 2021. № 1(28). С.32-38.
4. Kirsanov M.N. Analytical calculation of deflection of a planar truss with a triple lattice // Magazine of Civil Engineering. 2021. No. 102. Pp. 10211. DOI: 10.34910/MCE.102.11
5. Иваницкий А.Д. Формулы для расчета деформаций плоской рамы // Строительная механика и конструкции. 2022. №3(34). С. 90-98.
6. Kirsanov M. N. Trussed Frames and Arches: Schemes and Formulas // Cambridge Scholars Publishing Lady Stephenson Library. Newcastle upon Tyne, GB, 2020. 178 p.
7. Кирсанов М.Н. Формулы для расчета деформаций плоской многораскосной фермы // Строительная механика и конструкции. 2022. №2(33). С. 7-16. DOI: 10.36622/VSTU.2022.33.2.001
8. Kirsanov M.N. Deformations and natural frequency spectrum of a planar regular truss with a triangular lattice // Structural mechanics and structures. 2022. №1(32). Pp. 57-68. DOI: 10.36622/VSTU.2022.32.1.005
9. Kirsanov M. Model and Analytical Calculation of a Spatial Truss // Lecture Notes in Civil Engineering, 2021. 150 LNCE. 496–503. DOI: 10.1007/978-3-030-72404-7\_48
10. Kirsanov M. N. Spectrum of own frequencies of a spatial surfacing girder // Russian Journal of Building Construction and Architecture. 2021. Issue 3(51). p. 104-113. DOI: 10.36622/VSTU.2021.51.3.009
11. Кирсанов М. Н. Аналитический расчет деформаций плоской однопролетной балочной фермы с четырьмя опорами в системе Maple // Справочник. Инженерный журнал с приложением. 2021. № 3. С. 34 – 38.
12. Hutchinson R. G., Fleck N. A. Microarchitected cellular solids — The hunt for statically determinate periodic trusses // ZAMM Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik. 2005. 85(9). Pp. 607 — 617.
13. Кирсанов М.Н. Модель и аналитический расчет фермы пространственного шестигранного купола // Строительная механика и конструкции. 2022. №1(32). С. 39-47. DOI: 10.36622/VSTU.2022.32.1.003
14. Кирсанов М. Н., Бука-Ваиваде К. Аналитические выражения частот малых колебаний балочной фермы с произвольным числом панелей // Строительная механика и конструкции. 2019. Т. 4(23). С. 7-14.
15. Кирсанов М.Н., Тиньков Д.В. Аналитические выражения частот малых колебаний балочной фермы с произвольным числом панелей // Строительная механика и конструкции. 2019. №1(20). С. 14-20.
16. Kirsanov M. N., Khromatov V. Deformation of the transmission towers: analytical solution // Construction of Unique Buildings and Structures. 2021. 96 Article No 9602. DOI:10.4123/CUBS.96.2
17. Kirsanov M. N., Dai Qiao Dependence of the natural oscillation frequency of the half-tilt console on the number of panels // Строительная механика и конструкции. 2021. №1(28). с.39-44.

18. Kirsanov, M; Ivanitskii, A. Bilateral Analytical Estimation of the Natural Oscillation Frequency of a Planar Triangular truss; 2023; AlfaBuild; Volume 26 Article No 2601. DOI: 10.57728/ALF.26.1
19. Кирсанов М.Н. Формулы для расчета прогиба арочной фермы // Строительная механика и конструкции. 2018. №1. С.7-11.
20. Прогиб и нижняя граница основной частоты собственных колебаний балочной фермы // Строительная механика и конструкции 2022. №4(35). С. 24-33. DOI: 10.36622/VSTU.2022.35.4.003
21. Кирсанов М.Н. Метод энергетической коллокации для оценки основной частоты собственных колебаний фермы // Строительная механика и конструкции. 2023. №1(36). С.27-37. DOI: 10.36622/VSTU.2023.36.1.003

#### Reference

1. Kirsanov M.N., Voropai R.A. Derivation of the dependence of the deflection of a flat truss on the number of panels. Postulate. 2018. No.2-1(28). P.15.
2. Kirsanov M.N., Vorobyev O.V. Analytical estimates of deformations and natural frequencies of power transmission poles. Bulletin of the MPEI. 2021. No. 4. Pp. 122-128. DOI: 10.24160/1993-6982-2021-4-122-128
3. M. N. Kirsanov, Sun Jiaxuan Analytical dependence of the lower bound of the natural oscillation frequencies of the manipulator truss from the number of panels. Structural Mechanics and structures. 2021. No. 1(28). Pp.32-38.
4. Kirsanov M.N. Analytical calculation of deflection of a planar truss with a triple lattice. Magazine of Civil Engineering. 2021. No. 102. Pp. 10211. DOI: 10.34910/MCE.102.11
5. Ivanitsky A.D. Formulas for calculating deformations of a flat frame. Structural mechanics and structures. 2022. No.3(34). Pp. 90-98.
6. Kirsanov M. N. Trussed Frames and Arches: Schemes and Formulas // Cambridge Scholars Publishing Lady Stephenson Library. Newcastle upon Tyne, GB, 2020. 178 p.
7. Kirsanov M.N. Formulas for calculating deformations of a flat multi-axis truss. Structural mechanics and structures. 2022. No. 2 (33). Pp. 7-16. DOI: 10.36622/VSTU.2022.33.2.001
8. Kirsanov M.N. Deformations and natural frequency spectrum of a planar regular truss with a triangular lattice. Structural mechanics and structures. 2022. No.1(32).Pp57-68. DOI: 10.36622/VSTU.2022.32.1.005
9. Kirsanov M. Model and Analytical Calculation of a Spatial Truss. Lecture Notes in Civil Engineering, 2021. 150 LNCE. 496-503. DOI: 10.1007/978-3-030-72404-7\_48
10. Kirsanov M. N. Spectrum of own frequencies of a spatial surfacing girder. Russian Journal of Building Construction and Architecture. 2021. Issue 3(51). Pp. 104-113. DOI: 10.36622/VSTU.2021.51.3.009
11. Kirsanov M. N. Analytical calculation of deformations of a flat single-span beam truss with four supports in the Maple system // Handbook. Engineering magazine with an appendix. 2021. No. 3. Pp. 34-38.
12. Hutchinson R. G., Fleck N. A. Microarchitected cellular solids — The hunt for statically determinate periodic trusses. ZAMM Zeitschrift fur Angewandte Mathematik und Mechanik. 2005. 85(9). Pp. 607 — 617.
13. Kirsanov M.N. Model and analytical calculation of a spatial hexagonal dome truss. Structural mechanics and structures. 2022.No.1(32).Pp.39-47. DOI: 10.36622/VSTU.2022.32.1.003

14. Kirsanov M. N., Buka-Vaivade K. Analytical expressions of the frequencies of small vibrations of a beam truss with an arbitrary number of panels. *Structural mechanics and structures*. 2019. Vol. 4(23). Pp. 7-14.
15. Kirsanov M.N., Tinkov D.V. Analytical expressions of frequencies of small vibrations of a beam truss with an arbitrary number of panels. *Structural mechanics and structures*. 2019. No.1(20). Pp. 14-20.
16. Kirsanov M. N., Khromatov V. Deformation of the transmission towers: analytical solution. *Construction of Unique Buildings and Structures*. 2021. 96 Article No 9602. DOI:10.4123/CUBS.96.2
17. Kirsanov M. N., Dai Qiao Dependence of the natural oscillation frequency of the half-tilt console on the number of panels. *Structural mechanics and structures*. 2021. No. 1(28). Pp.39-44.
18. Kirsanov, M; Ivanitskii, A. Bilateral Analytical Estimation of the Natural Oscillation Frequency of a Planar Triangular truss; 2023; AlfaBuild; Volume 26 Article No 2601. DOI: 10.57728/ALF.26.1
19. Kirsanov M.N. Formulas for calculating the deflection of an arched truss. *Structural mechanics and structures*. 2018. No.1. Pp.7-11.
20. Deflection and the lower bound of the fundamental frequency of natural vibrations of the beam truss. *Structural mechanics and structures*. 2022. No. 4(35). Pp. 24-33. DOI: 10.36622/VSTU.2022.35.4.003
21. Kirsanov M.N. The method of energy collocation for estimating the fundamental frequency of natural oscillations of the truss. *Structural mechanics and structures*. 2023. No. 1 (36). Pp.27-37. DOI: 10.36622/VSTU.2023.36.1.003

**THE FORMULA FOR THE LOWER ESTIMATE OF THE NATURAL  
OSCILLATIONS OF A FLAT REGULAR GIRDER TRUSS  
WITH A RECTILINEAR UPPER BELT**

E. D. Shchigol

National Research University «MPEI»  
Moscow, Russia

---

Student of the Department of Robotics, Mechatronics, Dynamics and Strength of Machines, tel.: +7(916)756-91-15;  
e-mail: kateshch@yandex.ru

---

The problem presents a flat statically definable truss having the form of a flat frame consisting of an upper and lower rectilinear belt. The structure is mounted on two supports: fixed and movable. The forces in the coating rods are determined by cutting out nodes using the Maple software package for scientific and technical calculations. Analysis of sequences of coefficients in solutions for individual trusses with a different number of panels gives expressions for the solution in a general way. As a result of the study, the dependence of the lower bound of the first natural frequency of vibrations of the truss on its size, mass and number of panels in an analytical form was established. The final formulas are obtained by generalizing a number of individual solutions using the induction method. The Dunkerley estimation method is used.

**Keywords:** truss, number of panels, flat frame, Maple, natural frequency, Dunkerley method, deflection.