

УДК 624.04

Национальный исследовательский университет
"МЭИ"

Студент

А.С. Широков

Россия, г. Москва, тел.: +7(926)963-78-06;

e-mail: as.Shirokov@yandex.ru

National Research University "MPEI",
Student

A.S. Shirokov

Moscow, Russia, tel.: +7(926)963-78-06;

e-mail: as.Shirokov@yandex.ru

А.С. Широков

АНАЛИТИЧЕСКИЙ РАСЧЕТ СМЕЩЕНИЯ ОПОРЫ БАЛОЧНОЙ ФЕРМЫ С ВЕРХНИМИ ШПРЕНГЕЛЯМИ

Плоская ферма имеет две опоры. Усилия в стержнях находятся методом вырезания узлов, а смещение подвижной опоры - с помощью формулы Максвелла - Мора. Методом индукции с использованием системы компьютерной математики Maple получено обобщение решения на произвольное число панелей. Выводятся формулы для усилий в наиболее сжатых и растянутых стержнях.

Ключевые слова: ферма, смещение опоры, интеграл Мора, метод индукции, Maple.

A. S. Shirokov

ANALYTICAL CALCULATION OF THE SUPPORT OFFSET OF BEAM TRUSS WITH UPPER SHPRENGELS

A flat truss has two supports. The forces in the rods are determined by the method of cutting the knots, and the displacement of the mobile support by the Maxwell - Mohr formula. The method of induction using the computer mathematic system Maple obtained a generalization of the solution to an arbitrary number of panels. Formulas for forces in the most compressed and stretched rods are obtained.

Key words: truss, deflection, Maxwell - Mohr integral, induction method, Maple.

Плоская ферма под действием нагрузки получает вертикальный прогиб и смещение подвижных опор. В ферме одна подвижная опора, другая неподвижная (рис. 1). Большое значение имеет информация о смещении опоры, так как неконтролируемое смещение опоры под действием нагрузки может иметь необратимые последствия. Рассматривается нагрузка на верхний пояс. Для определения горизонтального смещения подвижной опоры необходимо определить усилия во всех стержнях фермы от действия нагрузки и усилия от единичной силы в направлении исследуемого горизонтального смещения левой (подвижной) опоры. Все преобразования производятся в системе Maple по программе [1]. По этой же программе ранее были получены аналитические решения для плоских [2-8] и пространственных ферм [9].

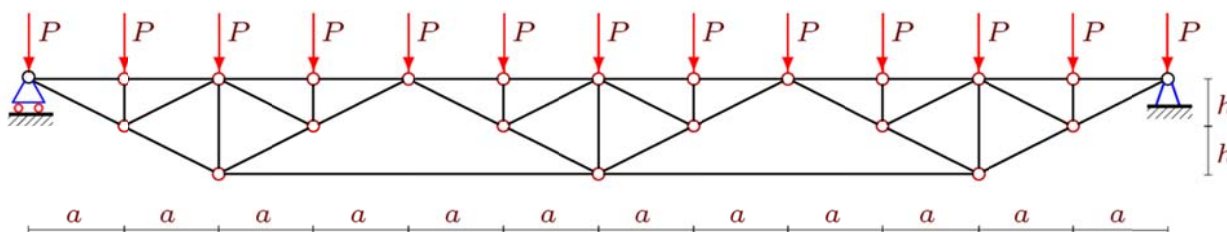


Рис. 1. Ферма при $n=3$

Стержни и узлы фермы нумеруются (рис. 2). В программу вводятся координаты узлов и структура решетки, которая задается специальными векторами, содержащими номера концов стержней.

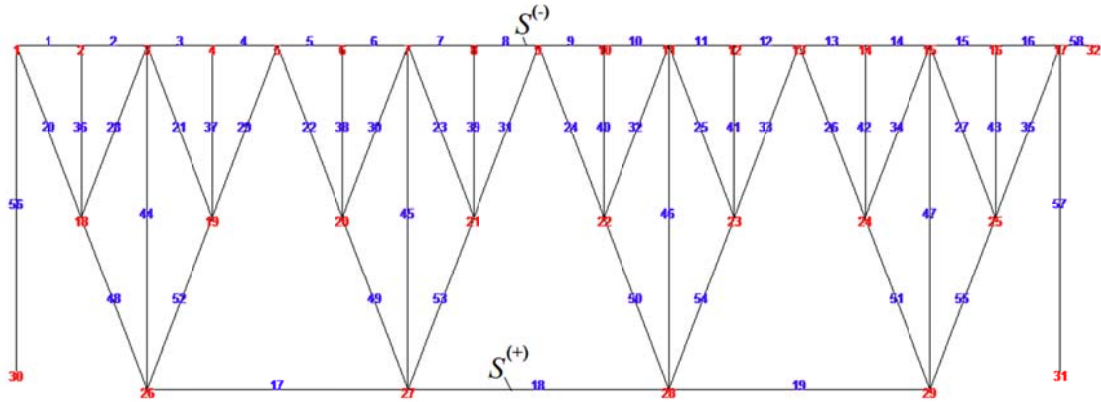


Рис. 2. Схема фермы с пронумерованными стержнями и узлами, $n=4$

Обозначим через n число панелей фермы. Каждая условная панель состоит из четырех стержней верхнего пояса, трех стоек и шести раскосов, образующих шпренгельную решетку. Приведем фрагмент программы кодирования стержней:

```
> for i to 4*n do N[i]:=i,i+1; od;
> for i to n-1 do N[i+4*n]:=6*n+1+i,i+6*n+2; od;
> for i to 2*n do
  N[i+5*n-1]:=2*i-1,i+4*n+1;
  N[i+7*n-1]:=2*i+1,i+4*n+1;
  N[i+9*n-1]:=2*i,i+4*n+1;
od;
> for i to n do
  N[i+11*n-1]:=4*i-1,i+6*n+1;
  N[i+12*n-1]:=2*i+4*n,i+6*n+1;
  N[i+13*n-1]:=2*i+4*n+1,i+6*n+1;
od;
```

Воспользуемся формулой Максвелла-Мора для определения смещения опоры, которая выглядит как

$$\Delta = \sum_{i=1}^{n_s-3} S_i^{(P)} S_i^{(l)} l_i / (EF),$$

где $S_i^{(P)}$ – усилия в стержнях от внешней вертикальной нагрузки P , действующей на всю ферму, $S_i^{(l)}$ – усилия от единичной горизонтальной силы, приложенной к левой опоре, l_i – длины стержней.

Жесткость стержней на растяжение-сжатие EF принята одинаковой для всей конструкции. Постепенно увеличивая число пролетов в ферме, заметим, что решение всякий раз имеет один и тот же вид $\Delta EF = -PA_n a^2 / h$, где коэффициенты A_n образуют следующую последовательность: 6, 28, 82, 184, 350, 596, 938, 1392, 1974, 2700. Используя функцию **rgf_findrecur** пакета **genfunc** системы Maple (эта функция требует *четное* число аргументов), получим из этого ряда рекуррентное уравнение:

$$A_n = 4A_{n-1} - 6A_{n-2} + 4A_{n-3} - A_{n-4}.$$

Решение уравнения с начальными данными $A_1 = 6, A_2 = 28, A_3 = 82, A_4 = 184$ можно получить с помощью функции **rsolve** той же системы Maple. Итоговая формула имеет вид

$$\Delta EF = -PA_n a^2 / h, \text{ где } A_n = n(8n^2 + 10)/3.$$

С увеличением высоты фермы уменьшается смещение опоры. На рис. 3 кривые зависимости (1) построены при $a=10$. На графике (рис. 3) относительное смещение обозначено через $\Delta' = \Delta EF / P$.

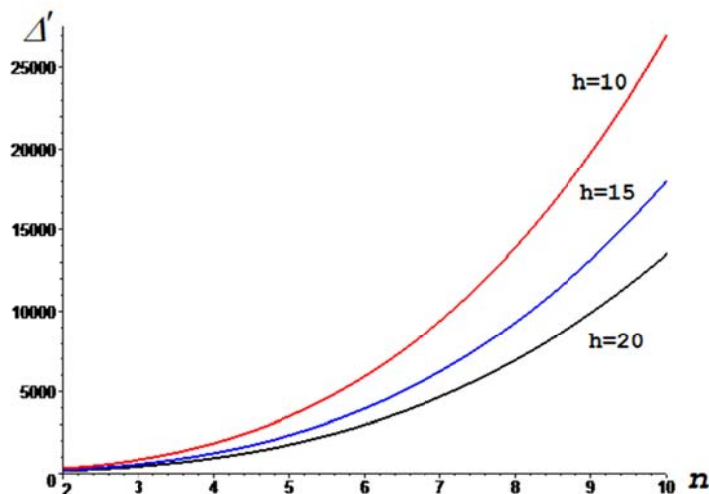


Рис. 3. Зависимость смещения от количества панелей

Найдем усилия в наиболее сжатых и растянутых стержнях.

Очевидно, наиболее сжатый (с отрицательным значением усилий) при такой нагрузке будет стержень в середине верхнего пояса с номером $2n$, а наиболее растянутый — в середине нижнего пояса с номером $9n/2 + ((-1)^n - 1)/4, n > 1$ (см. рис. 2). С помощью функции **rgf_findrecur** получаем рекуррентные соотношения, соответствующие последовательностям искомых усилий. Решение этих уравнений дает функция **rsolve**. Нагрузка на наиболее сжатый стержень определяется зависимостью $S^{(-)} = P(2n^2 - (-1)^n)a / (2h)$, а на наиболее растянутый — $S^{(+)} = P(2n^2 + (-1)^n - 1)a / (2h), n > 1$.

Для сравнения приведем формулу для прогиба (вертикальное смещение среднего узла), полученную в [10] для исследуемой фермы методом индукции:

$$EF \Delta = P(A_n a^3 + C_n c^3 + H_n h^3) / (2h^2),$$

где $c = \sqrt{h^2 + a^2}$ — длина раскоса, а коэффициенты имеют вид $A_n = (20n^4 + 10n^2 - 3(-1)^n + 3)/6, C_n = (8n^2 - (-1)^n + 1)/2, H_n = 4(1 - (-1)^n)$.

Библиографический список:

1. Кирсанов М.Н. Maple и Maplelet. Решения задач механики/ М.Н. Кирсанов. - СПб.: Изд-во Лань, 2012. - 512 с.
2. Широков А.С. Смещение опор двухпролетной неразрезной фермы, загруженной сосредоточенной силой / А.С. Широков // Научный альманах.— 2017. —№ 2-3(28). — С. 290–292. DOI: 10.17117/na.2017.02.03.290
3. Kirsanov M.N. The mathematical model of dome covering industrial facility / M.N. Kirsanov S.V. Astahov // Architecture and Engineering. —2017. —№2(2). — Pp.8-14. DOI: 10.23968/2500-0055-2017-2-2-8-14

4. Кирсанов М.Н. Исследование деформаций плоской внешне статически неопределимой фермы/ М.Н. Кирсанов, А.П. Суворов // Вестник МГСУ. – 2017.– Т. 12.– Вып. 8 (107).– С. 869–875. DOI: 10.22227/1997-0935.2017.8.869-875
5. Кирсанов М.Н. Анализ прогиба арочной фермы/ М.Н. Кирсанов // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2017. – № 5. – С. 50-55
6. Кирсанов М. Н. Анализ усилий и деформаций в корабельном шпангоуте моделируемого фермой / М.Н. Кирсанов // Вестник Государственного университета морского и речного флота имени адмирала С. О. Макарова. — 2017. — Т. 9. — № 3. — С. 560–569. DOI: 10.21821/2309-5180-2017-9-3-560-569
7. Kirsanov M.N., Zaborskaya N.V. Deformations of the periodic truss with diagonal lattice // M.N. Kirsanov, N.V. Zaborskaya // Magazine of Civil Engineering. 2017. – No. 3. – Pp. 61–67. doi: 10.18720/MCE.71.7.
8. Belyankin N.A. Analysis of the deflection of the flat statically determinate girder / N.A. Belyankin, A. Y. Boyko // Science Almanac.– 2017. – No. 2-3(28). – С. 246-249. https://elibrary.ru/download/elibrary_28913792_32626016.pdf
9. Kirsanov M. N. Analysis of the buckling of spatial truss with cross lattice / M.N. Kirsanov // Magazine of Civil Engineering. 2016. No. 4. Pp. 52 - 58. DOI: 10.5862/MCE.64.5
10. Белянкин Н.А. Аналитический расчет прогиба балочной фермы с усиленной треугольной решеткой / Н.А. Белянкин, А.Ю. Бойко, М.Н. Кирсанов // Строительство и архитектура. – 2017. – Т. 5. – 2 (15). – С. 42–44. DOI 10.12737/25106

References

1. Kirsanov M. N. Maple and Maplet. Solutions of mechanics problems. SP.: Publishing house LAN, 2012. 512 p.
2. Shirokov A.S. Displacement of supports of a two-span continuous truss loaded with concentrated force // Scientific almanac. 2017. No. 2-3 (28). P. 290-292. DOI: 10.17117 / na.2017.02.03.290
3. Kirsanov M.N., Astahov S.V. The mathematical model of dome covering an industrial facility // Architecture and Engineering. 2017. № 2 (2). P. 8-14. DOI: 10.23968 / 2500-0055-2017-2-2-8-14
4. Kirsanov M.N., Suvorov A.P. Investigation of deformations of a planarly externally statically indeterminate truss // Vestnik MGSU. Vol. 12. No. 8 (107). P. 869-875. DOI: 10.22227 / 1997-0935.2017.8.869-875
5. Kirsanov M.N. Analysis of arch arch deflection // Construction mechanics of engineering structures and structures. 2017. No. 5. P. 50–55
6. Kirsanov MN Analysis of forces and deformations in a ship frame modeled by a truss // Bulletin of the State Naval and River Fleet University named after Admiral SO Makarov. 2017. Vol. 9. No. 3. P. 560–569. DOI: 10.21821 / 2309-5180-2017-9-3-560-569
7. Kirsanov M.N., Zaborskaya N. Deformations of the periodic truss with diagonal lattice. Magazine of Civil Engineering. 2017. No. 3. P. 61-67. doi: 10.18720 / MCE.71.7.
8. Belyankin N.A., Boyko A.Y. Analysis of the deflection of the flat statically determinate girder // Science Almanac. 2017. No. 2-3 (28). P. 246-249. https://library.ru/download/elibrary_28913792_32626016.pdf
9. Kirsanov M. N. Analysis of the buckling of spatial truss with cross lattice // Magazine of Civil Engineering. 2016. No. 4. P. 52 – 58. DOI: 10.5862/MCE.64.5
10. Belyankin N., Boyko A., Kirsanov M.N. Analytical calculation of the deflection of a beam truss with a reinforced triangular lattice // Construction and architecture (2017). Vol. 5. Issue 2 (15). P. 42-44. DOI 10.12737 / 25106