

ВЫВОД ФОРМУЛЫ ДЛЯ ПРОГИБА СТАТИЧЕСКИ ОПРЕДЕЛИМОЙ ПОРТАЛЬНОЙ ФЕРМЫ В ЗАВИСИМОСТИ ОТ ЧИСЛА ПАНЕЛЕЙ

Derivation of the formula for the deflection of a statically determinate portal truss, depending on the number of panels

Широков А. С., студент,
Национальный исследовательский университет «МЭИ»
(111250, г. Москва, Красноказарменная улица, 14)

Рецензент: Кирсанов М. Н., доктор физико-математических наук, профессор.

Аннотация

В статически определимой портальной ферме с четырьмя опорами аналитически определяется вертикальное смещение среднего узла ригеля. Усилия в стержнях находятся методом вырезания узлов. Прогиб определяется по формуле Максвелла-Мора. Методом индукции по двум параметрам выводится формула для прогиба фермы в зависимости от размеров и числа панелей. Находятся выражения для реакций опор. Используются операторы системы компьютерной математики Maple.

Ключевые слова: ферма, прогиб фермы, интеграл Мора, Maple.

Summary

In a statically determinate four-legged portal truss, the vertical offset of the middle node is analytically determined. The forces in the rods can find using cut nodes. The deflection is determined by the Maxwell-Moore formula. The formula for deflection of the truss depending on the size and number of panels is obtained by induction method. Expressions for the reactions of supports are found. The system of computer mathematics Maple is used.

Keywords: truss, deflection truss, Mohr's integral, Maple.

Рассмотрим плоскую портальную ферму с четырьмя опорами (рис. 1) внешне статически неопределимую. Число горизонтальных панелей в нижнем поясе ригеля равно $2n$, число панелей в стойках (боковых опорных фермах) — m .

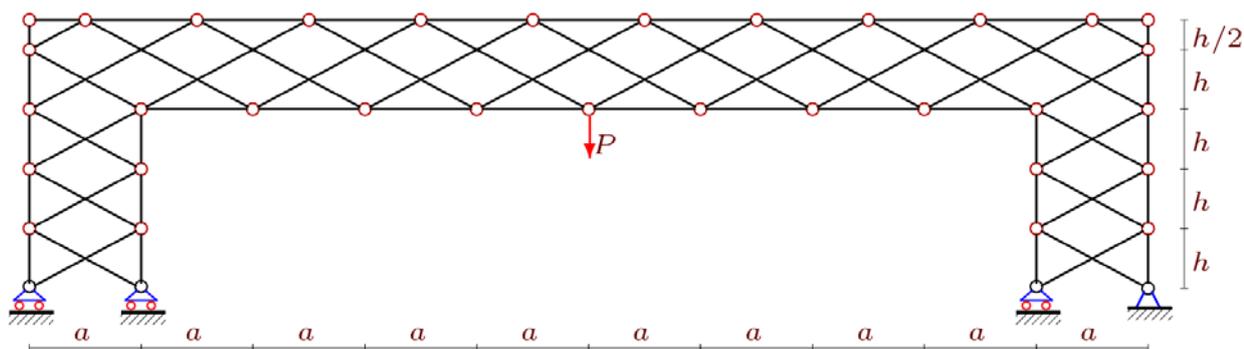


Рис. 1. Ферма при $n=4$, $m=3$

>N[8*n+8*m+12]:=[3*m+4*n+5,3*m+4*n+9]:

>N[8*n+8*m+13]:=[3*m+2*n+2,3*m+2*n+6]:

Всего стержней в ферме вместе с опорными стержнями $m_0 = 8(n + m) + 18$.

Для определения горизонтального перемещения воспользуемся интегралом Максвелла-Мора:

$$\Delta = P \sum_{i=1}^{m_0-5} S_i^2 l_i / (EF),$$

где S_i – усилия в стержнях, от внешней единичной вертикальной нагрузки P , приложенной к центральному узлу нижнего пролета фермы, l_i – длины стержней, EF – жесткость стержней (одинаковая для всей конструкции).

В процессе расчета ферм была получена общая формула решения, справедливая для любого количества панелей:

$$\Delta EF = P(Aa^3 + Cc^3 + Hh^3) / (2h^2), \text{ где } c = \sqrt{a^2 + h^2}$$

Для начала рассмотрим случай $m = 3$, последовательно увеличивая количество панелей n , руководствуясь формулой (1). В этом случае коэффициент A представляет собой следующую последовательность чисел:

7, 9, 64, 66, 217, 219, 514, 516, 1003, 1005, 1732, 1734, 2749, 2751, 4102, 4104, 5839, 5841;

Для определения общей формулы этой последовательности применим возможности системы компьютерной математики Maple. Используя оператор **rgf_findrecur** пакета **genfunc**, получаем следующее рекуррентное соотношение седьмого порядка

$$A_k = A_{k-1} + 3A_{k-2} - 3A_{k-3} - 3A_{k-4} + 3A_{k-5} + A_{k-6} - A_{k-7}.$$

Решение этого уравнения, найденное с помощью функции **rsolve**, и есть вид коэффициента при a^3 :

$$A = (4k^3 + 6((-1)^{k+1} + 1)k^2 + 2(3(-1)^{k+1} + 4)k + (-1)^k - 1) / 4.$$

Аналогично находим коэффициенты при h^3 и c^3 :

$$H = 8(-1)^{k+1} + 11, C = 3(2k + 1 + (-1)^{k+1}) / 4.$$

Для эффективного расчета ферм любой конфигурации необходимо узнать выражение прогиба при любых k и m .

Изменяя m – число вертикальных панелей можно заметить, что только коэффициент H зависит как от k – числа, определяющего количество горизонтальных панелей по формуле (1), так и от m – числа боковых панелей.

Зависимость имеет следующий вид:

$$H = 2(m+1)(-1)^{k+1} + 3m + 2.$$

Для наглядности построим график зависимости относительного прогиба от числа панелей при $a = 2m$ и количестве вертикальных панелей $m = 20$ (рис. 3).

При рассмотрении построенного графика можно заметить, что при разном количестве панелей наиболее выгодными порой оказываются на первый взгляд неочевидные конфигурации фермы. Так при значении $k=1,2,3$ наименьший прогиб имеет ферма с высотой стойки $h=2m$, в то же время при $k=4, 6$ и более ферма с данными параметрами имеет наибольший прогиб.

Обратив внимание на ферму при $k=5$, можно заметить, что ее относительный прогиб имеет неочевидное не экстремальное значение.

Рассмотренный случай показывает, что, не смотря на преобладающее число ферм оптимальной конфигурации, содержащей наибольшую высоту панелей, существуют случаи, когда относительный прогиб меньше у ферм с меньшей высотой стоек h .

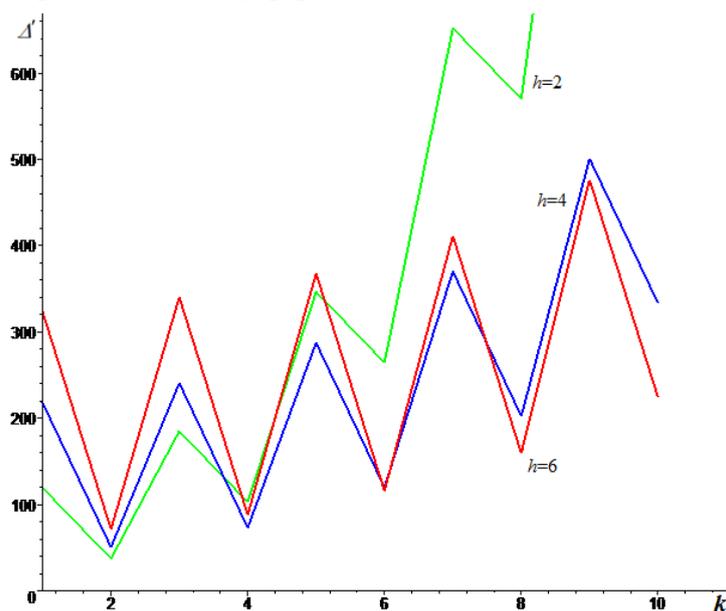


Рис. 3. Зависимость прогиба от параметра количества пролетов фермы при $a = 2, m = 20$

Заметим, что ферма внешне статически неопределимая. Это означает, что пять реакций опор из обычных трех уравнений равновесия фермы в целом найти не удастся. Горизонтальная реакция неподвижной опоры тут исключение. Она равна нулю, так как внешних горизонтальных сил в задаче нет. Для определения остальных реакций необходимо опять прибегать к расчету усилий во всех стержнях и методу индукции, если требуется найти решение для произвольных чисел панелей. Однако тут задача оказывается чуть проще. От числа панелей m результат не зависит. Индукцией по шести фермам получаем, что в угловых опорах вертикальные реакции равны $P(1 - (-1)^k) / 2$, в средних $P(-1)^k / 2$.

Обзор работ, использующих метод индукции в решении аналогичных задач, можно найти в [29].

Библиографический список

1. Кирсанов М. Н. Maple и Maple. Решения задач механики. СПб.: Изд-во Лань, 2012. 512 с.
2. Широков А. С. Смещение опор двухпролетной неразрезной фермы, нагруженной сосредоточенной силой // Научный альманах. 2017. № 2-3 (28). С. 290-292. DOI: 10.17117/na.2017.02.03.290
3. Широков А.С. Аналитический расчет смещения опоры балочной фермы с верхними шпренгелями // Строительная механика и конструкции. 2017. № 2 (15). С. 11-14.
4. Доманов Е. В. Вывод формулы для прогиба балочной фермы с крестообразной решеткой // Строительная механика и конструкции. 2017. № 2 (15). С. 15–19.
5. Кирсанов М. Н. Анализ усилий и деформаций в корабельном шпангоуте, моделируемом фермой // Вестник государственного университета морского и речного флота им. адмирала С. О. Макарова. 2017. Т. 9. № 3. С. 560–569.

6. Кирсанов М. Н. Статический анализ и монтажная схема плоской фермы // Вестник государственного университета морского и речного флота им. адмирала С. О. Макарова. 2016. № 5 (39). С. 61–68.
7. Кирсанов М. Н., Суворов А. П. Исследование деформаций плоской внешне статически неопределимой фермы // Вестник МГСУ. 2017. Т. 12, № 8 (107). С. 869–875.
8. Кирсанов М. Н. Сравнительный анализ жесткости двух схем арочной фермы // Строительство уникальных зданий и сооружений. 2015. 9(36). С. 44-55.
9. Кирсанов М. Н. Аналитическое исследование деформаций плоской фермы арочного типа // Вестник государственного университета морского и речного флота им. адмирала С. О. Макарова 2015. № 3 (31). С. 42-48.
10. Широков А. С. Индуктивный вывод зависимости прогиба и смещения опоры арочной фермы от числа панелей в системе Maple // Международный научный семинар "Нелинейные модели в механике, статистике, теории поля и космологии" -GRACOS-17. Казань: Изд-во Академии наук РТ, 2017. С. 267-272.
11. Савиных А. С. Анализ прогиба арочной раскосой фермы, нагруженной по верхнему поясу // Строительство и архитектура. 2017. Том 5. Выпуск 3 (6). С. 12-17.
12. Кирсанов М. Н. Анализ прогиба арочной фермы // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2017. № 5. С. 50-55.
13. Компанец К. А. Расчет смещения подвижной опоры плоской арочной раскосой фермы при нагрузке в середине пролета // Молодежь и наука. 2017. № 4.
14. Кирсанов М. Н., Маслов А. Н. Формулы для расчёта прогиба балочной многорешётчатой фермы // Строительная механика и расчёт сооружений. 2017. № 2 (271). С. 6–10.
15. Кирсанов М. Н. Аналитический расчет прогиба распорной фермы с произвольным числом панелей // Механизация строительства. 2017. № 3 (873). С. 26–29.
16. Кирсанов М. Н. Расчет прогиба плоской решетчатой фермы с четырьмя опорами // Транспортное строительство. 2017. №7. С.15–17.
17. Кирсанов М. Н. Анализ прогиба решётчатой балочной фермы распорного типа // Инженерно-строительный журнал. 2015. № 5 (57). С. 58–65.
18. Кирсанов М. Н. Расчёт жёсткости стержневой решётки // Вестник машиностроения. 2015. № 8. С. 48–51.
19. Кирсанов М. Н. К выбору решетки балочной фермы // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2017. №3. С. 23–27.
20. Кирсанов М. Н. Вывод формулы для прогиба решётчатой фермы, имеющей случаи кинематической изменяемости // Строительная механика и конструкции. 2017. Т. 1. № 14. С. 27–30.
21. Kirsanov M. N., Zaborskaya N. V. Deformations of the periodic truss with diagonal lattice // Magazine of Civil Engineering. 2017. No. 3. P. 61–67. doi: 10.18720/MCE.71.7
22. Кирсанов М. Н. Изгиб, кручение и асимптотический анализ пространственной стержневой консоли // Инженерно-строительный журнал. 2014. № 5 (49). С. 37-43.
23. Кирсанов М. Н. Аналитическое исследование жесткости пространственной статически определимой фермы // Вестник МГСУ. 2017. Т. 12. № 2 (101). С. 165–171.
24. Кирсанов М. Н. Особенности аналитического расчета пространственных стержневых систем // Строительная механика и расчет сооружений. 2011. № 5. С. 11–15.
25. Кирсанов М. Н. Аналитический расчет пространственной стержневой регулярной структуры с плоской гранью // Строительная механика и расчет сооружений. 2015. № 2 (259). С. 2–6.

26. Кирсанов М. Н., Андреевская Т. М. Анализ влияния упругих деформаций мачты на позиционирование антенного и радиолокационного оборудования // Инженерно-строительный журнал. 2013. № 5 (40). С. 52–58.
27. Кирсанов М. Н. Аналитический расчет и оптимизация пространственной балочной фермы // Вестник Московского энергетического института. 2012. № 5. С. 5–8.
28. Kirsanov M. N. Analysis of the buckling of spatial truss with cross lattice // Magazine of Civil Engineering. 2016. No. 4. Pp. 52–58. doi: 10.5862/MCE.64.5.
29. Осадченко Н. В. Расчёт прогиба плоской неразрезной статически определимой фермы с двумя пролётами // Постулат. 2017. № 12.