УДК 624.31+534.111

ОЦЕНКА ЧАСТОТЫ СОБСТВЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ ФЕРМЫ БОЛЬМАНА

Скулова П.А.

Национальный исследовательский университет «МЭИ»

В плоской статически определимой ферме с крестообразной решеткой типа Больмана грузы расположены в узлах верхнего пояса. Поставлена задача найти аналитическое выражение нижней частоты собственных колебаний фермы в зависимости от числа панелей в предположении, что массы грузов имеют лишь вертикальные перемещения, шарниры идеальные, а упругие стержни одинаковой жесткости не наделены массой. Усилия в стержнях находятся в программе, составленной на языке символьной математики Maple, из решения системы линейных уравнений равновесия узлов фермы, в которую входят и реакции опор. Для нижней оценки частоты используется метод Донкерлея. Жесткость фермы определяется по данным матрицы податливости, полученной по формуле Максвелла – Мора. Отдельные решения, найденные для ферм с различным числом панелей, обобщаются на произвольное число панелей. Коэффициенты итоговой формулы получаются из решения линейных рекуррентных уравнений четвертого порядка. Формула для частоты собственных колебаний имеет полиномиальный по числу панелей характер.

Ключевые слова: *ферма Больмана, нижняя оценка частоты, Maple, индукция, число панелей, метод Донкерлея.*

Постановка задачи. Динамический анализ строительных конструкций, наряду с другими задачами, включает в себя частотный анализ собственных колебаний сооружения. На практике чаще всего используется нижняя (первая) частота колебаний. Обычно эта частота вместе со всеми другими частотами спектра определяется численно в специализированных программных комплексах [1-6]. Однако для некоторых регулярных стержневых систем решения могут быть представлены в символьном виде. На возможность использования свойства регулярности статически определимых систем для вывода удобных в применении на практике формул впервые обратили внимание Игнатьев В.А. [7], Zok F.W., Latture R.M., Begley M.R [8], Hutchinson R.G., Fleck N.A. [9]. Эти формулы могут применяться для простейшей оценки частоты колебаний конструкций, а также являться непосредственной оценкой для численных решений. При помощи системы компьютерной математики Maple и метода индукции, ранее были получены формулы для частот колебаний отдельных грузов или оценки спектров частот плоских ферм [10-13]. Известны также отдельные алгоритмы для получения аналитических решений задач колебаний стержневых систем [14]. В данной работе выводится формула для оценки нижней частоты колебаний плоской фермы типа Больмана.

Расчетная модель. Схемы ферм без нижнего пояса с раскосами, составляющими сплошную решетку (ферма Больмана, ферма Финка (ее элементы более укорочены)), были распространены в США в конце девятнадцатого и начале двадцатого века в конструкциях железнодорожных мостов [15].

Динамические характеристики ферм, необходимые для оценки эксплуатационных свойств конструкции, в частности, спектр частот собственных колебаний чаще всего определяются численно. При помощи методов современной компьютерной математики появляется возможность получить оценку нижней частоты подобных систем. Рассмотрим плоскую модель фермы типа Больмана (рис. 1). Аналитические решения задачи статики конструкций без нижнего пояса получены в работах [16, 17].

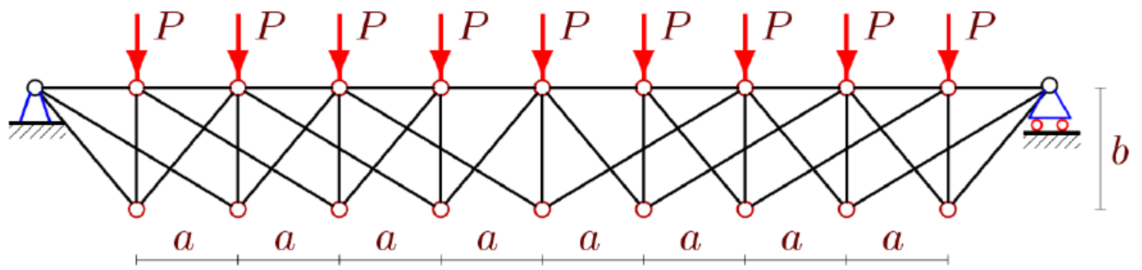

Рис. 1. Ферма, *n* = 4

Плоская статически определимая балочная ферма с $2n$ панелями имеет две опоры. У представленной фермы панели имеются чередующиеся наклонные раскосы и вертикальные стойки. Массы расположены в верхних узлах стержней решетки по прямолинейному поясу. В этом решении рассматриваем только вертикальные смещения масс, малыми горизонтальными смещениями пренебрегаем.

Структура соединений стержней фермы задается в программе, составленной на языке Maple [18]. Ввод данных состоит из двух основных частей – ввода координат узлов и ввода порядка соединения стержней поясов и решетки. Всего в ферме $K = 8n + 8$ стержней. Порядок соединения стержней задается по аналогии с определением структуры графов в дискретной математике. Формируются упорядоченные списки, состоящие из упорядоченных номеров вершин концов соответствующих стержней фермы.

Усилия в стержнях находятся вместе с реакциями опор из решения общей системы уравнений равновесия узлов в проекции на оси координат.

Уравнение частот. Динамические уравнения для точечных массивных грузов записываются в матричной форме:

$$\mathbf{M}_N \ddot{\mathbf{Y}} + \mathbf{D}_N \mathbf{Y} = 0, \tag{1}$$

где $\mathbf{M}_N$ – матрица инерции размером $N \times N$; $\ddot{\mathbf{Y}}$ – вектор ускорений; $N = 2n-1$ – число степеней свободы; $\mathbf{D}_N$ – матрица жесткости; $\mathbf{Y} = [y_1, y_2, ..., y_N]^T$ – вектор вертикальных перемещений масс (узлов) 1,..., *N*. В случае, когда все грузы одинаковые, матрица инерции диагональная $\mathbf{M}_N = m\mathbf{I}_N$. Матрица податливости $\mathbf{B}_N$, обратная к матрице жесткости $\mathbf{D}_N$, определяется с помощью интеграла Мора:

$$b_{i,j} = \sum_{\alpha=1}^{K-3} S_\alpha^{(i)} S_\alpha^{(j)} l_\alpha / (EF), \tag{2}$$

где $S_\alpha^{(i)}$ – усилие в стержне α от действия единичной вертикальной силы, приложенной к узлу *i*; l_α – длина стержня α; K – число стержней фермы; *EF* – жесткость стержней. В число стержней входят недеформируемые опорные стержни, соответствующие подвижной и неподвижной опорам. Усилия этих стержней в сумме (3) не учитываются. Умножение уравнения (2) слева на матрицу податливости $\mathbf{B}_N$ дает уравнение:

$$m\mathbf{B}_N\mathbf{I}_N\ddot{\mathbf{Y}} + \mathbf{Y} = 0. \tag{3}$$

Представление формы колебаний в виде $y_k = u_k \sin(\omega t + \varphi_0)$, где ω – собственная частота колебаний дает соотношение $\ddot{\mathbf{Y}} = -\omega^2\mathbf{Y}$. Из (3) следует $\mathbf{B}_N\mathbf{Y} = \lambda\mathbf{Y},$ где частота колебаний выражается через собственные числа матрицы $\mathbf{B}_N$: $\lambda = 1/(m\omega^2)$. Задача сводится к нахождению собственных чисел матрицы податливости, состоящей из проекций единичных усилий, направленных по искомым усилиям в стержнях. Значения координат концов стержней и данные о геометрии решетки дают значения элементов матрицы. Усилия $S_\alpha^{(i)}$ в стержнях фермы определяются из решения системы уравнений узлов фермы. Собственные числа матрицы в системе Maple возвращает специальный оператор Eigenvalues из специального пакета LinearAlgebra. Частоты колебаний соответствуют собственным числам: $\omega = \sqrt{1/(m\lambda)}$. Наименьшей является первая частота, нижнее значение которой необходимо найти.

Оценка Донкерлея. По формуле Донкерлея нижняя оценка главной частоты колебаний имеет вид:

$$\omega_D^{-2} = \sum_{i=1}^{N} \omega_i^{-2}, \tag{4}$$

где ω_i – частота колебания груза массой *m*, расположенного в узле *i* + 1 верхнего пояса. Уравнение колебаний (1) для одной массы имеет вид:

$$m\ddot{y}_i + d_i y_i = 0,$$

где $\ddot{y}_i$ – ускорение массы; d_i – коэффициент жесткости (i – номер массы); y_i – вертикальное смещение массы. Частота колебаний отдельной массы при отсутствии других масс находится по формуле: $\omega_i = \sqrt{d_i / m}$. Коэффициент жесткости определяется с помощью интеграла Мора:

$$\delta_i = 1/d_i = \sum_{\alpha=1}^{\mu-3} \left(S_\alpha^{(i)}\right)^2 l_\alpha / (EF).$$

Здесь обозначено $S_\alpha^{(i)}$ – усилия в стержне с номером α от действия единичной вертикальной силы, приложенной к узлу i + 1. Частоты колебаний определяются для масс, расположенных поочередно во всех отмеченных узлах фермы. Расчет ферм с различным числом панелей n дает общий вид формулы для определения нижней оценки ω_D. Для произвольного числа панелей имеем:

$$\omega_D^{-2} = m\sum_{i=1}^{N} \delta_i = m(C_1 a^3 + C_2 c^3 + C_3 b^3 + C_4 d^3)/(nh^2 EF), \quad (5)$$

где обозначена длина раскоса $c = \sqrt{a^2 + b^2}$, $d = \sqrt{4a^2 + b^2}$. Коэффициенты $C_1(n), C_2(n), C_3(n), C_4(n)$ в этой формуле определяются методом индукции. Сначала выписываются последовательности коэффициентов, полученных из решения задачи для отдельных ферм, и находятся их общие члены. Длина таких последовательностей должна быть достаточной для того, чтобы определить общий член. Специальный оператор **rgf_findrecur** системы Maple дает рекуррентное уравнение, из которого можно найти искомую зависимость. Решение его дает оператор **rsolve**:

$$C_1 = (27\cdot 4^{(n+2)} n^3 + 9((-2)^{(n+2)} + 89\cdot 4^n - 2)n^2 + 6(4^{(n+3)} - (-2)^{(n+3)} - 6)n + 7(-2)^{(n+2)} - 26 + 794^n)/324. \quad (6)$$

Аналогично находятся и другие коэффициенты:

$$C_2 = (27\cdot 4^{(n+2)} n^3 + 9(167\cdot 4^n - 5(-2)^{(n+3)} + 4)n^2 + 12(113\cdot 4^n - 5(-2)^{(n+3)} + 6)n + 445\cdot 4^n + 52 - 29(-2)^{(n+3)})/1296; \quad (7)$$

$$C_3 = (18\cdot 4^{(n+1)} n^3 + 9(1 + 55\cdot 4^n/2 - (-2)^{(n+3)})n^2 + 4(9/2 + 51\cdot 4^n - 3(-2)^{(n+3)})n + 121\cdot 4^n/2 + 13 + 3(-2)^{(n+4)})/486; \quad (8)$$

$$C_4 = (6\cdot 4^{(n+1)} n^3 + 3(17\cdot 4^n - (-2)^{(n+2)} - 2)n^2 + (53\cdot 4^n - (-2)^{(n+4)} - 12)n - (26 + 9(-2)^{(n+2)} - 62\cdot 4^n)/3)/648. \quad (9)$$

Формула (5) с коэффициентами (6-9) представляет собой решение поставленной задачи – выражение нижней границы ω_D первой частоты колебаний фермы с грузами m, распределенными по нижнему поясу в зависимости от числа панелей и размера фермы.

Выводы. В данной статье был использован алгоритм для вывода формулы оценки нижней границы собственной частоты колебаний плоской фермы с произвольным количеством панелей. Данный алгоритм используется для ферм, которым доступно аналитическое решение задачи о прогибе, а именно: пространственных [19] и плоских [20]. При решении данной задачи использовался метод индукции и программный пакет математического обеспечения – Maple. Выбор Maple основан на наличии возможности находить общие члены последовательности и быстроте работы самого пакета. Для решения данной задачи возможно использовать такие программные пакеты как Wolfram Mathematica и MATLAB.

Итоговая оценка собственной частоты колебаний имеет простой вид и может использоваться в качестве предварительной оценки характеристики рассматриваемой конструкции.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Ufimtsev E., Voronina M. Research of Total Mechanical Energy of Steel Roof Truss during Structurally Nonlinear Oscillations // Procedia Engineering. 2016. T. 150. Pp. 1891-1897.
2. Ufimtcev E. Dynamic Calculation of Nonlinear Oscillations of Flat Trusses Part 2: Examples of Calculations // Procedia Engineering. 2017. T. 206. Pp. 850-856.
3. Chen J. et al. Vibration reduction in truss core sandwich plate with internal nonlinear energy sink // Composite Structures. 2018. Vol. 193. Pp. 180-188.
4. Baeza L., Ouyang H. Vibration of a truss structure excited by a moving oscillator // Journal of Sound and Vibration. 2009. Vol. 321. №. 3-5. Pp. 721-734.
5. Shu J. et al. Assessment of a cantilever bridge deck slab using multi-level assessment strategy and decision support framework // Engineering Structures. 2019. T. 200. P. 109666.
6. Tejani G.G., Savsani V.J., Patel V.K., Mirjalili S. Truss optimization with natural frequency bounds using improved symbiotic organisms search // Knowledge-Based Systems. 2018. № 143. Pp. 162-178.
7. Игнатьев В.А. Расчет регулярных стержневых систем. Саратов: Саратовское высшее военно-химическое военное училище, 1973.
8. Zok F.W., Latture R.M., Begley M.R. Periodic truss structures. Journal of the Mechanics and Physics of Solids. 2016. Vol. 96. Pp. 184-203.
9. Hutchinson R.G., Fleck N.A. The structural performance of the periodic truss // Journal of the Mechanics and Physics of Solids. 2006. Vol. 54, № 4. Pp. 756-782.
10. Тиньков Д.В. Аналитические решения задач о собственных частотах колебаний регулярных стержневых систем: дис. … д-ра техн. наук. М., 2019. 113 с.
11. Воробьев О.В. О методах получения аналитического решения для проблемы собственных частот шарнирных конструкций // Строительная механика и конструкции. 2020. № 1 (24). С. 25-38.
12. Петриченко Е.А. Нижняя граница частоты собственных колебаний фермы Финка // Строительная механика и конструкции. 2020. № 3 (26). С. 21-29.
13. Канатова М.И. Частотное уравнение и анализ колебаний плоской балочной фермы // Trends in Applied Mechanics and Mechatronics. М.: Инфра-М. 2015. Т. 1. С. 31-34.
14. Мишустин И.В., Рыбаков Л.С. Колебания плоских упругих ферм ортогональной структуры // Известия Академии наук. Механика твердого тела. 2003. № 2. С. 168-184.
15. Гордон Дж. Конструкции или почему не ломаются вещи. М.: Мир, 1980. 230 с.
16. Васильков И.Д., Кирсанов М.Н. Формулы для определения прогиба и смещения опоры фермы Больмана с произвольным числом панелей // Научный альманах. 2016. № 11-2 (25). С. 289-292.
17. Салимов М.С. Формула для прогиба фермы типа Больмана под действием распределенной нагрузки [Электронный ресурс] // Постулат. 2018. № 10 (36). URL: http://e-postulat.ru/index.php/Postulat/article/view/1954/1991 (дата обращения: 1.11.2020).
18. Бука-Вайваде К., Кирсанов М.Н., Сердюк Д.О. Calculation of deformations of a cantilever frame planar truss model with an arbitrary number of panels // Вестник МГСУ. 2020. Т. 15. Вып. 4. С. 510-517.

19. Кирсанов М.Н. Особенности аналитического расчета пространственных стержневых систем // Строительная механика и расчет сооружений. 2011. № 5 (238). С. 11-15.
20. Кирсанов М.Н. Плоские фермы. Схемы и расчетные формулы: справочник. М.: ИНФРА-М, 2019. 238 с.

ESTIMATION OF THE NATURAL OSCILLATION FREQUENCY OF THE BOLMAN TRUSS

Skulova P.A.

National Research University «Moscow Power Engineering Institute»

In a planar statically determinate truss with a Bolman-type cross-shaped grid, the loads are located at the nodes of the upper belt. The task is to find an analytical expression of the lower frequency of natural vibrations of the truss as a function of the number of panels, assuming that the masses of loads have only vertical movements, the hinges are ideal, and elastic rods of the same stiffness are not endowed with mass. The forces in the rods are found in a program compiled in the language of symbolic mathematics Maple, from the solution of a system of linear equations of equilibrium of truss nodes, which includes the reactions of supports. For the lower evaluation frequency method is used for Dunkerley. The rigidity of the truss is determined from the data of the compliance matrix obtained by the Maxwell – Mohr's formula. Individual solutions found for trusses with different numbers of panels are generalized to an arbitrary number of panels. The coefficients of the final formula are obtained from solving linear recurrent equations of the fourth order. The formula for frequency is polynomial in the number of panels.

Keyword*: Bolman truss, lower bound of frequency, Maple, induction, the number of panels, the method of Dunkerley.*

ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРЕ

Скулова Полина Александровна
магистрант института энергомашиностроения и механики
Национальный исследовательский университет «МЭИ»
111250, Россия, г. Москва,
ул. Красноказарменная, 14
E-mail: polina.skulova@mail.ru

INFORMATION ABOUT AUTHOR

Skulova Polina Aleksandrovna
Master Student of Power Engineering and Mechanics Institute
National Research University «Moscow Power Engineering Institute»
111250, Russia, Moscow, Krasnokazarmennaya st., 14
E-mail: polina.skulova@mail.ru