



УДК 624.04

Кирсанов Михаил Николаевич

др. физ.-мат. наук, проф.,

Национальный исследовательский университет "МЭИ", Москва

Статический расчет плоской фермы с двойной треугольной решеткой

Предлагается схема статически определимой балочной фермы с параллельными поясами и четырьмя внешними связями. Раскосы фермы сгруппированы попарно и образуют решетку близкую к треугольной. В пакете символьной математики Maple с применением метода индукции найдено точное выражение для прогиба конструкции и экстремальные усилия в стержнях. Используется оператор `rgf_findrecur` для получения рекуррентного уравнения, которому удовлетворяют члены последовательностей коэффициентов в искомой формуле, и оператор `rsolve` для нахождения решения этого уравнения. Решение имеет вид полинома четвертой степени. Отмечается заметное влияние четности числа панелей на прогиб фермы. Численный счет показал, что кривая деформирования нижнего пояса оказывается несимметричной, а реакция одной из вертикальных опор равна нулю при любом числе панелей.

Ключевые слова: ферма, индукция, прогиб, Maple

Static analysis of flat truss with double triangular lattice

Kirsanov Mikhail Nikolaevich

Dr. phys.-math. Sci., Prof.

National Research University "MPEI"

The scheme of statically determinate braced girder with parallel chords and four external connections is suggested. Bracing of truss are grouped in pairs and form a lattice that's close to triangular. In the symbolic mathematics package Maple using the method of induction gives an exact expression for the deflection under the load and and extreme forces in the rods. Maple operator `rgf_findrecur` is used to obtain a recurrent equation, which satisfy the members of the sequence of coefficients in the desired equation and operator `rsolve` to find a solution of this equation. The solution has the polynomial form of the fourth degree. There is a significant influence of parity of the number of panels on the deflection of the truss. A numerical solution showed that the curve of deformation of the lower zone is asymmetrical, and the reaction of one of the vertical supports is equal to zero for any number of panels.

Key words: truss, induction, deflection, Maple

Introduction

The importance of analytical solutions in problems on rod systems is undeniable. Of particular importance are such solutions, when the investigated design consists of a significant number of elements and a numerical count, despite the great accuracy that modern programs and computer equipment can afford, it begins to malfunction. This, as a rule, is manifested in the accumulation of rounding errors that are unavoidable in any numerical calculation. On the other hand, symbolic transformations, due to their specificity, are suitable only for a very small amount of work, with a small number of rods in the truss. The limitation for symbolic transformations is their small speed. So for calculation in the symbolic form of the deflection of a simple beam farm with 30 panels, the hours of operation of the intel CORE i7 processor are required, for less productive systems this time is much longer. The way out of this situation was found [1-3] - an inductive approach to obtaining formulas, in which it is required to calculate successively a series of trusses with different number of panels, and then by methods of the computer mathematics system [4] to generalize the result to an arbitrary number of panels. As a test, it is permissible to use numerical methods, which are performed in the same programs in which the

symbolic results were obtained, but with the use of a special numerical option. Another obstacle to obtaining an analytical result is a small number of schemes of regular farms, primarily statically determinate (both planar and spatial). This question was raised by Hutchinson [5] and is called "hunting" for statically determinate trusses.

The scheme of the truss, the formulation of equations

Consider the construction of the truss in Fig. 1. The truss has n periodicity cells, which will be conditionally called panels. Height of the truss h . Despite the fact that the truss has four external links instead of the standard ones for the beam trusses, the construction is statically determinate. It contains $k = 4n + 6$ hinges (together with four hinges on the ground) and $m = 8n + 4$ rods, including four bearings. Writing two equilibrium equations for each of the $4n + 2$ nodes, we obtain a closed system of equations that gives the solution of the problem.

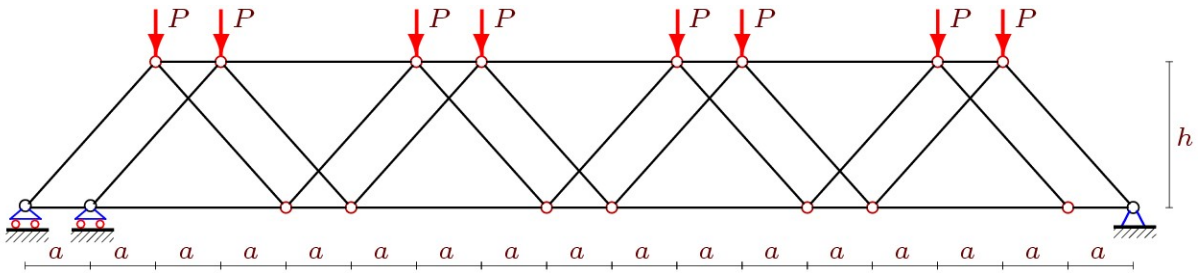


Fig. 1. Схема фермы при $n=4$

Forces in the rods are found according to the program [4], written in the system of symbolic mathematics Maple. We introduce into the program the coordinates of the hinges and the order of joining the rods. We choose the origin in the leftmost mobile support. The coordinates of the hinges have the following values (Fig. 2):

$$\begin{aligned}
 x_{2i-1} &= 4(i-1)a, & y_{2i-1} &= 0, \\
 x_{2i} &= (4i-3)a, & y_{2i} &= 0, \quad i = 1, \dots, n+1 \\
 x_{2i+2n+1} &= 2(2i-1)a, & y_{2i+2n+1} &= h, \\
 x_{2i+2n+2} &= (4i-1)a, & y_{2i+2n+2} &= h, \quad i = 1, \dots, n-1.
 \end{aligned}$$

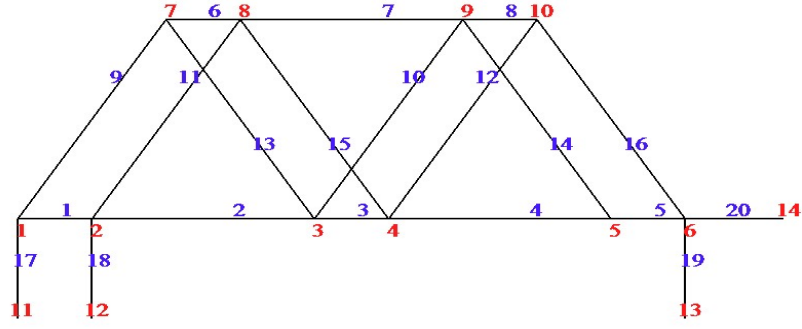


Fig. 2. Номера стержней и шарниров, $n=2$

We neglect the deformation of the support rods. The lengths of these rods are not included in the solution and can be taken arbitrarily. The coordinates of all four support nodes fixed to the ground:

$$\begin{aligned} x_{k-3} &= 0, & y_{k-3} &= -1, \\ x_{k-2} &= a, & y_{k-2} &= -1, \\ x_{k-1} &= x_{2n+2}, & y_{k-1} &= -1, \\ x_k &= x_{2n+2} + 1, & y_k &= 0. \end{aligned}$$

The structure of the bars of the lattice of the truss is given by some vectors $\bar{V}_i, i=1, \dots, m$. These vectors specify the numbers of the hinges at the ends of the rods. The choice of the beginning and the end of the conditional vectors is not connected with the efforts in the rods and their signs and can be arbitrary. The bars of the lower belt correspond to the vectors: $\bar{V}_i = [i, i+1], i=1, \dots, 2n+1$, upper – $\bar{V}_{i+2n+1} = [i+2n+2, i+2n+3], i=1, \dots, 2n-1$. For the bars of the lattice we have the vectors: $\bar{V}_{i+4n} = [2i-1, 2i+2n+1], \bar{V}_{i+5n} = [2i, 2i+2n+2], \bar{V}_{i+6n} = [2i+1, 2i+2n+1], \bar{V}_{i+7n} = [2i+2, 2i+2n+2], i=1, \dots, n$.

The matrix of the system of equilibrium equations for nodes consists of the direction cosines of the rod's forces, which are calculated in terms of the lengths of the rods and the projection of their vector representations on the coordinate axes:

$$l_i = \sqrt{l_{1,i}^2 + l_{2,i}^2}, \quad l_{1,i} = x_{V_{2,i}} - x_{V_{1,i}}, \quad l_{2,i} = y_{V_{2,i}} - y_{V_{1,i}}, \quad i=1, \dots, m.$$

In the number $V_{j,i}$ j stands for the component of the vector (1 or 2), i is the number of the rod. The matrix \mathbf{Z} of the equilibrium equations has the following elements:

$$Z_{r,i} = -l_{j,i} / l_i, \quad r = 2V_{i,2} - 2 + j, \quad r \leq m, \quad j = 1, 2, \quad i = 1, \dots, m,$$

$$Z_{r,i} = l_{j,i} / l_i, \quad r = 2V_{i,1} - 2 + j, \quad r \leq m, \quad j = 1, 2, \quad i = 1, \dots, m.$$

Систему уравнений равновесия узлов $\mathbf{Z}\bar{S} = \bar{B}$, где \bar{S} – вектор усилий в стержнях, включая четыре опорные стержня, – \bar{B} вектор нагрузок, применительно к символической математике удобно решать методом обратной матрицы. Для заданной нагрузки вектор нагрузок имеет следующие ненулевые элементы: $B_{2i} = -P, i = 2n + 3, \dots, 4n + 2$ (рис. 1, 2).

The system of equations for the equilibrium of nodes $\mathbf{Z}\bar{S} = \bar{B}$, where \bar{S} — the force vector in the rods, including four support rods, \bar{B} — the vector of loads, with respect to symbolic mathematics, is conveniently solved by the inverse matrix method. For a given load, the load vector has the following non-zero elements: $B_{2i} = -P, i = 2n + 3, \dots, 4n + 2$ (Fig. 1, 2).

Solution

By the Maxwell-Mor formula we determine the deflection of the middle of the span

$$\Delta = \sum_{i=1}^{m-4} \frac{S_i s_i l_i}{EF_i},$$

where the following notations are introduced: S_i — the forces in the trusses of the truss from the action of the external load, s_i — the forces from the unit load applied to the node in which the deflection is measured, l_i – the lengths of the rods. The stiffness of the bars for the belts and the grill is different. Stiffness of belts - $EF_i = EF, i = 1, \dots, 4n$, grilles — $EF_i = EF / \gamma, i = 4n + 1, \dots, m - 4$. The construction of the truss is such that there is no exact central node. To calculate the deflection, select the node with the number $n + 2$, which is closest to the middle. The successive calculation of the deflection of farms with a different number of panels gives, as a result, the same type of response

$$\Delta = \frac{P(A_n a^3 + C_n c^3 \gamma)}{3h^2 EF}, \quad (2)$$

where the coefficients A_n, C_n depend only on the number of panels n , $c = \sqrt{h^2 + 4a^2}$. Writing a sequence of 20 coefficients at a^3 : 48, 216, 1424, 2976, ..., 1648800, using the **rgf_findrecur** operator of the Maple system [4], we can obtain an equation that the coefficients A_n satisfy

$$A_n = A_{n-1} + 4A_{n-2} - 4A_{n-3} - 6A_{n-4} + 6A_{n-5} + 4A_{n-6} - 4A_{n-7} - A_{n-8} + A_{n-9}.$$

Оператор **rsolve** дает решение этого уравнения

$$A_n = 10n^4 + 2(5 - 2(-1)^n)n^3 + (13 - 11(-1)^n)n^2 + 5(1 - (-1)^n)(n - 1).$$

Similarly, we obtain the general term of the coefficient sequence for c^3 :

$$C_n = 3(2(3 - 2(-1)^n)n^2 + (1 - (-1)^n)(4n - 1)) / 8.$$

Анализ решения

По найденной формуле (2) построим кривые безразмерного прогиба $\Delta' = \Delta EF / (LP_s)$ при фиксированной длине пролета $L = (4n + 1)a = 40\text{м}$, не зависящей от числа панелей, и заданной суммарной действующей нагрузке $P_s = 2nP$ (рис. 3). Такая задача, выбор числа панелей при известном пролете конструкции, обычно стоит перед проектировщиком. Размер h на рисунке указан в метрах. Принято, что площадь сечения стержней решетки (раскосов) меньше, чем у стержней поясов в два раза: $\gamma = 2$.

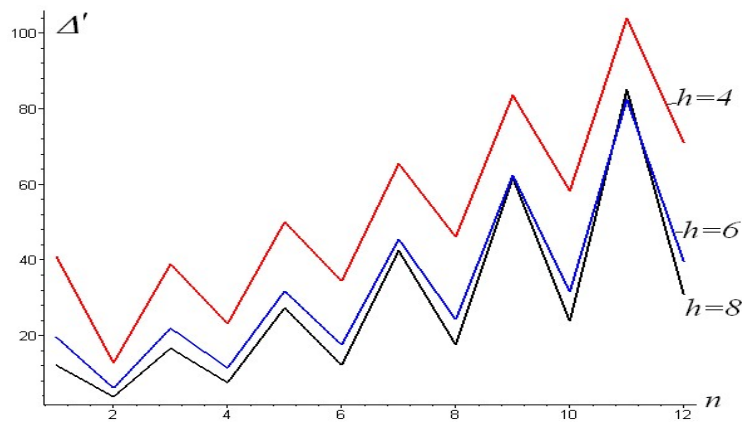


Рис. 3. Зависимость прогиба от числа панелей

Кривые имеют значительные скачки в зависимости от четности числа панелей. С увеличением числа панелей на фиксированном пролете скачки и сам прогиб увеличиваются. Практикующему инженеру-проектировщику это может помочь сделать разумный выбор числа панелей конструкции при оптимизации жесткости системы.

Скачки на кривой прогиба подсказывают, что и деформированная линия нижнего пояса также будет иметь подобные особенности. Численный расчет при $a=1\text{ м}$, $\gamma=1$, $n=5$ подтверждает это предположение (рис. 4). Введено обозначение $\tilde{\Delta} = \Delta EF / (LP)$. Кривая прогиба несимметрична, что объясняется прежде всего асимметрией опор. Очевидно также, что прогиб в шарнире $n+1$ с координатой $x_6 = 9$, вычисленный по формуле (2), не является максимальным. Максимальный прогиб приходится на шарнир с номером $n+2$. Для четного n картина обратная, формула (2) дает максимальный прогиб нижнего пояса.

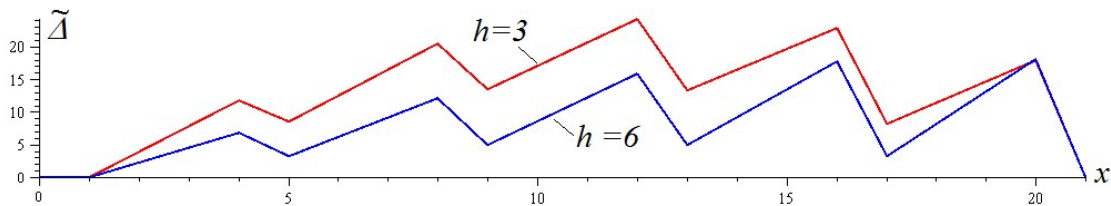


Рис. 4. Изгиб нижнего пояса, $L=21$ м.

Усилия в критических стержнях

Решение задачи об усилиях в стержнях фермы традиционно начинается с определения реакций опор. Однако, в данной конструкции, имеющей четыре связи, определить реакции опор отдельно от усилий в стержнях невозможно. Если бы это была система из двух тел, соединенных шарнирно или как-либо еще между собой, то подобная задача решилась бы выделением равновесия отдельных частей. Здесь же приходится рассматривать равновесие всех узлов фермы, что, безусловно, вручную крайне затруднительно. Сама схема фермы таким образом естественным путем подталкивает к применению компьютерных методов. Описанный выше алгоритм составления уравнений равновесия и

решение полученной системы дают при этом интересный результат. Реакции крайних вертикальных опор равны $S_{m-3} = S_{m-1} = nP$, а реакции остальных опор (горизонтальная связь правой опоры и вторая вертикальная связь слева) равны нулю $S_{m-2} = S_m = 0$. Если нулевое значение горизонтальной опоры достаточно очевидно при чисто вертикальной внешней нагрузке, то нулевая реакция дополнительной опоры слева несколько неожиданна. Однако это действительно так, и свидетельствует о симметрии напряженного состояния конструкции. Деформированное же состояние, как это видно из рисунка 3, несимметрично.

Найдем выражения для усилий в некоторых других стержнях. Используемый алгоритм вывода формул применим к поиску выражения для усилия в любом из стержней фермы. На практике же требуется знать усилия в наиболее сжатом и наиболее растянутом стержне. Первое требуется для проверки устойчивости, второе — прочности на разрыв. По сравнению с выводом формулы прогиба процедура для поиска усилий значительно проще. Для нормальной работы оператора `rgf_findrecur` требуется анализ последовательности коэффициентов меньшей длины, проще и формулы для искомых усилий. Вычислим усилия в двух соседних стержнях в середине нижнего пояса с номерами $n+1$ и $n+2$ (рис. 2) и в двух стержнях в середине верхнего пояса с номерами $3n+1$ и $3n+2$. В симметричной ферме, где середина пролета определяется однозначно, достаточно было бы исследовать только один стержень. Индукция по восьми фермам дает следующие результаты:

$$S_{n+1} = P(n^2 + ((-1)^n + 1)n - ((-1)^n - 1) / 2)a / h,$$

$$S_{n+2} = P(n^2 + (1 - (-1)^n)n + ((-1)^n - 1) / 2)a / h,$$

$$S_{3n+1} = -S_{n+2},$$

$$S_{3n+2} = -P(n^2 + (1 + (-1)^n)n - ((-1)^n + 3) / 2)a / h, n = 2, 3, \dots$$

Как и прогиб, усилия содержат "мигающие" слагаемые $(-1)^n$, создающие зависимость решения от четности числа панелей (изломы на рис. 3, 4).

Conclusions

A scheme of a statically definable truss with four external links is proposed. The design has an asymmetrical arrangement of supports. A fairly compact, accurate formula for deflecting a truss is obtained and analyzed for a given load on the upper belt with an arbitrary number of panels. Derived formulas for effort in the most compressed and stretched rods of the farm. The effect of the parity of the number of panels on the results found is found. A review of the papers using this method of induction to derive analytical expressions for the deflection is contained in [6-8].

Список литературы

1. Кирсанов М.Н. Аналитический расчет балочной фермы с решеткой типа "butterfly" // Строительная механика и расчет сооружений. 2016. № 4. С. 2–5.
2. Кирсанов М.Н. Формулы для расчета плоской балочной фермы с произвольным числом панелей // Строительная механика и конструкции. 2016. №1. С. 19-24.
3. Kirsanov M. N. Stress State and Deformation of a Rectangular Spatial Rod Cover // Scientific Herald of the Voronezh State University of Architecture and Civil Engineering. Construction and Architecture. 2016. N 3 (31). Pp. 71-79.
4. Кирсанов М. Н. Maple и Maplet. Решения задач механики. СПб.: Изд-во Лань, 2012. 512 с.
5. Hutchinson R. G., Fleck N. A. Microarchitected cellular solids – the hunt for statically determinate periodic trusses // ZAMM Z. Angew. Math. Mech. 2005. 85, No. 9. pp. 607 – 617.
6. Тиньков Д. В. Сравнительный анализ аналитических решений задачи о прогибе ферменных конструкций // Инженерно-строительный журнал. 2015. №5(57). С. 66–73.
7. Тиньков Д. В. Анализ точных решений прогиба регулярных шарнирно-стержневых конструкций // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2015. №6. С. 21-28.

8. Кийко Л.К. Аналитическая оценка прогиба арокной фермы под действием ветровой нагрузки // Научный вестник. 2016. № 1 (7). С. 247-254.

References

1. Kirsanov M.N. Analiticheskiy raschet balochnoj fermy s reshetkoj tipa "butterfly"// Stroitel'naya mekhanika i raschet sooruzhenij. 2016. № 4. S. 2-5.(Kirsanov, M.N. Analytical calculation of the truss with "butterfly" type lattice// Structural Mechanics and Analysis of Constructions. 2016. No.4. Pp. 2-5.)
2. Kirsanov M.N. Formuly dlya rascheta ploskoj balochnoj fermy s proizvol'nym chislom panelej // Stroitel'naya mekhanika i konstrukcii. 2016. №1. S. 19-24. (Kirsanov, M.N. The formula for calculating flat braced girder with an arbitrary number of panels// Structural Mechanics and Constructions. 2016. No. 1. pp. 19-24.)
3. Kirsanov M. N. Stress State and Deformation of a Rectangular Spatial Rod Cover// Scientific Herald of the Voronezh State University of Architecture and Civil Engineering. Construction and Architecture. 2016. N 3 (31). Pp. 71-79.
4. Kirsanov M. N. Maple i Maplet. Resheniya zadach mekhaniki. SPb.: Izd-vo Lan', 2012. 512 s. (Kirsanov, M. N. Maple and Maplet. Mechanics. SPb.: Publishing house LAN, 2012. 512 p.)
5. Hutchinson R. G., Fleck N. A. Microarchitected cellular solids – the hunt for statically determinate periodic trusses// ZAMM Z. Angew. Math. Mech. 2005. 85, No. 9. pp. 607 – 617.
6. Tin'kov D. V. Sravnitel'nyj analiz analiticheskikh reshenij zadachi o progibe fermennykh konstrukcij // Inzhenerno-stroitel'nyj zhurnal. 2015. №5(57). S. 66–73.(Tinkoff , D. V. Comparative analysis of analytical solutions to the problem of deflection of truss structures// Magazine of civil Engineering. 2015. No. 5(57). pp. 66-73.)
7. Tin'kov D. V. Analiz tochnyh reshenij progiba reguljarnyh sharnirno-sterzhnevyykh konstrukcij// Stroitel'naya mekhanika inzhenernykh konstrukcij i sooruzhenij. 2015. №6. S. 21-28.(Tinkoff, D. V. Analysis of the exact solutions of deflection regular jointed frame structures// Structural mechanics of engineering constructions and buildings. 2015. No. 6. pp. 21-28.)
8. Kijko L.K. Analiticheskaya ocenka progiba arochnoj fermy pod dejstviem vetrovoj nagruzki // Nauchnyj vestnik. 2016. № 1 (7). S. 247-254. (Kiyko, L. K. Analytical evaluation of deflection of arched trusses under wind load// Scientific Bulletin. 2016. No. 1 (7). pp. 247-254.)