

ФОРМУЛЫ ДЛЯ РАСЧЕТА ПРОГИБА И УСИЛИЙ В СТЕРЖНЯХ СИММЕТРИЧНОЙ БАЛОЧНОЙ ФЕРМЫ

В статье дается вывод аналитической зависимости прогиба статически определимой фермы с параллельными поясами и консольными участками в зависимости от ее размеров и числа панелей. Анализируются асимптотические свойства решения с учетом различных жесткостей стержней поясов и решетки фермы. Усилия в стержнях определяются методом вырезания узлов по программе, написанной в системе компьютерной математики Maple. Обобщение решений, полученных для ферм с различным числом панелей, производится методом индукции. Подобие формул для прогиба позволяет выписать последовательность коэффициентов при соответствующих параметрах фермы. Выводится рекуррентное уравнение, которому удовлетворяют члены последовательности, и находится его решение. Полученное решение позволяет также оптимизировать ферму за счет выбора наиболее рационального распределения сечений стержней поясов и решетки.

Ключевые слова: ферма, консоль, прогиб, индукция, Maple, аналитическое решение

Ферма с параллельными поясами и двумя консольными участками опирается на две опоры. Ставится задача получения аналитической зависимости прогиба фермы в середине пролета от числа панелей. Применяется алгоритм, предложенный в [1].

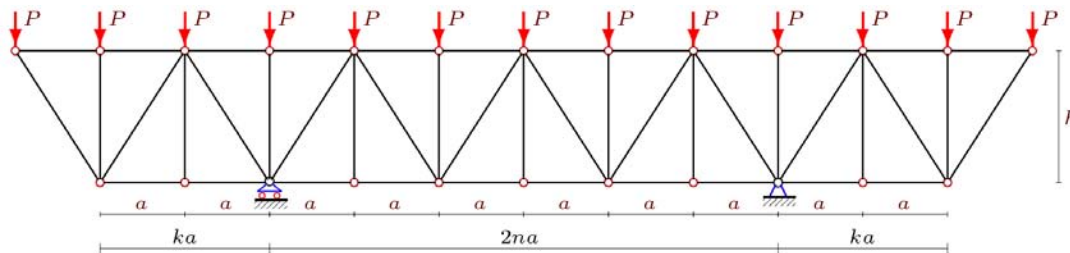


Рисунок 1 – Ферма, $k=2$, $n=3$

Рассмотрим случай четного числа панелей в среднем пролете фермы и одинаковыми консольными частями. Ферма содержит $2(n+k)$ панелей, $2t+2$ шарниров, $m=4t+4$ стержней (включая три опорные стержня), где $t=2(n+k)+1$. Усилия в стержнях фермы определяем методом вырезания узлов. Для этого по координатам узлов (шарниров) составляется матрица направляющих косинусов. Начало координат помещаем в крайний левый шарнир нижнего пояса, ось x направляем горизонтально, ось y – вертикально: $x_j = aj$, $y_j = 0$, $j = 1, \dots, t$, $x_{j+t} = a(j-1)$, $y_{j+t} = h$, $j = 1, \dots, t+2$. Затем указываем номера узлов по концам стержней, условно представляя их векторами \vec{V} . Направления этих векторов можно выбирать произвольно, на значение усилий и на их знак это не влияет. Стержни нижнего пояса, $i = 1, \dots, t-1$: $\vec{V}_i = [i, i+1]$; верхнего пояса, $i = 1, \dots, t+1$: $\vec{V}_{i+t-1} = [i+t, i+t+1]$; стойки, $i = 1, \dots, t$: $\vec{V}_{i+2t} = [i, i+t+1]$; раскосы: $i = 1, \dots, k+n+1$: $\vec{V}_{i+3t} = [2i-1, 2i-1+t]$, $\vec{V}_{i+3t+k+n+1} = [2i-1, 2i+1+t]$. Опорный стержень, моделирующий левую подвижную опору, задается вектором $\vec{V}_m = [k+1, 2t+4]$, неподвижную опору — векторами: $\vec{V}_{m-2} = [2n+k+1, 2t+3]$ и $\vec{V}_{m-1} = [2n+k+1, 2t+4]$.

Проекции стержней-векторов на оси координат вычисляются через координаты их концов $l_{x,i} = x_{V_{i,1}} - x_{V_{i,2}}$, $l_{y,i} = y_{V_{i,1}} - y_{V_{i,2}}$ и определяют направляющие косинусы — коэффициенты уравнений равновесия узлов (шарниров) в проекциях. Матрица направляющих косинусов G имеет компоненты: $G_{2V_{i,1}-1,i} = l_{x,i} / l_i$, $G_{2V_{i,2}-1,i} = -l_{x,i} / l_i$, $G_{2V_{i,2},i} = -l_{y,i} / l_i$, $l_i = \sqrt{l_{x,i}^2 + l_{y,i}^2}$. Решение системы уравнений равновесия узлов $G\bar{S} = \bar{B}$ в зависимости от правой части, в которую входят действующие нагрузки, дает выражения для усилий в стержнях. Решение в системе компьютерной математики Maple [1] может быть получено в символьной форме.

Решение

Прогиб определяем по формуле Максвелла – Мора

$$\Delta = \sum_{i=1}^{m-3} \frac{S_{i,P} S_{i,1} l_i}{EF},$$

где $S_{i,P}$ – усилие в стержне i от действия внешней нагрузки, $S_{i,1}$ – усилие в стержне i от действия единичной силы, приложенной в середине пролета к узлу нижнего пояса по направлению перемещения, EF – жесткость стержней, l_i – их длины. Суммирование ведется по деформируемым стержням (опорные стержни приняты жесткими). Рассмотрим случай разных сечений стержней. Выделим три группы стержней, выразив площади их сечений через некоторую заданную F . Стержни верхнего и нижнего поясов длиной a с сечениями $F_1 = F / \gamma_1$; стойки длиной h и площадью $F_2 = F / \gamma_2$; и раскосы длиной c и площадью $F_3 = F / \gamma_3$. В результате оказывается, что для любых значений k и n решение имеет один и тот же вид

$$\Delta_{k,n} = P \frac{A_{k,n} \gamma_1 a^3 + H_{k,n} \gamma_2 h^3 + C_{k,n} \gamma_3 c^3}{2h^2 EF}, \tag{1}$$

где $c = \sqrt{a^2 + h^2}$ — длина раскосов. Коэффициенты $A_{k,n}$, $H_{k,n}$, $C_{k,n}$ зависят только от чисел k и n . Решение задачи при различных значениях k и n показывает, что коэффициент $C_{k,n}$ имеет простой вид: $C_{k,n} = n^2$. Другие коэффициенты можно получить только методом индукции, причем сначала надо провести индукцию по одному параметру и выявить серию формул для коэффициента, затем полученную серию формул обобщить методом индукции по другому параметру. Общие члены последовательностей коэффициентов можно получить с помощью операторов `rgf_findrecur` и `rsolve` системы Maple [1]. Требуется анализ решений от восьми до десяти ферм с последовательно увеличивающимися числами n и k . В результате получаем

$$A_{k,n} = n^2(5n^2 - 6k^2 - 18k - 11) / 6, H_{k,n} = (2n + 2k + 3)(1 + (1 - (-1)^k) / 2).$$

Аналогично, но несколько длиннее, выводится формула для прогиба консоли от действия указанной нагрузки. Формула при этом получает тот же вид (1), но с коэффициентами

$$A_{k,n} = -4n^3(k + 1) / 3 + (6k^3 + 24k^2 + 31k + 13)n / 3 + (3k^4 + 16k^3 + 33k^2 + 32k + 12) / 6, \\ H_{k,n} = (n + k + 3 / 2)(3 - (-1)^k), C_{k,n} = (k + 1)(k + 2).$$

Индукция также проводится в два этапа. Сначала при фиксированном значении k выводятся формулы, дающие зависимость от n , затем для этих результатов находится обобщение по значению k . При получении коэффициента $A_{k,n}$ потребовалось найти десять формул при $k=0,1,2,\dots,9$: $A_{0,n} = -4n^3 / 3 + 13n / 3 + 2$, $A_{1,n} = -8n^3 / 3 + 74n / 3 + 16$, $A_{2,n} = -4n^3 + 73n + 64$,

..., $A_{9,n} = -40n^3/3 + 6610n/3 + 5720$. Если коэффициенты при $n^3/3$ в этих формулах образуют достаточно очевидную последовательность по k , то для последовательности коэффициентов 13, 74, 219, 484, 905, 1518, 2359, 3464 при $n/3$ с помощью оператора `rgf_findrecur` необходимо получить рекуррентное уравнение $z_k = 4z_{k-1} - 6z_{k-2} + 4z_{k-3} - z_{k-4}$, решение которого с начальными условиями $z(0) = 13, z(1) = 74, z(2) = 219, z(3) = 484$ дает искомый коэффициент.

Приведенный алгоритм решения может быть применен для вывода формул и для других типов нагрузок: распределенных по нижнему поясу, сосредоточенных на консолях и в середине пролета и др.

Анализ прогиба

Зафиксируем суммарную нагрузку на ферму $P_0 = (2n + 2k + 3)P$ и общую длину фермы $L = 2(n + k)a$. Пусть сечения всех стержней фермы одинаковые: $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma_3 = 1$. Обозначим безразмерный прогиб фермы $\Delta' = \Delta EF / (P_0 L)$. Кривые зависимости прогиба середины пролета (1) при разных длинах консолей изображены на рисунке 2 при $L=100$ м, $h=3$ м. Отрицательные прогибы при малых n объяснимы — консольные части под действием вертикальной нагрузки вызывают изгиб среднего пролета вверх. При $k=1$ этот эффект отсутствует, с удлинением консолей — усиливается.

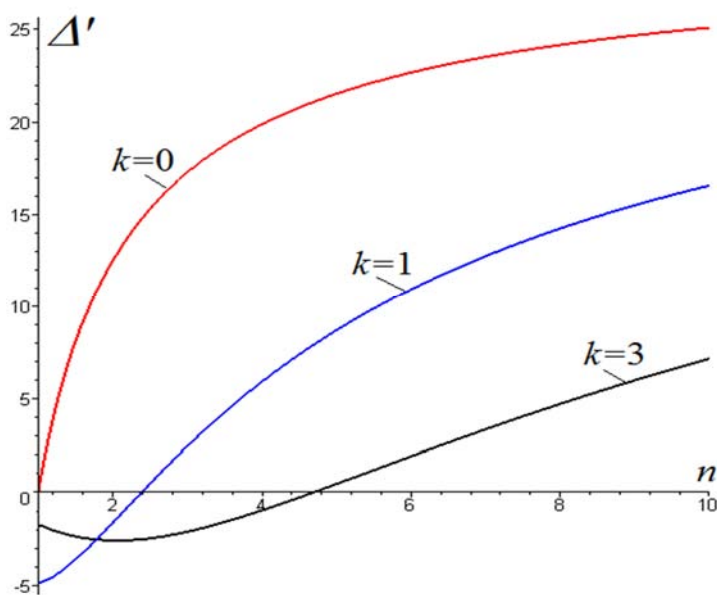


Рисунок 2 – Прогиб в зависимости от числа панелей ($\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma_3 = 1$)

Интересно отметить, что кривые зависимости прогиба от числа панелей в указанной постановке (фиксированный пролет) сильно зависят от распределения площадей сечений стержней по выделенным группам. Если увеличить площадь сечений поясов и уменьшить сечения решетки, $\gamma_1 = 0,5, \gamma_2 = \gamma_3 = 2$, то характер кривых (особенно для фермы с малыми боковыми консолями) изменится (рис. 3).

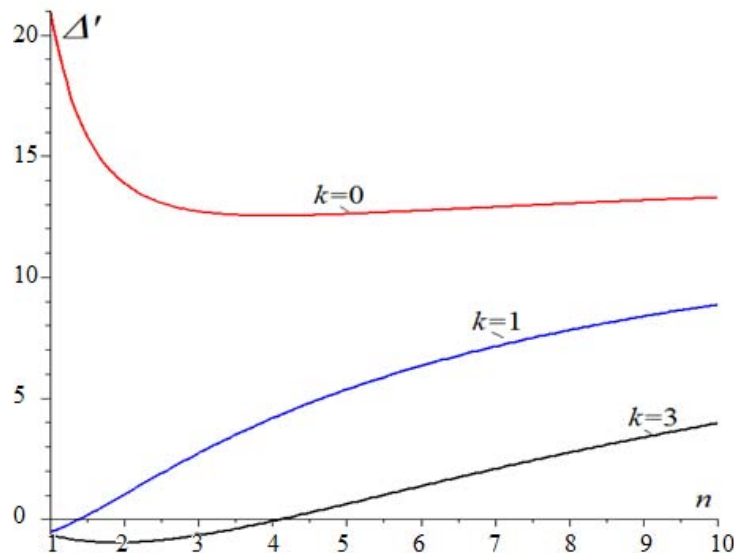


Рисунок 3 – Прогиб в зависимости от числа панелей ($\gamma_1 = 0,5, \gamma_2 = \gamma_3 = 2$)

С увеличением числа панелей n в среднем пролете рост прогиба замедляется, однако на горизонтальные асимптоты кривые не выходят. Угол наклона асимптоты дает предел $\lim_{n \rightarrow \infty} \Delta' / n = \gamma_3 h / (2L)$. Полученная оценка не зависит от числа панелей на консоли k и коэффициентов площадей γ_1 и γ_2 .

Анализ усилий в стержнях

Найдем усилия в стержнях верхнего и нижнего пояса в наиболее опасном месте — в середине пролета. Не прибегая к методу индукции методом сечений, получим усилие в среднем стержне верхнего пояса фермы

$$S_{l+k+n,p} = -Pa(n^2 - k^2 - 3k - (5 - (-1)^{k+n}) / 2) / h .$$

В зависимости от сочетания k и n этот стержень сжат или растянут. Аналогично, усилие в среднем стержне нижнего пояса имеет вид

$$S_{k+n,p} = Pa(n^2 - k^2 - 3k - (5 + (-1)^{k+n}) / 2) / h .$$

Выводы

Совместное использование математического пакета Maple с методом индукции позволило получить и проанализировать точную формулу для прогибов фермы. Эти решения применимы для тестирования результатов численных решений, полученных в специализированных пакетах. Рассмотренная ферма может являться основной системой для статически неопределимой фермы, в которой, например, шарниры заменены сваркой. В этом случае найденные формулы частично упрощают решение задачи. Кроме того, этот результат может быть полезен и практическому инженеру для первичной оценки прогиба системы. Полученное решение позволяет также оптимизировать ферму за счет выбора наиболее рационального распределения сечений стержней поясов и решетки.

Обзоры аналитических решений, полученных с использованием рассмотренного алгоритма, содержатся в работах [2-4]. Метод индукции по двум параметрам использован в [5-7] при построении линий влияния. Аналитическое выражение для прогиба балки с параллельными поясами под действием нагрузки по нижнему поясу получено в [8].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Кирсанов, М. Н. Maple и Maplet. Решение задач механики/ М.Н. Кирсанов. — СПб.: Изд-во Лань, 2012. — 512 с.

2. Кийко, Л. К. Аналитическая оценка прогиба арокной фермы под действием ветровой нагрузки / Л.К. Кийко // Научный вестник. — 2016. — № 1 (7). — С. 247—254.
3. Тиньков, Д. В. Сравнительный анализ аналитических решений задачи о прогибе ферменных конструкций / Д. В. Тиньков // Инженерно-строительный журнал. — 2015. — №5(57). — С. 66—73.
4. Тиньков, Д. В. Анализ точных решений прогиба регулярных шарнирно-стержневых конструкций / Д. В. Тиньков // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. — 2015.— №6. — С. 21-28.
5. Al-Shahrabi, A. M. Line of influence of the deflection for cantilever truss / A. M. Al-Shahrabi, M.N. Kirsanov // Вестник научных конференций. — 2016. № 2-1(6). — С. 6—7.
6. Dong, X. The dependence of the deflection of the truss from the position of the load for an arbitrary number of panels/ X. Dong, M.N. Kirsanov // Вестник научных конференций.— 2016. —№ 1-4 (5). — С. 6—7.
7. Jiang, H. An analytical expression for the influence line of the truss/ H. Jiang, M.N. Kirsanov // Вестник научных конференций. — 2016. — № 1-5(5). — С.10—11.
8. Ponamareva, M.A. The displacement of the support trusses with parallel belts under uniform load/ M.A. Ponamareva// Научный альманах. — 2016. — № 4-3(18). — С.257—259.

Кирсанов Михаил Николаевич

Национальный исследовательский университет "МЭИ", Москва

Доктор физико-математических наук, профессор,

E-mail: c216@ya.ru

M. KIRSANOV

**FORMULAS FOR CALCULATING OF DEFLECTION AND STRESSES
IN THE BARS OF SYMMETRICAL TRUSS**

The analytic dependence of deflection of statically determinate trusses with parallel belts and console sections, depending on its size and number of panels is obtained. Analyzes of asymptotic properties of the solutions taking in to account different stiffness rods of the belts, and lattice. The forces in the rods are determined by cutting out the nodes by the author's program written for the computer algebra system Maple. Generalization of the solutions obtained for trusses with different number of panels produced by the method of induction. The similarity of the formulas for deflection allows to write the sequence of coefficients of the respective parameters of the truss. Using a system Maple displays the recurrence equation which satisfy the members of the sequence and its solution. The solution also allows to optimize the farm due to the choice of the most rational distribution of element cross-sections.

Keywords: truss, console, deflection, induction, Maple, analytical solution

BIBLIOGRAPHY

1. Kirsanov, M. N. Maple i Maplet. Resheniye zadach mekhaniki/ M.N. Kirsanov. — SPb.: Izd-vo Lan', 2012. — 512 s.
2. Kiyko, L. K. Analiticheskaya otsenka progiba arochnoy fermy pod deystviyem vetrovoy nagruzki / L.K. Kiyko // Nauchnyy vestnik. — 2016. — № 1 (7). — S. 247—254.
3. Tin'kov, D. V. Sravnitel'nyy analiz analiticheskikh resheniy zadachi o progibe fermennykh konstruktсий / D. V. Tin'kov // Inzhenerno-stroitel'nyy zhurnal. — 2015. — №5(57). — S. 66—73.
4. Tin'kov, D. V. Analiz tochnykh resheniy progiba regul'yarnykh sharnirno-sterzhnevyykh konstruktсий / D. V. Tin'kov // Stroitel'naya mekhanika inzhenernykh konstruktсий i sooruzheniy. — 2015.— №6. — S. 21-28.
5. Al-Shahrabi, A. M. Line of influence of the deflection for cantilever truss / A. M. Al-Shahrabi, M.N. Kirsanov // Vestnik nauchnykh konferentsiy. — 2016. № 2-1(6). — S. 6—7.
6. Dong, X. The dependence of the deflection of the truss from the position of the load for an arbitrary number of panels/ X. Dong, M.N. Kirsanov // Vestnik nauchnykh konferentsiy.— 2016. —№ 1-4 (5). — S. 6—7.
7. Jiang, H. An analytical expression for the influence line of the truss/ H. Jiang, M.N. Kirsanov // Vestnik nauchnykh konferentsiy. — 2016. — № 1-5(5). — S.10—11.
8. Ponamareva, M.A. The displacement of the support trusses with parallel belts under uniform load/ M.A. Ponamareva// Nauchnyy al'manakh. — 2016. — № 4-3(18). — S.257—259.

M. Kirsanov

National Research University "MPEI", Moscow

Doctor of Phys. and Math. sciences, professor,

E-mail: c216@ya.ru