

DOI 10.22363/1815-5235-2020-16-5-351-360
УДК 624.04:531.391.3

НАУЧНАЯ СТАТЬЯ / RESEARCH PAPER

Аналитическая оценка частоты собственных колебаний фермы с произвольным числом панелей

М.Н. Кирсанов

Национальный исследовательский университет «Московский энергетический институт», Российская Федерация, 111250, Москва, Красноказарменная, 14
c216@ya.ru

История статьи

Поступила в редакцию: 3 июля 2020 г.
Доработана: 11 сентября 2020 г.
Принята к публикации: 19 сентября 2020 г.

Аннотация

Цель исследования – вывод формулы зависимости первой частоты собственных колебаний плоской статически определимой балочной фермы с параллельными поясами от числа панелей, размеров и одинаковых масс, сосредоточенных в узлах нижнего пояса фермы. Решетка фермы треугольная с вертикальными стойками. В решении использованы операторы системы компьютерной математики Maple. *Методы.* Основой для верхней оценки искомой частоты колебаний регулярной фермы является энергетический метод. В качестве формы прогиба фермы взят прогиб от действия равномерно распределенной нагрузки. Предполагаются только вертикальные перемещения грузов. Амплитудные значения прогиба фермы вычисляются по формуле Максвелла – Мора. Усилия в стержнях определяются в символьной форме методом вырезания узлов. Зависимость решения от числа панелей получается индуктивным обобщением серии решений для ферм с последовательно увеличивающимся числом панелей. Для последовательностей коэффициентов искомой формулы составляются и решаются однородные линейные рекуррентные уравнения четвертого порядка. *Результаты.* Решение сравнивается с численным решением, полученным из анализа всего спектра собственных частот колебаний системы масс, расположенных в узлах фермы. Частотное уравнение составляется и решается с помощью операторов поиска собственных значений в системе Maple. Показано, что полученная аналитическая оценка отличается от численного решения на доли процента. При этом с увеличением числа панелей погрешность энергетического метода монотонно уменьшается. Приведена более простая нижняя оценка частоты колебаний по методу Донкерлея. Точность оценки снизу значительно меньше оценки сверху, зависит от размеров и числа панелей.

Ключевые слова: балочная ферма, собственные колебания, нижняя оценка частоты, верхняя оценка частоты, метод Донкерлея, Maple, индукция

Для цитирования

Кирсанов М.Н. Аналитическая оценка частоты собственных колебаний фермы с произвольным числом панелей // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2020. Т. 16. № 5. С. 351–360. <http://dx.doi.org/10.22363/1815-5235-2020-16-5-351-360>

Кирсанов Михаил Николаевич, доктор физико-математических наук, профессор кафедры робототехники, мехатроники, динамики и прочности машин Института энергомашиностроения и механики; eLIBRARY SPIN-код: 8679-6853, ORCID iD: <https://orcid.org/0000-0002-8588-3871>, ResearcherID: H-9967-2013, IStinaResearcherID: 2939132.

© Кирсанов М.Н., 2020



This work is licensed under a Creative Commons Attribution 4.0 International License
<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>

Analytical assessment of the frequency of natural vibrations of a truss with an arbitrary number of panels

Mikhail N. Kirsanov

National Research University “Moscow Power Engineering Institute”, 14 Krasnokazarmennaya St, Moscow, 111250, Russian Federation
c216@ya.ru

Article history

Received: July 3, 2020

Revised: September 11, 2020

Accepted: September 19, 2020

Abstract

The aim of the work is to derive a formula for the dependence of the first frequency of the natural oscillations of a planar statically determinate beam truss with parallel belts on the number of panels, sizes and masses concentrated in the nodes of the lower truss belt. Truss has a triangular lattice with vertical racks. The solution uses Maple computer math system operators. *Methods.* The basis for the upper estimate of the desired oscillation frequency of a regular truss is the energy method. As a form of deflection of the truss taken deflection from the action of a uniformly distributed load. Only vertical mass movements are assumed. The amplitude values of the deflection of the truss is calculated by the Maxwell – Mohr’s formula. The forces in the rods are determined in symbolic form by the method of cutting nodes. The dependence of the solution on the number of panels is obtained by an inductive generalization of a series of solutions for trusses with a successively increasing number of panels. For sequences of coefficients of the desired formula, fourth-order homogeneous linear recurrence equations are compiled and solved. *Results.* The solution is compared with the numerical one, obtained from the analysis of the entire spectrum of natural frequencies of oscillations of the mass system located at the nodes of the truss. The frequency equation is compiled and solved using Eigenvalue search operators in the Maple system. It is shown that the obtained analytical estimate differs from the numerical solution by a fraction of a percent. Moreover, with an increase in the number of panels, the error of the energy method decreases monotonically. A simpler lower bound for the oscillation frequency according to the Dunkerley method is presented. The accuracy of the lower estimate is much lower than the upper estimate, depending on the size and number of panels.

Keywords: beam truss, natural oscillations, lower frequency estimate, upper frequency estimate, Dunkerley method, Maple, induction

For citation

Kirsanov M.N. Analytical assessment of the frequency of natural vibrations of a truss with an arbitrary number of panels. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings.* 2020;16(5):351–360. (In Russ.) <http://dx.doi.org/10.22363/1815-5235-2020-16-5-351-360>

1. Введение

Наряду с жесткостью и прочностью конструкции значение первой частоты колебаний фермы является одной из ее важнейших эксплуатационных характеристик. Эта величина входит в динамические расчеты вынужденных и затухающих колебаний фермы, в решения задач вибрации и сейсмостойкости. Существуют численные расчеты спектров колебаний ферм, реализуемые в различных специализированных пакетах [1–6]. Несмотря на широкое распространение численных методов расчета, их высокую точность и большой выбор доступных моделей ферм (линейных и нелинейных) для анализа частот колебаний, аналитические методы, сводящиеся к сравнительно простым формулам, редки.

С появлением в арсенале инженера современных систем компьютерной математики (Maple, Mathematica, Reduce и др.) аналитические методы становятся все более распространенными [7–12]. Формулы, полученные в результате решения уравнений в символьном виде, удобны как для оценки точности решений в специализированных пакетах, так и для простого предварительного расчета частотных характеристик сооружения. Наиболее значимы решения применимые для широкого класса систем. Расширение класса рассчитываемых аналитически систем в регулярных фермах достигается введением в набор параметров формулы числа панелей. Возможности аналитических решений для регулярных статически определимых ферм (плоских и пространственных) рассматривались в трудах R.G. Hutchinson, N.A. Fleck,

Mikhail N. Kirsanov, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor of the Department of Robotics, Mechatronics, Dynamics and Machine Strength of the Institute of Power Machinery and Mechanics; eLIBRARY SPIN-code: 8679-6853, ORCID iD: <https://orcid.org/0000-0002-8588-3871>, ResearcherID:H-9967-2013, IstinaresearcherID: 2939132.

F.W. Zok, R.M. Latture, M.R. Begley [13–15]. В работах [16; 17] предложены алгоритмы расчета динамики в общем случае статически неопределимых стержневых конструкций в аналитической форме с применением методов строительной механики. В настоящем исследовании ставится цель получить аналитическое решение задачи о низшей частоте собственных колебаний балочной фермы (рис. 1) в виде формулы, включающей в себя не только размеры и инертные свойства фермы, но и число панелей.

2. Методы

Энергетический метод. Масса фермы с треугольной решеткой и стойками моделируется одинаковыми грузами в узлах (шарнирах) нижнего пояса. Рассматриваются только вертикальные колебания грузов. Число степеней свободы системы грузов фермы с n панелями равно $N = 2n - 1$. Длина каждой панели $2a$, высота h . Рассматриваемая ферма относится к числу регулярных статически определимых конструкций, для которых доступны аналитические методы нахождения зависимостей усилий и деформаций от числа ячеек регулярности (здесь – панелей).

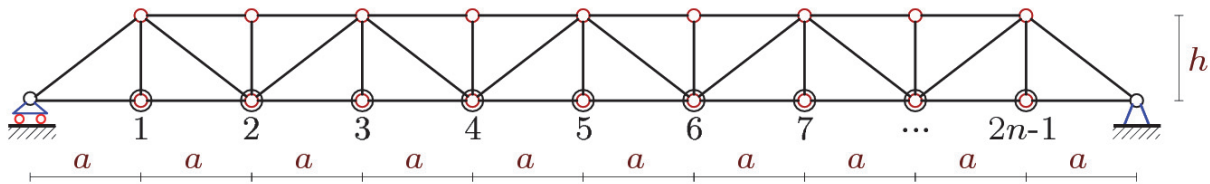


Рис. 1. Схема фермы, $n = 5$
[Figure 1. Scheme of the truss, $n = 5$]

Система дифференциальных уравнений динамики грузов имеет матричный вид:

$$M_N \ddot{Y} + D_N Y = 0, \quad (1)$$

где $Y = [y_1, y_2, \dots, y_N]^T$ – вектор вертикальных перемещений масс $1, \dots, N$; D_N – матрица жесткости; M_N – матрица инерции размером $N \times N$; \ddot{Y} – вектор ускорений.

В случае одинаковых масс грузов матрица инерции имеет диагональный вид $M_N = mI_N$. Элементы матрицы податливости B_N , являющейся обратной к матрице жесткости D_N , определяются по формуле Максвелла – Мора:

$$b_{i,j} = \sum_{\alpha=1}^{\mu-3} S_{\alpha}^{(i)} S_{\alpha}^{(j)} l_{\alpha} / (EF), \quad (2)$$

где EF – жесткость стержней; $S_{\alpha}^{(i)}$ – усилие в стержне α от действия единичной вертикальной силы в узле i ; l_{α} – длина стержня α ; $\mu = 8n$ – число стержней фермы вместе с тремя стержнями, моделирующими подвижную и неподвижную опоры.

Опорные стержни принимаются недеформируемыми, суммирование в (2) на эти стержни не распространяется. Усилия в стержнях фермы определяются одновременно с реакциями опор из решения системы уравнений равновесия всех узлов фермы. Матрица системы строится по значениям направляющих косинусов усилий, найденных по данным координат концов стержней. Решение ищется в символьной форме с использованием возможностей компьютерной математики Maple [18; 19].

Умножая (1) слева на B_N с учетом замены $\ddot{Y} = -\omega^2 Y$, соответствующей колебаниям вида

$$y_k = u_k \sin(\omega t + \varphi_0), \quad (3)$$

сводим задачу к проблеме собственных чисел матрицы B_N : $B_N Y = \lambda Y$, где $\lambda = 1 / (m\omega^2)$ – собственное число матрицы B_N ; ω – собственная частота колебаний.

Усилия $S_{\alpha}^{(i)}$ в стержнях фермы, входящие в элементы матрицы \mathbf{B}_N , определяются из решения системы уравнений узлов фермы, в которую входят также и реакции опор. Для этого в системе компьютерной математики Maple составляется матрица уравнений равновесия узлов, состоящая из направляющих косинусов усилий в стержнях.

Получить аналитические решения для фермы с произвольным числом панелей не удастся. Возможностей системы компьютерной математики Maple хватает только для анализа ферм с $n = 1, 2, \dots, 6$. Например, для $n = 2$ оператором Eigenvalues получены следующие характеристические числа:

$$\lambda_1 = (a^3 + c^3 + 2h^3) / (2h^2 EF),$$

$$\lambda_{2,3} = (2c^3 + h^3 + 6a^3 \pm (2c^6 + 16a^3c^3 + h^6 + 32a^6)^{(1/2)}) / (2h^2 EF).$$

Соответствующие частоты вычисляются по формуле $\omega = \sqrt{1/(m\lambda)}$. Эти частоты включены также во все спектры частот ферм рассматриваемого вида с четным числом панелей, что подтверждает свойство вложения спектров регулярных систем [20; 21].

Для того чтобы найти аналитическое выражение первой частоты для произвольного числа панелей в ферме, используем приближенный энергетический метод. Формула Рэлея, следующая из равенства максимальных значений кинетической и потенциальной энергий:

$$T_{\max} = \Pi_{\max}. \quad (4)$$

Кинетическая энергия масс в узлах нижнего пояса:

$$T_{\max} = \max \sum_{k=1}^N mv_k^2 / 2.$$

Согласно (3) вертикальная скорость массы k имеет вид

$$v_k = \dot{y}_k = \omega u_k \sin(\omega t + \varphi_0).$$

Отсюда, полагая $\max(\sin(\omega t + \varphi_0)) = 1$, получаем

$$T_{\max} = \omega^2 \sum_{k=1}^N mu_k^2 / 2, \quad (5)$$

где амплитуда вертикального смещения вычисляется по формуле Максвелла – Мора:

$$u_k = \sum_{\alpha=1}^{\mu-3} S_{\alpha}^{(P)} \tilde{S}_{\alpha}^{(k)} l_{\alpha} / (EF) = P \sum_{\alpha=1}^{\mu-3} \tilde{S}_{\alpha}^{(P)} \tilde{S}_{\alpha}^{(k)} l_{\alpha} / (EF) = P \tilde{u}_k.$$

Введены обозначения $S_{\alpha}^{(P)}$ – усилие в стержне $\alpha = 1, \dots, \mu$ от действия нагрузки P , распределенной по узлам нижнего пояса, и $\tilde{S}_{\alpha}^{(k)}$ – усилие в этом же стержне от единичной (безразмерной) нагрузки, приложенной к массе с номером k , $\tilde{S}_{\alpha}^{(P)} = S_{\alpha}^{(P)} / P$. Выбор такой нагрузки определяется близостью изогнутой оси нижнего пояса ферме колебаний системы грузов с первой частотой. Таким образом, (5) приобретает вид

$$T_{\max} = P^2 \omega^2 \sum_{k=1}^N m \tilde{u}_k^2 / 2, \quad (6)$$

где $\tilde{u}_k = u_k / P = \sum_{\alpha=1}^{\mu} \tilde{S}_{\alpha}^{(P)} \tilde{S}_{\alpha}^{(k)} l_{\alpha} / (EF)$ – амплитуда смещений массы с номером k под действием распределенной нагрузки (рис. 2), отнесенная к величине P .

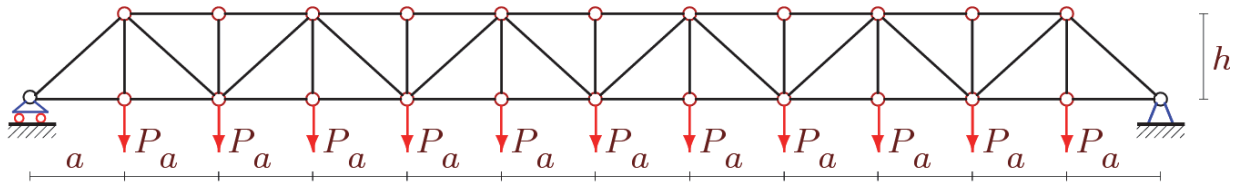


Рис. 2. Равномерно распределенная нагрузка, $n = 6$
 [Figure 2. Uniformly distributed load, $n = 6$]

Потенциальная энергия деформации стержней фермы распределенной нагрузкой имеет вид

$$\Pi_{\max} = \sum_{\alpha=1}^{\mu} S_{\alpha}^{(P)} \Delta l_{\alpha} / 2 = \sum_{\alpha=1}^{\mu} (S_{\alpha}^{(P)})^2 l_{\alpha} / (2EF).$$

В силу линейности задачи $S_{\alpha}^{(P)} = P \sum_{k=1}^N \tilde{S}_{\alpha}^{(k)}$. Отсюда

$$\Pi_{\max} = P^2 \sum_{\alpha=1}^{\mu} \tilde{S}_{\alpha}^{(P)} \sum_{k=1}^N \tilde{S}_{\alpha}^{(k)} l_{\alpha} / (2EF) = P^2 \sum_{k=1}^N \sum_{\alpha=1}^{\mu} \tilde{S}_{\alpha}^{(P)} \tilde{S}_{\alpha}^{(k)} l_{\alpha} / (2EF) = P^2 \sum_{k=1}^N \tilde{u}_k. \quad (7)$$

Из (4) – (6) следует верхняя оценка первой частоты колебаний фермы (формула Релея):

$$\omega_R^2 = \sum_{k=1}^N \tilde{u}_k / \sum_{k=1}^N m \tilde{u}_k^2. \quad (8)$$

Для получения требуемой зависимости частоты от числа панелей перемещения \tilde{u}_k должны быть получены так же, как функции n . План решения следующий: 1) расчет перемещения массы с номером 1 при различных значениях n с последующим определением общего члена последовательностей $\tilde{u}_1(n)$; 2) расчет перемещений масс 2, 3, 4, ...; 3) обобщение формул $\tilde{u}_1(n)$, $\tilde{u}_2(n)$, $\tilde{u}_3(n)$, ... по номеру массы и получение искомой зависимости $\tilde{u}_k(n)$.

Выведем формулу для смещения первой массы от действия распределенной нагрузки.

Расчет перемещения для ферм с различным числом панелей показывает, что вид решения не зависит от n :

$$\tilde{u}_k = \sum_{i=1}^3 C_i r_i^3 / (h^2 EF),$$

где для сокращения записи введены обозначения размеров фермы $r_1 = a$, $r_2 = c = \sqrt{a^2 + h^2}$, $r_3 = h$. Коэффициенты C_i , $i = 1, 2, 3$ зависят только от n . Для выявления закономерности в последовательности решений потребовалось рассчитать прогибы ферм с числом панелей $n = 1, \dots, 8$. Для значений коэффициента C_1 получена следующая последовательность: 5, 35/2, 42, 165/2, 143, 455/2, 340, 969/2. Для ее элементов оператор `rgf_findrecur` системы Maple возвращает рекуррентное уравнение $C_{n,1} = 4C_{n-1,1} - 6C_{n-2,1} + 4C_{n-3,1} - C_{n-4,1}$. Оператор `rsolve` с использованием начальных значений 5, 35/2, 42, 165/2 дает решение этого уравнения: $C_1 = n(4n^2 - 1) / 6$. Число рассчитываемых ферм $n = 1, \dots, 8$ определяется возможностью получить рекуррентное уравнение. Если длина последовательности недостаточно велика, оператор `rgf_findrecur` не дает решения. Аналогично при других значениях номеров масс k имеем следующие выражения:

$$k = 2, \quad C_1 = (n-1)(4n^2 + 4n - 3) / 3,$$

$$k = 3, \quad C_1 = (2n-3)(2n^2 + 3n - 4) / 2,$$

$$k = 4, \quad C_1 = 2(n-2)(4n^2 + 8n - 15) / 3,$$

$$k = 5, \quad C_1 = 5(2n-5)(2n^2 + 5n - 12) / 6,$$

...

Обобщение этих формул по k с применением операторов Maple дает окончательное выражение зависимости коэффициента C_1 от номера массы и числа панелей:

$$C_1(k) = k(k-2n)(k^2 - 2nk - 1 - 4n^2) / 12. \quad (9)$$

Также в два этапа, обобщением сначала по n , затем по k , получают и другие коэффициенты:

$$C_2(k) = -k(k-2n) / 2, \quad C_3(k) = (1 - (-1)^k) / 2. \quad (10)$$

Отдельно вычислим числитель и знаменатель в (8). Числитель представим в виде

$$\sum_{k=1}^N \tilde{u}_k = \sum_{\alpha=1}^3 g_{\alpha} r_{\alpha}^3 / (h^2 EF), \quad (11)$$

где $g_i = \sum_{k=1}^N C_i(k)$, $i = 1, 2, 3$.

Конечные суммы коэффициентов (9) – (10) дает оператор sum системы Maple:

$$g_1 = (16n^4 - 1) / 30, \quad g_2 = (4n^2 - 1) / 6, \quad g_3 = 1. \quad (12)$$

Знаменатель (8):

$$\sum_{k=1}^N m \tilde{u}_k^2 = m \sum_{\alpha=1}^3 \sum_{\beta=1}^3 f_{\alpha\beta} r_{\alpha}^3 r_{\beta}^3 / (h^4 E^2 F^2), \quad (13)$$

где обозначено $f_{\alpha\beta} = \sum_{k=1}^N C_{\alpha}(k) C_{\beta}(k)$, $\alpha, \beta = 1, 2, 3$.

Посредством суммирования оператором sum получаем следующие коэффициенты:

$$\begin{aligned} f_{11} &= n(4n^2 - 1)(496n^6 + 328n^4 + 103n^2 + 18) / 11340, \\ f_{22} &= n(16n^4 - 1) / 60, \quad f_{33} = n, \\ f_{12} &= n(4n^2 - 1)(68n^4 + 31n^2 + 6) / 1260, \\ f_{13} &= n(8n^4 + 5n^2 + 2) / 30, \quad f_{23} = n(2n^2 + 1) / 6. \end{aligned} \quad (14)$$

Таким образом, верхнюю оценку первой частоты фермы в зависимости от числа панелей можно получить по формуле

$$\omega_R^2 = \frac{h^2 EF \sum_{\alpha=1}^3 g_{\alpha} r_{\alpha}^3}{m \sum_{\alpha=1}^3 \sum_{\beta=1}^3 f_{\alpha\beta} r_{\alpha}^3 r_{\beta}^3} \quad (15)$$

с коэффициентами (12), (14).

Оценка Донкерлея. Нижнюю оценку первой частоты колебаний получим по формуле Донкерлея:

$$\omega_D^{-2} = \sum_{k=1}^N \omega_k^{-2}, \quad (16)$$

где ω_k – частота колебания одной массы m , расположенной в узле $k + 1$ нижнего пояса, принимая нумерацию узлов от левой опоры.

Уравнение (1) в случае колебаний одной массы будет скалярным:

$$m\ddot{y}_k + d_k y_k = 0,$$

где y_k – вертикальное перемещение массы; \ddot{y}_k – вектор ускорений; d_k – коэффициент жесткости (k – номер массы).

Частота колебаний груза $\omega_k = \sqrt{d_k / m}$. Коэффициент жесткости, обратный коэффициенту податливости, определяется по формуле Максвелла – Мора:

$$\delta_k = 1 / d_k = \sum_{\alpha=1}^{n-3} (\tilde{S}_\alpha^{(k)})^2 l_\alpha / (EF),$$

где $\tilde{S}_\alpha^{(k)}$ – усилия в стержне с номером α от действия единичной вертикальной силы, приложенной к узлу $k + 1$ (рис. 3).

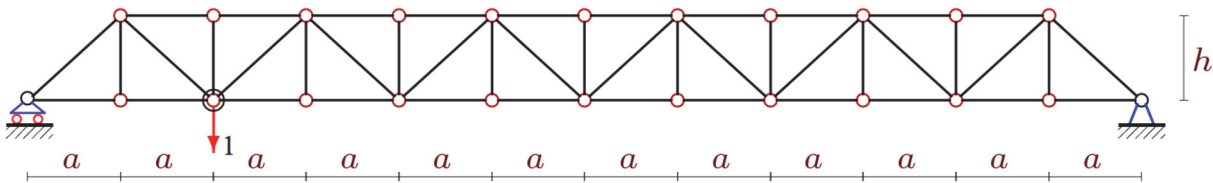


Рис. 3. К определению коэффициента жесткости, $n = 6, k = 2$

[Figure 3. On the determination of stiffness coefficient, $n = 6, k = 2$]

Методом индукции, последовательно рассчитывая смещение сначала массы 1 от действия нагрузки на этот узел при различных числах панелей $n = 1, 2, 3, \dots$ и обобщая эти решения на произвольное число n , затем рассчитывая смещение других масс, прикладывая всякий раз единичную силу к месту положения массы, получаем решение для произвольных значений n и k :

$$\delta_k = \sum_{i=1}^3 C_i r_i^3 / (h^2 EF),$$

где

$$C_1 = k(2k^2 - 4nk - 1)(k - 2n) / (6n),$$

$$C_2 = -k(k - 2n) / (2n),$$

$$C_3 = (1 - (-1)^k) / 2.$$

Из (16) суммированием этих выражений по k получаем нижнюю оценку для первой частоты по Донкерлею:

$$\omega_D^{-2} = m \sum_{k=1}^N \delta_k = m((32n^4 + 20n^2 - 7)a^3 + 15(4n^2 - 1)c^3 + 90h^3 n) / (90h^2 EF). \quad (17)$$

3. Результаты

Оценить точность полученных решений можно графически. Рассмотрим для примера ферму с n панелями высотой $h = 5$ м, длиной панели $a = 3$ м и грузами $m = 100$ кг в узлах нижнего пояса. Жесткость стальных стержней фермы примем $EF = 0,2 \cdot 10^8$ Н. Первая частота ω_R собственных колебаний фермы (15),

полученная по энергетическому методу Рэля, и оценка ω_D Донкерлея (17) с увеличением числа панелей сближаются (рис. 4). Численное же значение ω_1 собственной частоты системы с $N = 2n - 1$ степенями свободы, найденная как минимальная частота полного спектра частот, почти полностью совпадает с оценкой Рэля, кривые полностью сливаются. Для уточненной оценки степени полученного приближения введем относительные погрешности $\varepsilon_D = |\omega_D - \omega_1| / \omega_1$, $\varepsilon_R = |\omega_R - \omega_1| / \omega_1$.

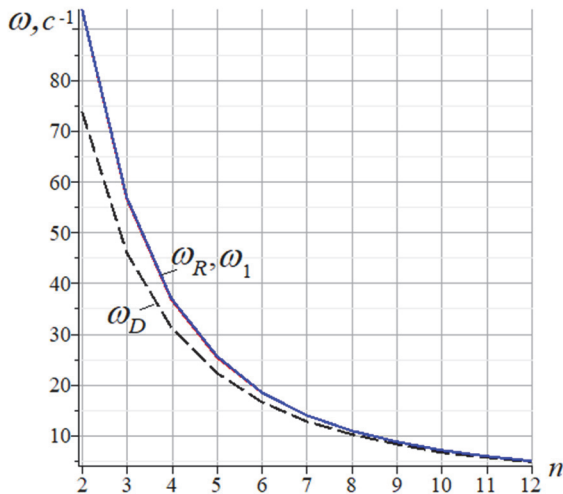


Рис. 4. Первая частота колебаний, полученная тремя способами в зависимости от числа панелей

[Figure 4. The first oscillation frequency obtained by three methods depending on the number of panels]

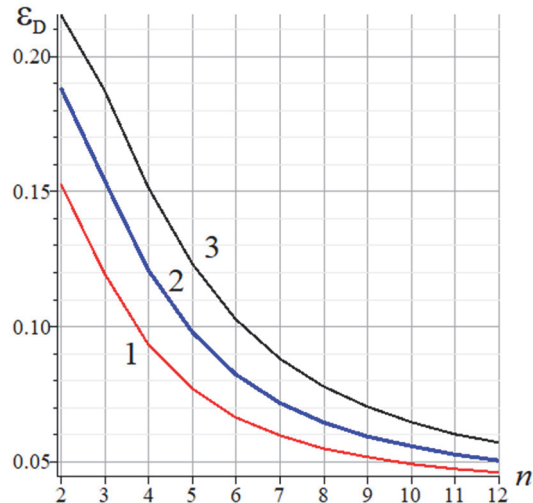


Рис. 5. Погрешность оценки Донкерлея в зависимости от числа панелей: 1 – $h = 3$ м; 2 – $h = 4$ м; 3 – $h = 5$ м

[Figure 5. Dunkerley's estimation error depending on the number of panels: 1 – $h = 3$ m; 2 – $h = 4$ m; 3 – $h = 5$ m]

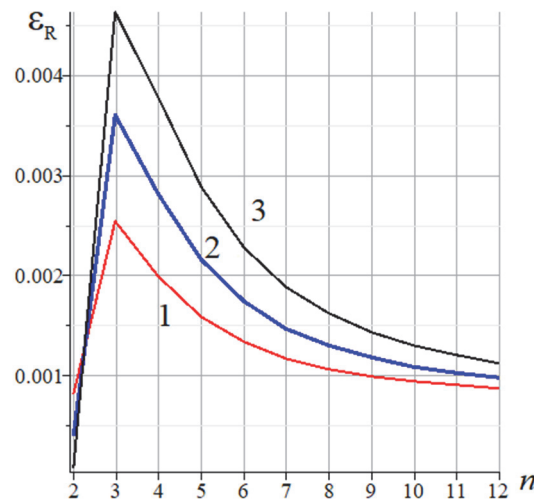


Рис. 6. Погрешность оценки Рэля в зависимости от числа панелей:

1 – $h = 3$ м; 2 – $h = 4$ м; 3 – $h = 5$ м

[Figure 6. Rayleigh's estimation error depending on the number of panels: 1 – $h = 3$ m; 2 – $h = 4$ m; 3 – $h = 5$ m]

В зависимости от числа панелей погрешность решения Донкерлея меняется от 4 % при большом числе панелей до 22 % при $n = 2$ (рис. 5). Графики построены для тех же параметров фермы, что и рис. 4. Для фермы с меньшей высотой степень приближения оценки Донкерлея больше.

Оценка Рэля, так же как и оценка Донкерлея, лучше при большем числе панелей (рис. 6), за исключением начального участка кривой, имеющей резкий всплеск при $n = 3$. Главная же особенность оценки, полученной по Рэлю, – весьма высокая ее точность. Точность порядка 0,2 % сопоставима с точ-

ностью входных данных: размеров, упругих характеристик и масс. На рис. 3 кривая ω_1 , найденная численно из анализа спектра системы со многими степенями свободы, практически сливается с кривой зависимости от числа панелей частоты по Рэлею ω_R .

4. Заключение

Для решения поставленной задачи в работе использована система компьютерной математики Maple. Выбор этой программы определялся только предпочтением автора. С не меньшим успехом здесь можно использовать и другие аналогичные программы, например Mathematica или Derive. В основном операторы Maple использовались для составления и решения в символьной форме уравнений равновесия узлов фермы. Определение же общих членов последовательностей можно выполнить в каком-либо онлайн-сервисе, например [22]. По сравнению с решениями задач о прогибе ферм с произвольным числом панелей, полученными методом индукции, формулы для оценок первой частоты оказались заметно сложнее. Однако они имеют замкнутую форму, не содержат сумм и рядов, которые надо вычислять, обрывая суммирование на некотором слагаемом, что вносит элемент субъективности в решение. Полученные формулы также не связаны с применением специальных функций и итеративными вычислениями. Выведенные формулы можно использовать при довольно большом числе панелей, то есть именно в тех случаях, где наиболее вероятно накопление ошибок вычислений. Кроме того, замкнутый аналитический вид решений позволяет применять все средства математического анализа для выявления их особенностей.

Список литературы

1. *Ufimtsev E.* Dynamic Calculation of Nonlinear Oscillations of Flat Trusses. Part 2. Examples of Calculations // *Procedia Engineering*. 2017. Vol. 206. Pp. 850–856. DOI: 10.1016/j.proeng.2017.10.561.
2. *Tejani G.G., Savsani V.J., Patel V.K., Mirjalili S.* Truss optimization with natural frequency bounds using improved symbiotic organisms search // *Knowledge-Based Systems*. 2018. Vol. 143. Pp. 162–178. DOI: 10.1016/j.knsys.2017.12.012.
3. *Ufimtsev E., Voronina M.* Research of Total Mechanical Energy of Steel Roof Truss during Structurally Nonlinear Oscillations // *Procedia Engineering*. 2016. Vol. 150. Pp. 1891–1897. DOI: 10.1016/j.proeng.2016.07.188
4. *Jalbi S., Bhattacharya S.* Closed form solution for the first natural frequency of offshore wind turbine jackets supported on multiple foundations incorporating soil-structure interaction // *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*. 2018. Vol. 113 (May). Pp. 593–613. <https://doi.org/10.1016/j.soildyn.2018.06.011>
5. *Kilikevicius A., Fursenko A., Jurevicius M., Kilikeviciene K., Bureika G.* Analysis of parameters of railway bridge vibration caused by moving rail vehicles // *Measurement and Control (United Kingdom)*. 2019. Vol. 52. No. 9–10. Pp. 1210–1219. DOI: 10.1177/0020294019836123.
6. *Алдушкин Р.В., Савин С.Ю.* Исследование работы треугольных ферм при статических и динамических воздействиях // *Строительство и реконструкция*. 2010. № 3 (29). С. 3–6. https://elibrary.ru/download/elibrary_15503961_71987283.pdf (дата обращения: 01.05.2020).
7. *Bolotina T.D.* The deflection of the flat arch truss with a triangular lattice depending on the number of panels // *Вестник научных конференций*. 2016. № 4–3 (8). С. 7–8.
8. *Тимофеева Т.А.* Формулы для расчета прогиба плоской решетчатой рамы с произвольным числом панелей // *Строительная механика и конструкции*. 2019. № 4 (23). С. 26–33.
9. *Бойко А.Ю., Ткачук Г.Н.* Вывод формул зависимости прогиба плоской шарнирно-стержневой рамы от числа панелей в системе Maple // *Строительная механика и конструкции*. 2019. № 4 (23). С. 15–25.
10. *Белянкин Н.А., Бойко А.Ю.* Формулы для прогиба балочной фермы с произвольным числом панелей при равномерном нагружении // *Строительная механика и конструкции*. 2019. № 1 (20). С. 21–29.
11. *Ткачук Г.Н.* Формула зависимости прогиба несимметрично нагруженной плоской фермы с усиленными раскосами от числа панелей // *Строительная механика и конструкции*. 2019. № 2 (21). С. 32–39.
12. *Тиньков Д.В.* Сравнительный анализ аналитических решений задачи о прогибе ферменных конструкций // *Инженерно-строительный журнал*. 2015. № 5 (57). С. 66–73.
13. *Hutchinson R.G., Fleck N.A.* Microarchitected cellular solids – the hunt for statically determinate periodic trusses // *ZAMM Z. Angew. Math. Mech.* 2005. Vol. 85. No. 9. Pp. 607–617.
14. *Hutchinson R.G., Fleck N.A.* The structural performance of the periodic truss // *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*. 2006. Vol. 54. No. 4. Pp. 756–782.
15. *Zok F.W., Lature R.M., Begley M.R.* Periodic truss structures // *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*. 2016. Vol. 96. Pp. 184–203.
16. *Рыбаков Л.С., Мишустин И.В.* Собственные колебания плоских регулярных упругих ферм ортогональной структуры // *Механика композиционных материалов и конструкций*. 1999. Т. 5. № 2. С. 3–16.

17. Мишустин И.В., Рыбаков Л.С. Колебания плоских упругих ферм ортогональной структуры // Известия Академии наук. Механика твердого тела. 2003. № 2. С. 168–184.
18. Бука-Вайваде К., Кирсанов М.Н., Сердюк Д.О. Calculation of deformations of a cantilever frame planar truss model with an arbitrary number of panels // Вестник МГСУ. 2020. Т. 15. Вып. 4. С. 510–517.
19. Kirsanov M. Analytical Solution of a Spacer Beam Truss Deflection with an Arbitrary Number of Panels // Construction of Unique Buildings and Structures. 2020. Vol. 88 Article No. 8802. DOI: 10.18720/CUBS.88.2.
20. Кирсанов М.Н., Тиньков Д.В. Аналитические выражения частот малых колебаний балочной фермы с произвольным числом панелей // Строительная механика и конструкции. 2019. Т. 1. № 20. С. 14–20.
21. Тиньков Д.В. Аналитические решения задач о собственных частотах колебаний регулярных стержневых систем: дис. ... к.т.н. М., 2019. 113 с.
22. WolframAlpha System. URL: <https://www.wolframalpha.com/examples/mathematics/> (accessed: 03.07.2020).

References

1. Ufimtcev E. Dynamic Calculation of Nonlinear Oscillations of Flat Trusses. Part 2. Examples of Calculations. *Procedia Engineering*. 2017;206:850–856. DOI: 10.1016/j.proeng.2017.10.561.
2. Tejani G.G., Savsani V.J., Patel V.K., Mirjalili S. Truss optimization with natural frequency bounds using improved symbiotic organisms search. *Knowledge-Based Systems*. 2018;143:162–178. DOI: 10.1016/j.knsys.2017.12.012.
3. Ufimtsev E., Voronina M. Research of Total Mechanical Energy of Steel Roof Truss during Structurally Nonlinear Oscillations. *Procedia Engineering*. 2016;150:1891–1897. DOI: 10.1016/j.proeng.2016.07.188.
4. Jalbi S., Bhattacharya S. Closed form solution for the first natural frequency of offshore wind turbine jackets supported on multiple foundations incorporating soil-structure interaction. *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*. 2018;113(May):593–613. <https://doi.org/10.1016/j.soildyn.2018.06.011>
5. Kilikevicius A., Fursenko A., Jurevicius M., Kilikeviciene K., Bureika G. Analysis of parameters of railway bridge vibration caused by moving rail vehicles. *Measurement and Control (United Kingdom)*. 2019;52(9–10):1210–1219. DOI: 10.1177/0020294019836123.
6. Aldushkin R.V., Savin S.Yu. Investigation of the operation of triangular farms with static and dynamic effects. *Construction and reconstruction*. 2010;3(29):3–6. (In Russ.) Available from: https://elibrary.ru/download/elibrary_15503961_71987283.pdf (accessed: 01.05.2020).
7. Bolotina T.D. The deflection of the flat arch truss with a triangular lattice depending on the number of panels. *Bulletin of Scientific Conferences*. 2016;(8)4–3:7–8.
8. Timofeeva T.A. Formulas for calculating the deflection of a flat lattice frame with an arbitrary number of panels. *Structural mechanics and structures*. 2019;4(23):26–33. (In Russ.)
9. Boyko A.Y., Tkachuk G.N. Derivation of the formulas for the deflection of a flat hinged-rod frame in the of symbol mathematics Maple system. *Structural mechanics and structures*. 2019;4(23):15–25. (In Russ.)
10. Belyankin N.A., Boyko A.Y. Formula for deflection of a girder with an arbitrary number of panels under the uniform load. *Structural mechanics and structures*. 2019;1(20):21–29. (In Russ.)
11. Tkachuk G.N. The formula for the dependence of the deflection of an asymmetrically loaded flat truss with reinforced braces on the number of panels. *Structural mechanics and structures*. 2019;2(21):32–39. (In Russ.)
12. Tinkov D.V. Comparative analysis of analytical solutions to the problem of deflection of truss structures. *Magazine of Civil Engineering*. 2015;5(57):66–73. (In Russ.)
13. Hutchinson R.G., Fleck N.A. Microarchitected cellular solids – the hunt for statically determinate periodic trusses. *ZAMM Z. Angew. Math. Mech.* 2005;9(85):607–617.
14. Hutchinson R.G., Fleck N.A. The structural performance of the periodic truss. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*. 2006;54(4):756–782.
15. Zok F.W., Lature R.M., Begley M.R. Periodic truss structures. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*. 2016;96:184–203.
16. Rybakov L.S., Mishustin I.V. Natural vibrations of flat regular elastic trusses of orthogonal structure. *Mechanics of composite materials and structures*. 1999;2(5):3–16. (In Russ.)
17. Mishustin I.V., Rybakov L.S. Oscillations of flat elastic trusses of orthogonal structure. *News of the Academy of Sciences. Solid Mechanics*. 2003;2:168–184. (In Russ.)
18. Buka-Vaivade K., Kirsanov M.N., Serdjuk D.O. Calculation of deformations of a cantilever frame planar truss model with an arbitrary number of panels. *Vestnik MGSU*. 2020;15(4):510–517.
19. Kirsanov M. Analytical Solution of a Spacer Beam Truss Deflection with an Arbitrary Number of Panels. *Construction of Unique Buildings and Structures*. 2020;88:8802.
20. Kirsanov M.N., Tinkov D.V. Analytical expressions of the frequencies of small vibrations of a beam truss with an arbitrary number of panels. *Structural Mechanics and Structures*. 2019;20(1):14–20. (In Russ.)
21. Tinkov D.V. Analytical solutions to problems on natural frequencies of oscillations of regular rod systems (Thesis of Candidate of Technical Sciences). Moscow; 2019. (In Russ.)
22. WolframAlpha System. Available from: <https://www.wolframalpha.com/examples/mathematics/> (accessed: 03.07.2020).