

ФОРМУЛЫ ДЛЯ РАСЧЕТА ДЕФОРМАЦИЙ МНОГОПРОЛЕТНОЙ ФЕРМЫ

М. Н. Кирсанов

Национальный исследовательский университет «МЭИ»

Россия, г. Москва

Д-р физ.-мат. наук, профессор кафедры робототехники, мехатроники, динамики и прочности машин,
тел.: +7(495)362-73-14, e-mail: c216@ya.ru

Прогибы многопролетной плоской статически определимой фермы с произвольным числом пролетов определяются в аналитической форме. Крайние опоры конструкции являются неподвижными шарнирами, средние – подвижными. Обнаруживается мгновенная изменяемость конструкции при четном числе пролетов. Для подтверждения этой особенности фермы находится соответствующая схема виртуальных скоростей узлов. Для определения прогиба используется формула Максвелла-Мора. Усилия в стержнях и реакции опор рассчитываются методом вырезания узлов в символьной форме с применением операторов системы символьной математики Maple.

Приводятся аналитические зависимости усилий в некоторых стержнях, наиболее опасных с точки зрения потери устойчивости или прочности. Дается диаграмма распределения усилий по стержням фермы. Серия решений задачи о прогибе для ферм с различным числом пролетов обобщается на произвольное число пролетов индуктивным методом.

Ключевые слова: ферма, прогиб, число пролетов, индукция, Maple, мгновенная изменяемость, формула Максвелла-Мора

Введение. На практике расчет прогибов ферм и усилий в стержнях выполняется численно в специализированных численных пакетах, основанных на методе конечных элементов [1]–[3]. Для статически определимых конструкций вполне реально найти аналитические решения. Однако, если эти решения не рассчитаны на широкий круг объектов, например, для однотипных ферм с различным числом панелей, то ценность таких решений невысока. Аналитические решения хорошо использовать для поиска каких-то оптимальных решений или для анализа предельных свойств конструкции, например при изменении заданных параметров конструкции, входящих в расчетную формулу. Метод индукции [4], применимый для регулярных ферм, позволяет ввести число панелей (или пролетов) в параметры расчетной формулы. Впервые проблемы существования и расчета регулярных систем рассмотрели Hutchinson R.G. и Fleck N.A. [5], [6] и Игнатьев В.А. [7]. Определение регулярной фермы в терминах дискретной математики как фермы, являющейся произведением графов двух или трех ферм, дали Kaveh A., Rahami H., Shojaei I. [8]. Схемы плоских регулярных ферм и аналитические решения задачи о прогибе приведены в справочнике [9]. Формулы для определения прогиба плоских ферм с произвольным числом панелей получены в работах [10-15]. Используемый в этих работах метод индукции применим для расчета пространственных ферм [16] и при нахождении аналитических оценок нижней границы первой собственной частоты свободных колебаний ферм методом Донкерлея [17-21].

Схема конструкции. Верхний пояс фермы с n пролетами горизонтальный. Нижние пояса пролетов имеют форму арок. Боковые опоры фермы — неподвижные шарниры, промежуточные — подвижные. Общее число стержней конструкции равно $n_s = 22n + 4$. В это число включены и $n + 3$ стержня, моделирующие опоры.

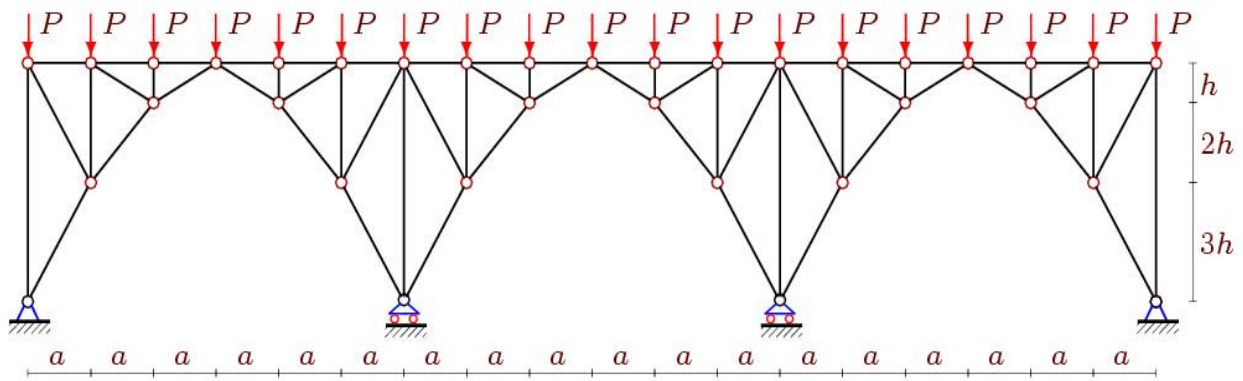


Рис. 1. Нагрузка, равномерно распределенная по верхнему поясу, $n = 3$

Расчет усилий в стержнях производится по программе [4], написанной на языке символьной математики Maple. В программу вводятся координаты узлов, списки концов стержней, нагрузки. Расчет может быть произведен как в численной форме, так и в символьной. Пробные расчеты показали, что для четного числа пролетов определитель матрицы системы линейных алгебраических уравнений равновесия узлов в проекции на оси координат вырождается. Наиболее четко это видно в символьных расчетах. Для подтверждения мгновенной изменяемости можно привести одну из возможных схем распределения скоростей узлов при $n = 2$ (рис. 2). Крайние части ферм, образующие неизменяемые кинематические диски, совершают мгновенные повороты по часовой стрелке вокруг шарниров A и B . Средняя часть вращается вокруг мгновенного центра скоростей Q против часовой стрелки. Подобная картина распределения виртуальных скоростей может быть построена и для ферм с любым другим четным числом пролетов. Избегая случаев кинематического вырождения, все расчеты будем производить для нечетного числа пролетов $n = 2k - 1, k = 1, 2, 3, \dots$

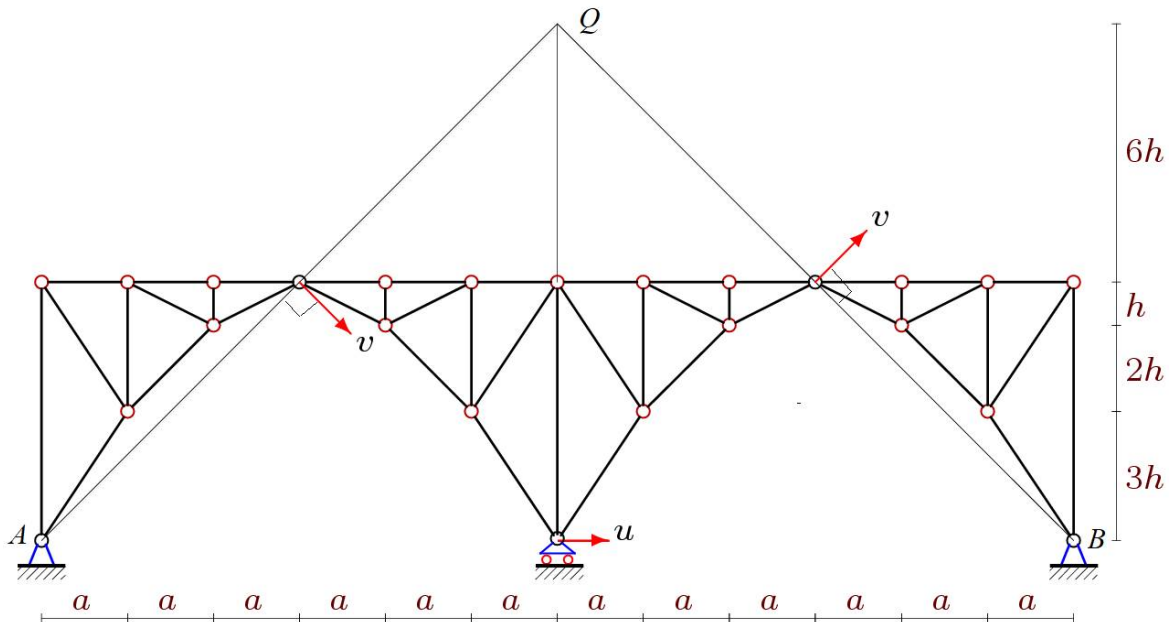


Рис. 2. Схема распределения возможных скоростей изменяемой фермы, $n = 2$

Усилия и реакции опор. Рассмотрим нагрузку, равномерно распределенную по узлам верхнего пояса. Усилия в стержнях фермы при $a = 3\text{ м}, h = 2\text{ м}, n = 3$ представлены на рисунке 3. Красным цветом обозначены растянутые стержни, синим цветом — сжатые

стержни. Картина распределения усилий периодическая. Величины усилий отнесены к силе P и округлены до двух значащих цифр. Почти все стержни при такой нагрузке сжаты. Исключения составляют боковые раскосы, растянутые небольшими силами. Наиболее сжатые стержни находятся внизу арочных сводов.

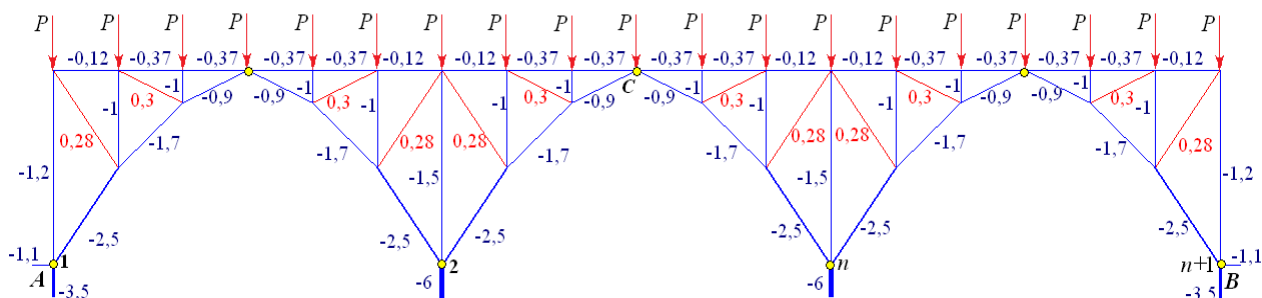


Рис. 3. Распределение усилий в стержнях фермы, $n = 3, P = 1$

Помимо численного решения в системе Maple можно получить формулы для расчета усилий в стержнях, обозначенных на рис. 4 для произвольного пролета.

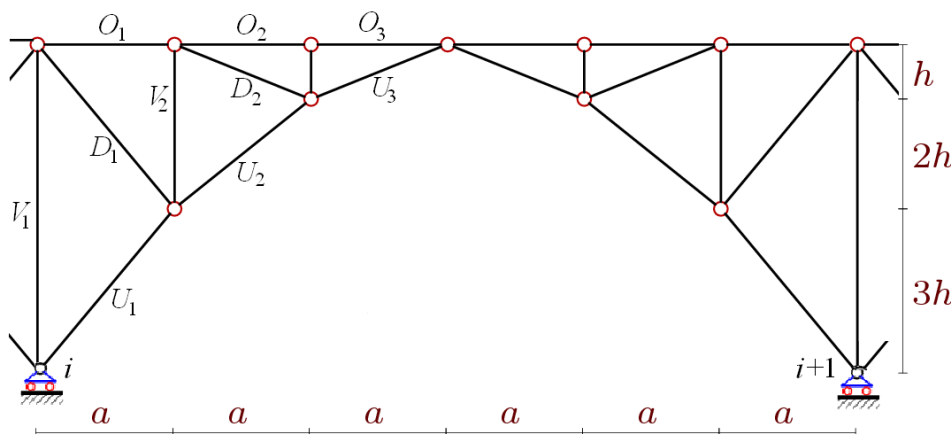


Рис. 4. Обозначение стержней i -го пролета, $n > i > 1$

Для равномерной нагрузки по верхнему поясу усилия не зависят от числа пролетов и одинаковы в соответствующих стержнях во всех пролетах:

$$O_1 = -Pa / (12h), O_2 = O_3 = -Pa / (4h), U_1 = -3bP / (4h), U_2 = -2bPa / (3h),$$

$$U_3 = -cP / (2h), D_1 = Pb / (12h), D_2 = Pc / (6h), V_1 = -3P / 2, V_2 = -7P / 6,$$

где $b = \sqrt{a^2 + 9h^2}$, $c = \sqrt{a^2 + h^2}$.

Реакции опор: $Y_A = Y_B = 7P / 2, Y_i = 6P, i = 2, \dots, n, X_A = X_B = 3aP / (4h)$.

Если на конструкцию действует сосредоточенная сила, приложенная к узлу C в среднем пролете, то усилия в пролетах будут разными, а в среднем пролете усилия зависят от числа пролетов. Результаты расчетов в серии ферм обобщаются методом индукции в следующие формулы:

$$O_1 = Pa(3(-1)^k + 4) / (12h), O_2 = O_3 = Pa((-1)^k + 2) / (4h), U_1 = -bP / (4h), U_2 = -bPa / (3h),$$

$$U_3 = -cP / (2h), D_1 = -Pb / (12h), D_2 = -Pc / (6h), V_1 = P / 2, V_2 = P / 6.$$

Усилия в стержнях верхнего пояса O и стойках V при таком нагружении оказываются растягивающими. Реакции опор:

$$Y_A = Y_B = -(-1)^k P / 2, Y_i = -(-1)^{i+k} P, i = 2, \dots, k-1, X_A = X_B = -(-1)^k aP / (4h).$$

Прогиб. Прогиб фермы, вычисленный по вертикальному смещению среднего шарнира C , рассчитывается по формуле Максвелла – Мора:

$$\Delta_k = \sum_{i=1}^{n_s-n-3} S_i^{(1)} S_i^{(P)} l_i / (EF). \quad (1)$$

где l_i — длина стержня, $S_i^{(P)}$ — усилие в стержне i от действия внешней нагрузки, $S_i^{(1)}$ — усилие в этом же стержне от единичной (безразмерной) вертикальной силы, приложенной к узлу C , EF — жесткость стержней. Усилия в опорных стержнях не входят в сумму. Вертикальные и горизонтальные опорные стержни считаются недеформируемыми. Расчет прогибов ферм с различным числом пролетов по формуле (1), в которой усилия в стержнях вычисляются методом вырезания узлов, дает следующие формулы:

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= -P(19a^3 - 26b^3 - 32c^3 - 32d^3 + 354h^3) / (72h^2 EF), \\ \Delta_2 &= -P(103a^3 - 26b^3 - 32c^3 - 32d^3 + 462h^3) / (72h^2 EF), \\ \Delta_3 &= P(65a^3 + 26b^3 + 32c^3 + 32d^3 - 354h^3) / (72h^2 EF), \\ \Delta_4 &= -P(187a^3 - 26b^3 - 32c^3 - 32d^3 + 462h^3) / (72h^2 EF), \dots \end{aligned}$$

Здесь $d = \sqrt{a^2 + 4h^2}$. Коэффициенты при b^3 , c^3 и d^3 при увеличении числа пролетов не меняются. Для остальных коэффициентов вычислим общие члены полученных последовательностей, используя операторы системы Maple. Итоговая формула зависимости прогиба от числа пролетов и размеров конструкции имеет вид:

$$\Delta_k = P(C_1 a^3 + C_2 b^3 + C_3 c^3 + C_4 d^3 + C_5 h^3) / (h^2 EF), \quad (2)$$

где

$$\begin{aligned} C_1 &= (42k(-1)^{k+1} + 21(-1)^k - 40) / 72, \quad C_2 = 13 / 36, \\ C_3 &= C_4 = 4 / 9, \quad C_5 = -(9(-1)^k + 68) / 12. \end{aligned} \quad (3)$$

Аналогично, в случае нагрузки по нижнему поясу (рис. 5) решение также имеет форму (2) с коэффициентами (3), кроме коэффициента $C_5 = -(9(-1)^k + 20) / 12$.

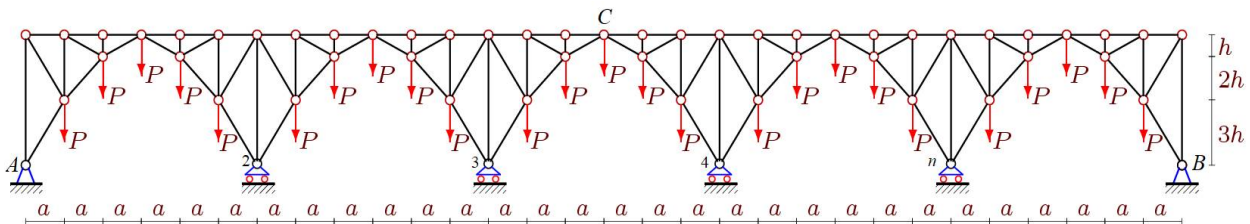


Рис. 5. Нагрузка по нижнему поясу, $n=5$

При действии на ферму сосредоточенной вертикальной силы в узле C получено решение (2) с коэффициентами:

$$\begin{aligned} C_1 &= (230k + 96(-1)^k - 115) / 72, \quad C_2 = 5(2k - 1) / 36, \\ C_3 &= 5(2k - 1) / 9, \quad C_4 = 2(2k - 1) / 9, \quad C_5 = (40k - 29) / 12. \end{aligned}$$

В случае распределенной нагрузки по верхнему поясу решение проиллюстрировано на рисунке 6 тремя ломаными кривыми, построенными для безразмерного прогиба: $\Delta' = \Delta_k EF / (P_{sum} L)$, где $P_{sum} = (6n + 1)P$, $L = 6na = 150m$.

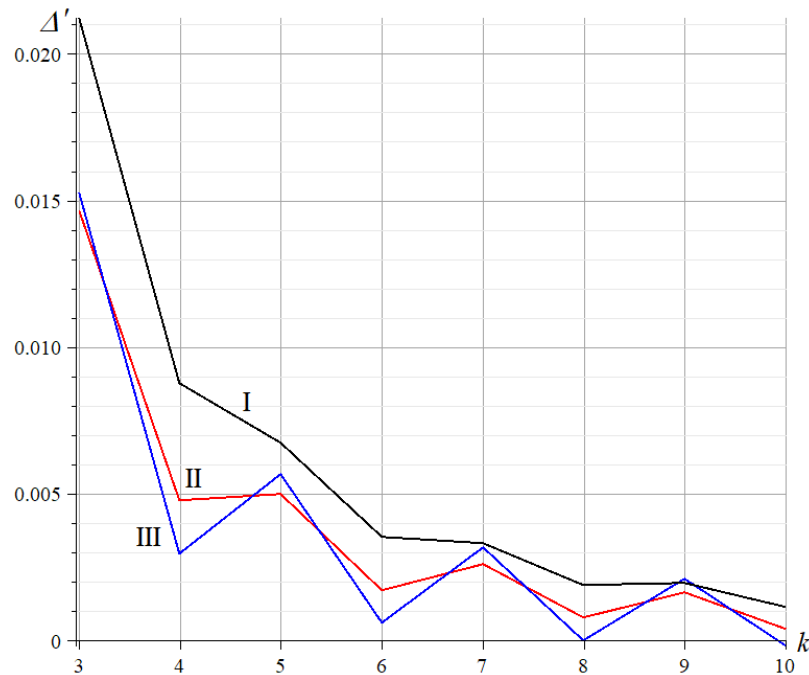


Рис. 6. Зависимости безразмерного прогиба фермы от числа пролетов. I — $h=2a$; II — $h=a$; III — $h=2a/3$

Зависимость получается с явно выраженными скачками. Чем меньше высота фермы, тем большего размаха достигают скачки прогиба при изменении числа пролетов. Кривая III при большом числе пролетов пересекает ось абсцисс. Начиная с $k = 10$ при $L = 6na = 150\text{ м}$, прогиб в середине пролета может быть даже отрицательным.

Заключение. Показано, что плоская модель статически определимой многопролетной фермы при четном числе пролетов приобретает мгновенную кинематическую изменяемость. Найдена кинематически непротиворечивая схема распределения соответствующих возможных скоростей узлов. Получено несложное аналитическое решение задачи о прогибе фермы при произвольном числе пролетов. Найденные формулы для усилий в характерных стержнях можно использовать для проверки численных решений и предварительной оценки проектируемого сооружения.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФ 22-21-00473.

Библиографический список

1. Vatin N., Havula J., Martikainen L., Sinelnikov A.S., Orlova A. V., Salamakhin S. V. Thin-walled cross-sections and their joints: Tests and FEM-modelling // *Advanced Materials Research*. 2014. (945–949). С. 1211–1215. DOI:10.4028/www.scientific.net/AMR.945-949.1211.
2. Macareno L.M., Agirrebeitia J., Angulo C., Avilés R. FEM subsystem replacement techniques for strength problems in variable geometry trusses // *Finite Elements in Analysis and Design*. 2008. № 6–7(44). С. 346–357. DOI:10.1016/j.finel.2007.12.003.
3. Han Q.H., Xu Y., Lu Y., Xu J., Zhao Q.H. Failure mechanism of steel arch trusses: Shaking table testing and FEM analysis // *Engineering Structures*. 2015. (82). С. 186–198. DOI:10.1016/J.ENGSTRUCT.2014.10.013.
4. Buka-Vaivade K., Kirsanov M.N., Serdjuks D.O. Calculation of deformations of a cantilever-frame planar truss model with an arbitrary number of panels // *Vestnik MGSU*. 2020. № 4(4). С. 510–517. DOI:10.22227/1997-0935.2020.4.510-517.
5. Hutchinson R.G., Fleck N.A. Microarchitected cellular solids - The hunt for statically determinate periodic trusses // *ZAMM Zeitschrift für Angewandte Mathematik und*

- Mechanik. 2005. № 9(85). С. 607–617. DOI:10.1002/zamm.200410208.
6. Hutchinson R.G., Fleck N.A. The structural performance of the periodic truss // Journal of the Mechanics and Physics of Solids. 2006. № 4(54). С. 756–782. DOI:10.1016/j.jmps.2005.10.008.
 7. Игнатъев В.А. Расчет регулярных стержневых систем – Саратов: Саратовское высшее военно-химическое военное училище, 1973. 433 с.
 8. Kaveh A., Rahami H., Shojaei I. Swift Analysis of Civil Engineering Structures Using Graph Theory Methods. 2020. 290. DOI: 10.1007 //URL: <http://link.springer.com/10.1007/978-3-030-45549-1> (date of application: 11.03. 2022).
 9. Buka-Vaivade K., Kirsanov M.N., Serdjuks D.O. Calculation of deformations of a cantilever-frame planar truss model with an arbitrary number of panels // Vestnik MGSU. 2020. № 4. С. 510–517. DOI:10.22227/1997-0935.2020.4.510-517.
 10. Комерзан Е.В., Свириденко О.В. Аналитический расчет прогиба плоской внешне статически неопределимой фермы с произвольным числом панелей // Строительная механика и конструкции. 2021. №2 (29). С. 29–37.
 11. Овсянникова В.М. Зависимость деформаций балочной фермы трапецевидной формы от числа панелей // Строительная механика и конструкции. 2020. №3 (26). С.13-20.
 12. Овсянникова В.М. Зависимость прогиба плоской внешне статически неопределимой фермы от числа панелей // Строительная механика и конструкции. 2020. №4 (27). С. 16-25.
 13. Комерзан Е.В., Лушнов Н.А., Осипова Т.С. Аналитический расчет прогиба плоской шпренгельной фермы с произвольным числом панелей // Строительная механика и конструкции. 2022. №2(33). С. 17-25. DOI 10.36622/VSTU.2022.33.2.002
 14. Dai Qiao. Analytical Dependence of Planar Truss Deformations on the Number of Panels; 2021; AlfaBuild; 17 Article No 1701. doi: 10.34910/ALF.17.1
 15. Kirsanov M. Deformations of the Rod Pyramid: An Analytical Solution; 2021; Construction of Unique Buildings and Structures; 95 Article No 9501. doi: 10.4123/CUBS.95.1
 16. Sviridenko, O.; Komerzan, E. The dependence of the natural oscillation frequency of the console truss on the number of panels; 2022; Construction of Unique Buildings and Structures; 101Article No 10101. doi: 10.4123/CUBS.101.1
 17. Petrenko V. The natural frequency of a two-span truss // AlfaBuild. 2021. 20 Article No 2001. doi: 10.34910/ALF.20.1
 18. Vorobev O. Bilateral analytical estimation of first frequency of a plane truss // Construction of Unique Buildings and Structures. 2020. Vol. 92. Article No 9204 doi: 10.18720/CUBS.92.4
 19. Воробьев О.В. О методах получения аналитического решения для проблемы собственных частот шарнирных конструкций // Строительная механика и конструкции. 2020. № 1 (24). С. 25-38.
 20. Петренко В.Ф. Оценка собственной частоты двухпролётной фермы с учетом жесткости опор // Строительная механика и конструкции. 2021. №4(31). С.16-25. doi 10.36622/VSTU.2021.31.4.002

References

1. Vatin N., Havula J., Martikainen L., Sinelnikov A.S., Orlova A. V., Salamakhin S. V. Thin-walled cross-sections and their joints: Tests and FEM-modelling. Advanced Materials Research. 2014. (945–949). С. 1211–1215. DOI:10.4028/www.scientific.net/AMR.945-949.1211.
2. Macareno L.M., Agirrebeitia J., Angulo C., Avilés R. FEM subsystem replacement

- techniques for strength problems in variable geometry trusses. *Finite Elements in Analysis and Design*. 2008. № 6–7(44). C. 346–357. DOI:10.1016/j.finel.2007.12.003.
3. Han Q.H., Xu Y., Lu Y., Xu J., Zhao Q.H. Failure mechanism of steel arch trusses: Shaking table testing and FEM analysis. *Engineering Structures*. 2015. (82). pp. 186–198. DOI:10.1016/J.ENGSTRUCT.2014.10.013.
 4. Buka-Vaivade K., Kirсанov M.N., Serdjuks D.O. Calculation of deformations of a cantilever-frame planar truss model with an arbitrary number of panels. *Vestnik MGSU*. 2020. № 4(4). pp. 510–517. DOI:10.22227/1997-0935.2020.4.510-517.
 5. Hutchinson R.G., Fleck N.A. Microarchitected cellular solids – The hunt for statically determinate periodic trusses. *ZAMM Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik*. 2005. № 9(85). pp. 607–617. DOI:10.1002/zamm.200410208.
 6. Hutchinson R.G., Fleck N.A. The structural performance of the periodic truss. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*. 2006. № 4(54). pp. 756–782. DOI:10.1016/j.jmps.2005.10.008.
 7. Ignatiev V.A. Raschet reguljarnykh sterzhnevnykh sistem [Calculation of regular rod systems]. Saratov: Saratov Higher Military Chemical Military School, 1973.
 8. Kaveh A., Rahami H., Shojaei I. Swift Analysis of Civil Engineering Structures Using Graph Theory Methods. 2020. 290. DOI: 10.1007 //URL: <http://link.springer.com/10.1007/978-3-030-45549-1> (date of application: 11.03. 2022).
 9. Buka-Vaivade K., Kirсанov M.N., Serdjuks D.O. Calculation of deformations of a cantilever-frame planar truss model with an arbitrary number of panels. *Vestnik MGSU*. 2020. № 4. pp. 510–517. DOI:10.22227/1997-0935.2020.4.510-517.
 10. Komerzan E.V., Sviridenko O.V. Analytical calculation of the deflection of a flat externally statically indeterminate truss with an arbitrary number of panels. *Stroitel'naya mekhanika i konstruktsii*. 2021. No. 2 (29). pp. 29–37.
 11. Ovsyannikova V.M. Dependence of deformations of a trapezoidal beam truss on the number of panels. *Stroitel'naya mekhanika i konstruktsii*. 2020. No. 3 (26). pp.13-20.
 12. Ovsyannikova V.M. Dependence of the deflection of a flat outwardly statically indeterminate truss on the number of panels. *Stroitel'naya mekhanika i konstruktsii*. 2020. No. 4 (27). pp. 16-25.
 13. Komerzan E.V., Lushnov N.A., Osipova T.S. Analytical calculation of the deflection of a flat truss with an arbitrary number of panels. *Stroitel'naya mekhanika i konstruktsii*. 2022. No. 2(33). pp. 17-25. DOI 10.36622/VSTU.2022.33.2.002
 14. Dai Qiao. Analytical Dependence of Planar Truss Deformations on the Number of Panels; 2021; AlfaBuild; 17 Article No 1701. doi: 10.34910/ALF.17.1
 15. Kirсанov M. Deformations of the Rod Pyramid: An Analytical Solution; 2021; Construction of Unique Buildings and Structures; 95 Article No 9501. doi: 10.4123/CUBS.95.1
 16. Sviridenko, O.; Komerzan, E. The dependence of the natural oscillation frequency of the console truss on the number of panels; 2022; Construction of Unique Buildings and Structures; 101Article No 10101. doi: 10.4123/CUBS.101.1
 17. Petrenko V. The natural frequency of a two-span truss. AlfaBuild. 2021. 20 Article No 2001. doi: 10.34910/ALF.20.1
 18. Vorobev O. Bilateral analytical estimation of first frequency of a plane truss. *Construction of Unique Buildings and Structures*. 2020. Vol. 92. Article No 9204 doi: 10.18720/CUBS.92.4
 19. Vorobyov O.V. On methods for obtaining an analytical solution for the problem of natural frequencies of hinged structures. *Stroitel'naya mekhanika i konstruktsii*. 2020. No. 1 (24). pp. 25-38.
 20. Petrenko V.F. Evaluation of the natural frequency of a two-span truss, taking into account

FORMULAS FOR CALCULATION OF DEFORMATIONS OF A MULTI-SPAN TRUSS

M. N. Kirsanov

National Research University «MPEI»
Moscow, Russia

Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor of the Department of Robotics, Mechanotronics, Dynamics and Strength of Machines, tel.: +7(495)362-73-14, e-mail: c216@ya.ru

Deflections of a multi-span planar statically determined truss with an arbitrary number of spans are determined in an analytical form. The extreme supports of the structure are fixed hinges, the middle ones are movable. An instantaneous variability of the structure is found for an even number of spans. To confirm this feature of the truss, a corresponding scheme of virtual node speeds is found. To determine the deflection, the Maxwell – Mohr formula is used. The forces in the bars and the reactions of the supports are calculated by cutting out the nodes in symbolic form using the operators of the Maple symbolic mathematics system.

Analytical dependences of forces in some rods, the most dangerous in terms of buckling or strength loss, are given. A diagram of the distribution of forces on the truss rods is given. A series of solutions to the deflection problem for trusses with different numbers of spans is generalized to an arbitrary number of spans by the inductive method.

Keywords: truss, deflection, number of spans, induction, Maple, instantaneous variability, Maxwell – Mohr formula