

ФОРМУЛЫ ДЛЯ ПРОГИБА ШАРНИРНО-СТЕРЖНЕВОЙ РАМЫ С ПРОИЗВОЛЬНЫМ ЧИСЛОМ ПАНЕЛЕЙ В РИГЕЛЕ И ОПОРАХ**Аннотация.**

Цель. Предлагается схема статически определимой рамы - фермы с искривленными опорными частями - фермами и прямолинейным ригелем. Решетка рамы треугольная. Рама имеет две опоры и нагружена по верхнему поясу равномерной нагрузкой. Выводится формула для горизонтального смещения подвижной опоры и прогиба в зависимости от числа панелей в ригеле и опорных фермах.

Метод. Для определения усилий составляется система уравнений равновесия всех узлов фермы в программе символьных вычислений Maple. Прогиб определяется с помощью интеграла Мора. Выделены три группы стержней с одинаковой жесткостью. Отдельные решения, полученные для рам с разным (последовательно увеличивающимся) числом панелей, обобщаются методом двойной индукции на произвольное число панелей. Для составления и решения рекуррентных уравнений, которым удовлетворяют коэффициенты искомой формулы, используются операторы системы Maple.

Результаты. Решение в случае распределенной нагрузки получается полиномиальным четвертого порядка и третьего порядка при нагружении рамы одной силой в середине пролета. Графики полученных зависимостей обнаруживают некоторые особенности решения: экстремальные точки, изменение знака кривизны зависимостей для разных значений параметров конструкции. Найдены асимптотические характеристики решения.

Ключевые слова: ферма-рама, прогиб, смещение, Maple, индукция, число панелей, асимптотика

Abstract

A scheme of a statically determinable frame-trusses with curved supporting parts- trusses and a straight crossbar is proposed. The frame lattice is triangular. The frame has two supports and is loaded on the upper belt with a uniform load. A formula is derived for the horizontal displacement of the movable support and deflection, depending on the number of panels in the crossbar and support trusses. To determine the forces in the rods, a system of equilibrium equations of all the truss nodes in the Maple symbolic computation program is compiled. The deflection is determined using the Mohr's integral. Three groups of rods with the same rigidity were identified. The individual solutions obtained for frames with different (successively increasing) number of panels are generalized by the method of double induction to an arbitrary number of panels. To compose and solve recurrent equations that are satisfied by the coefficients of the desired formula, the operators of the Maple system are used. The solution in the case of a distributed load is obtained by polynomial of fourth order and third order when the frame is loaded with one force in the middle of the span. The graphs of the obtained dependencies reveal some features of the solution: extreme points, a change in the sign of the curvature of dependencies for different values of the construction parameters. The asymptotic characteristics of the solution are found.

Keywords: frame truss, deflection, displacement, Maple, induction, number of panels, asymptotics

Постановка задачи. Расчет строительных конструкций обычно выполняется численно с учетом всех параметров задачи в специализированных или пользовательских программах, в которых, как правило, применяется метод конечных элементов [1-3] или сложные полуаналитические преобразования [4-6]. Решения в виде компактных формул, содержащих в качестве одного из параметров (кроме размеров и нагрузок) число панелей, встречаются значительно реже. Для оптимальной по жесткости или по весу высоты балочной фермы с параллельными поясами и произвольной решеткой известна полуэмпирическая формула Качурина [7]. Известны формулы для плоских ферм с произвольным числом панелей Игнатъева В.А. [8], в том числе решение задачи о консольной ферме с крестообразной решеткой под действием равномерно распределенной нагрузки. В справочнике [9] собрано более 70 решений задач о прогибе и смещении опор для плоских статически определимых регулярных ферм. В настоящей работе ставится задача методом индукции вывести формулы для прогиба и смещения опоры фермы с изогнутыми во вне опорными частями - фермами. Ферма регулярная с двумя параметрами, определяющими пропорции конструкции — числом панелей в

ригеля и числом панелей в боковых частях. Общие вопросы статически определимых регулярных ферм рассмотрены в [8,10-13].

Фермы подобной конструкции могут применяться в качестве покрытий промышленных сооружений, складов. Изогнутость боковых частей увеличивает объем здания. В конструкции туннелей эта схема может служить ребром жесткости для стен, а в корпусе корабля или самолета изогнутая рама может быть применена как легкий шпангоут.

Расчетная модель

Ферма состоит из ригеля высотой h с $2n$ треугольными панелями и изогнутых боковых опорных ферм по $2m$ панелей в каждой (рис. 1). В ферме содержится $4n+8m+3$ шарнирных узла и $N = 16m+8n+6$ стержня, включая три недеформируемые стержня, соответствующие подвижной и неподвижной опорам. Нагрузка распределена равномерно по узлам верхнего пояса ригеля.

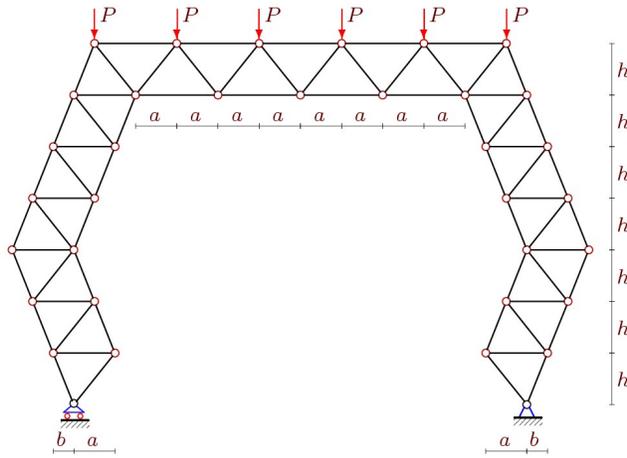


Рис. 1. Ферма при $n = 2$, $m = 3$. Равномерная нагрузка. Truss at $n = 2$, $m = 3$. Uniform load

Значения усилий в стержнях фермы определяются в аналитической форме из решения системы линейных уравнений: $M\bar{S} = \bar{B}$. Здесь \bar{S} — вектор неизвестных усилий длиной N , \bar{B} — вектор нагрузок. Матрица M составлена из направляющих косинусов усилий в стержнях, вычисленных по координатам концевых шарниров стержней. Порядок соединения стержней задается специальными списками по аналогии с заданием плоских графов в дискретной математике. Горизонтальные нагрузки, приложенные к узлу i , записываются в нечетные элементы B_{2i-1} , вертикальные — в четные B_{2i} .

Прогиб

Для определения прогиба конструкции (вертикальное смещение центрального узла нижнего пояса ригеля) используется формула Максвелла-Мора

$$\Delta = \sum_{k=1}^{N-3} \frac{S_k s_k l_k}{EF_k}, \quad (1)$$

где S_k — усилия в k -м стержне фермы от действия приложенной нагрузки, s_k — усилие в этом же стержне от действия единичной (безразмерной) вертикальной силы, приложенной к центральному узлу ригеля. Сумма составлена для всех стержней фермы кроме трех опорных. Вычисления при $b=a/2$ показывают, что для любых чисел панелей n и m формула для прогиба имеет один и тот же вид:

$$\Delta = P \frac{A_{n,m} a^3 \gamma_a + C_{n,m} c^3 \gamma_c + G_{n,m} g^3 \gamma_g}{144EFh^2}, \quad (2)$$

где $c = \sqrt{a^2 + h^2}$, $g = \sqrt{a^2 + 4h^2}$. Коэффициенты γ_a , γ_c и γ_g задают соотношения площадей сечений стержней разной длины. Стержни поясов ригеля и горизонтальные стержни в боковых опорных фермах имеют площадь сечения F/γ_a , раскосы длиной c и g имеют площадь сечения F/γ_c и F/γ_g соответственно. Для определения коэффициентов $A_{n,m}$, $C_{n,m}$ и $G_{n,m}$ в зависимости от числа панелей в ригеле n и в боковых опорных фермах m применим метод индукции в два этапа [14]. Для этого сначала фиксируется число m и производится расчет серии ферм с числом панелей в ригеле $n=1,2,3,\dots$. Соответствующие коэффициенты при a^3 образуют последовательность 4836, 28134, 96072, 246090,

527148, 999726, 1735824, 2818962, 4344180, 6418038. Длины этой последовательности достаточно для получения с помощью оператора `rgf_findrecur` системы Maple рекуррентного уравнения, которому удовлетворяют члены этой последовательности $A_{n,1} = 5A_{n-1,1} - 10A_{n-2,1} + 10A_{n-3,1} - 5A_{n-4,1} + A_{n-5,1}$. Решение этого уравнения дает оператор `rsolve`: $A_{n,1} = 480n^4 + 1440n^3 + 1680n^2 + 978n + 258$. Точно также определяются общие члены последовательностей при $m=2,3,\dots$:

$$\begin{aligned} A_{n,1} &= 480n^4 + 1440n^3 + 1680n^2 + 978n + 258, \\ A_{n,2} &= 480n^4 + 1440n^3 + 1680n^2 + 1014n + 294, \\ A_{n,3} &= 480n^4 + 1440n^3 + 1680n^2 + 1098n + 378, \dots \end{aligned}$$

На втором этапе необходимо обобщить коэффициенты при n и свободные члены в этих выражениях по числу панелей m . Используя операторы `rgf_findrecur` и `rsolve`, получим в итоге

$$A_{n,m} = 2(240n^4 + 720n^3 + 840n^2 + n(12m^2 - 18m + 135) + 12m^2 - 18m + 495). \quad (3)$$

Аналогично получаются и другие коэффициенты

$$\begin{aligned} C_{n,m} &= 16(9n^2 + (2m+9)n + 2m), \\ G_{n,m} &= 2(4m^3 - 18m^2 + 38m + 27)(n+1)/3. \end{aligned} \quad (4)$$

Зависимость (2) с коэффициентами (3, 4) дает решение поставленной задачи о прогибе рамы под действием распределенной нагрузки. Проверить это решение можно по численному решению, тестируя его при разных значениях n и m или повторяя этапы индукции в другом порядке (сначала по m , потом по n). Разработанный алгоритм легко перестраивается и для других видов нагружения. Наиболее простая нагрузка — сосредоточенная сила в середине пролета (рис. 2). Формула (1) упрощается:

$$\Delta = P \sum_{k=1}^{N-3} (s_k)^2 l_k / (EF_k), \text{ а коэффициенты в (2) принимают вид}$$

$$\begin{aligned} A_{n,m} &= 384n^3 + 864n^2 + 696n + 12m^2 - 18m + 243, \\ C_{n,m} &= 144n + 16m + 72, \\ G_{n,m} &= (4m^3 - 18m^2 + 38m + 27)/3. \end{aligned}$$

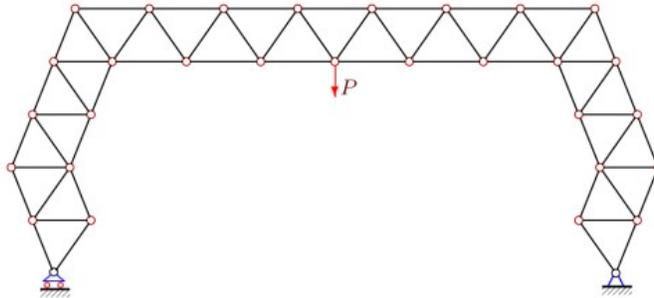


Рис. 2. Ферма при $n = 3$, $m = 2$ Truss at $n = 3$, $m = 2$.

Графики зависимости прогиба фермы под равномерной нагрузкой от числа панелей n в ригеле, показывают что результат существенно зависит от числа m панелей в боковых частях рамы. Обозначено $\Delta' = EF \Delta / (LP_{sum})$ — безразмерный прогиб, $a = L / (4n + 2)$, $P_{sum} = 2(n + 1)P$. Принято $L = 50m$, $H = mh = 20m$, $\gamma_a = \gamma_c = \gamma_g = 1$. Ход кривых подсказывает наличие асимптот. Средствами Maple находится предел, соответствующий тангенсу угла наклона асимптот

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \Delta' / n = H / (2mL).$$

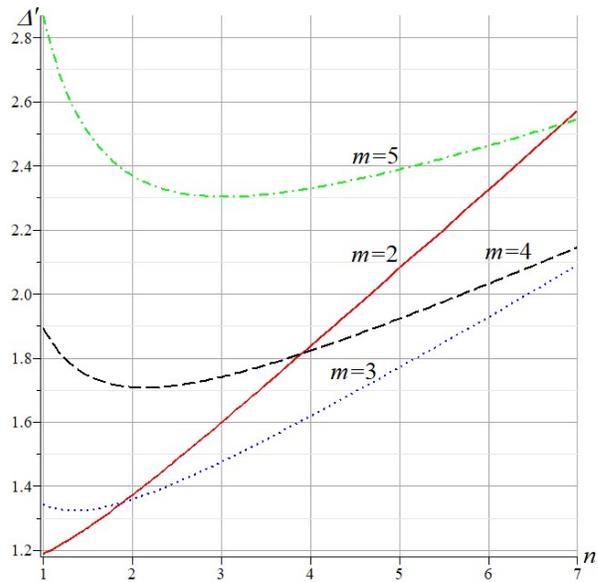


Рис. 3. Зависимость прогиба от числа панелей n . The dependence of the deflection on the number of panels n

Горизонтальное смещение опоры

Небольшое смещение подвижной опоры под действием вертикальной нагрузки наблюдается и в балочных фермах, однако в фермах арочного типа или в виде рам эта величина может быть значительной. Аналитическое выражение зависимости смещения от числа панелей можно найти, используя описанный алгоритм. В этом случае в формуле (1) в качестве единичной силы выбирается горизонтальная сила, приложенная к левому подвижному шарниру. Опуская выкладки, приведем решение полученное так же методом двойной индукции:

$$\delta = P(A_{n,m}a^3\gamma_a + C_{n,m}c^3\gamma_c + G_{n,m}g^3\gamma_g) / (18ahEF), \quad (5)$$

где для случая действия распределенной нагрузки коэффициенты имеют вид

$$A_{n,m} = 3(16(1+4m)n^3 + 36(1+4m)n^2 + (104m + 29 - 4m^2)n - 4m^2 + 24m + 9),$$

$$C_{n,m} = 48mn,$$

$$G_{n,m} = -2m(m^2 - 3m - 3)(n+1).$$

Здесь, например, коэффициент $A_{n,m}$ получен обобщением по m отдельных выражений

$$A_{n,1} = 240n^3 + 540n^2 + 387n + 87,$$

$$A_{n,2} = 432n^3 + 972n^2 + 663n + 123,$$

$$A_{n,3} = 624n^3 + 1404n^2 + 915n + 135,$$

...

Зависимость (5) смещения опоры от числа панелей в боковых фермах m существенно меняется при изменении n (рис. 4). Кривые относительного смещения $\delta' = \delta EF / (PL)$ построены при $L = 2(2n+1)a = 50m$, $H = hm = 20m$, $\gamma_a = \gamma_c = \gamma_g = 1$. В зависимости от n меняется знак кривизны кривых. При $n=2$ смещение опоры сначала увеличивается с увеличением m , затем уменьшается. Увеличение m в такой постановке не приводит к увеличению высоты рамы, т. к. принято $h = H / m$. При $n=4$ зависимость почти линейная. Асимптот эти кривые не имеют, однако можно получить асимптотику четвертого порядка:

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \delta' / m^4 = -L / (72H(2n+1)^2).$$

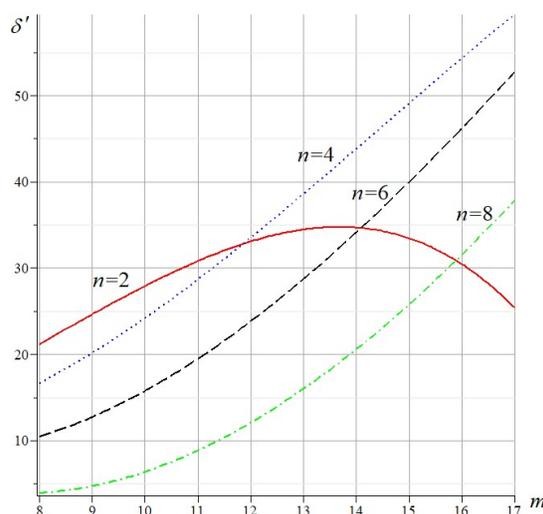


Рис. 4. Зависимость смещения подвижной опоры от числа панелей m . The dependence of the horizontal shift of left support on the number of panels m

Заключение

Предложена схема статически определимой рамы, выведены формулы зависимостей прогиба и смещения опоры от размеров, нагрузки и двух независимых натуральных параметров n и m , определяющих форму конструкции. Ценность формулы для расчета конструкции определяется в основном ее универсальностью. Чем больше независимых параметров входит в решение, тем для большего класса задач она может быть применима. Здесь в решение задачи о прогибе входят два параметра формы (n , m), два размера (a , h), три коэффициента распределения жесткости и величина нагрузки. Наиболее важными параметрами, которые труднее всего учесть, являются параметры n и m . В рассмотренном решении эти параметры удалось включить в формулу методом двойной индукции.

Существенным упрощением постановки задачи явился выбор соотношения размеров $b=a/2$. Расчет можно повторить и для произвольной величины b , но при этом решение заметно усложняется по форме, становится весьма громоздким и частично теряет свои преимущества по сравнению с численным методом. Число констант, зависящих от параметров n и m в числителе выражения (2) увеличивается с трех до двенадцати.

В приведенное решение не вошли формулы для усилий в отдельных стержнях. Это связано с тем, что получить формулы зависимостей этих величин от параметров n и m в такой ферме не представляет никакой сложности. Почти для всех усилий есть сечения Риттера, и решения получаются просто, зависимость усилий от числа панелей можно найти без привлечения метода индукции.

Обзор работ, использующих метод индукции совместно с операторами системы Maple при выводе формул для прогиба плоских ферм, содержится в [15]. Примененный алгоритм может быть использован в задачах оптимизации ферм [16-20].

Литература

1. Li S., Jiang W., Tu S. T. Life prediction model of creep-rupture and creep-buckling of a pyramidal lattice truss panel structure by analytical and finite element study // International Journal of Mechanical Sciences. 2018. Vol. 141. pp. 502-511. <https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2018.04.026>
2. Yuan P. et al. Pretension design of cable-network antennas considering the deformation of the supporting truss: A double-loop iterative approach // Engineering Structures. 2019. Vol. 186. pp. 399-409. <https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2019.02.007>
3. Аганов В. П., Айдемиров К. Р. Расчет ферм методом конечных элементов с учетом геометрической нелинейности // Промышленное и гражданское строительство. 2016. № 11. С. 4-7.
4. Goloskokov D.P., Matrosov A.V. Approximate analytical approach in analyzing an orthotropic rectangular plate with a crack // Materials Physics and Mechanics. 2018. Т. 36. № 1. С. 137-141.
5. Goloskokov D.P., Matrosov A.V. A superposition method in the analysis of an isotropic rectangle // Applied Mathematical Sciences. 2016. Т. 10. № 54. С. 2647-2660.
6. Rybakov L.S. Linear theory of an elastic prismatic framework // Mechanics of Solids. 2001. Т. 36. № 4. С. 83.

7. Стрелецкий Н. С., Беленя Е.И., Ведеников Г.С., Лессиг Е.Н., Муханов К. К. Металлические конструкции. Специальный курс М.: Издательство литературы по строительству. 1965. 368 с.
8. Игнатьев В.А. Расчет регулярных стержневых систем. Саратов: Саратовское высшее военно-химическое военное училище, 1973.
9. Kirsanov M.N. Planar Trusses: Schemes and Formulas. Cambridge Scholars Publishing. 2019. Lady Stephenson Library, Newcastle upon Tyne, NE6 2PA, UK. ISBN (13): 978-1-5275-3531-2
10. Guest S.D., Hutchinson J.W. On the determinacy of repetitive structures// J. Mech. Phys. Solids. 2003. 51, Pp. 383–391.
11. Hutchinson R. G., Fleck N.A. Microarchitected cellular solids – the hunt for statically determinate periodic trusses // ZAMM Z. Angew. Math. Mech. 2005. 85, No. 9, Pp. 607–617.
12. Hutchinson R.G., Fleck N.A. The structural performance of the periodic truss // Journal of the Mechanics and Physics of Solids. 2006. Vol. 54. No. 4. Pp. 756-782.
13. Zok F. W., Latture R. M., Begley M. R. Periodic truss structures // Journal of the Mechanics and Physics of Solids. 2016. vol. 96. Pp. 184–203. <https://doi.org/10.1016/j.jmps.2016.07.007>
14. Kirsanov M. N. Calculation of G-shaped Farming of Road Signs and Equipment // Russian Journal of Building. Construction and Architecture. Issue № 2 (42), 2019. pp. 62-71.
15. Осадченко Н.В. Аналитические решения задач о прогибе плоских ферм арочного типа // Строительная механика и конструкции. 2018. №. 1. С. 12-33.
16. Pholdee N., Bureerat S. Comparative performance of meta-heuristic algorithms for mass minimisation of trusses with dynamic constraints // Advances in Engineering Software Vol. 75. 2014. Pp. 1–13.
17. Kaveh A, Shahrouzi M. Farshi B., Alinia-ziazi A. Sizing optimization of truss structures by method of centers and force formulation // International Journal of Solids and Structures Vol. 47. 2010. pp. 2508–2524.
18. Toklu Y.C., Bekdas G., Temur R. Analysis of trusses by total potential optimization method coupled with harmony search// Structural Engineering and Mechanics. 2013. Vol. 45. No 2. pp. 183-199.
19. Heyman J. Design of a simple steel truss // Proceedings of the Institution of Civil Engineers: Structures and Buildings. 2010. V. 163. No. 1. pp. 53-56.
20. Richardson J.N., Coelho R.F., Adriaenssens S. Robust topology optimization of truss structures with random loading and material properties: A multiobjective perspective // Computers & Structures. Vol. 154. No. 1. 2015. pp. 41-47.

Literatura

1. Li S., Jiang W., Tu S. T. Life prediction model. International Journal of Mechanical Sciences. 2018. Vol. 141. Pp. 502-511. <https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2018.04.026>
2. Yuan P. et al. Pretension design of the supporting network: A double-loop iterative approach. Engineering Structures. 2019. Vol. 186. pp. 399-409. <https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2019.02.007>
3. Agapov V.P., Aydemirov K.R. Calculation of trusses by the finite element method taking into account geometric nonlinearity. Industrial and Civil Construction. 2016. No. 11. pp. 4-7.
4. Goloskokov D.P., Matrosov A.V. Approximate analytical approach in an orthotropic rectangular plate. Materials Physics and Mechanics. 2018. T. 36. № 1. pp. 137-141.
5. Goloskokov D.P., Matrosov A.V. A superposition method of an isotropic rectangle. Applied Mathematical Sciences. 2016. Vol. 10. No. 54. pp. 2647-2660.
6. Rybakov L.S. Linear theory of an elastic prismatic framework. Mechanics of Solids. 2001. Vol. 36. № 4. Pp. 83.
7. Streletsky N. S., Belenya EI, Vedenikov GS, Lessig E.N., Mukhanov K.K. Metal Constructions. Special course M. : Publishing house of literature on construction. 1965. 368 p.
8. Ignatiev V.A. Calculation of regular core systems. Saratov: Saratov Higher Military Chemical Military School, 1973.
9. Kirsanov M.N. Planar Trusses: Schemes and Formulas. Cambridge Scholars Publishing. 2019. Lady Stephenson Library, Newcastle upon Tyne, NE6 2PA, UK ISBN (13): 978-1-5275-3531-2
10. Guest S.D., Hutchinson J.W. On the determinacy of repetitive structures. J. Mech. Phys. Solids. 2003. 51, pp. 383–391.
11. Hutchinson R. G., Fleck N.A. Microarchitected cellular solids – the hunt for statically determinate periodic trusses. ZAMM Z. Angew. Math. Mech. 2005. 85, No. 9, Pp. 607–617.
12. Hutchinson R.G., Fleck N.A. The structural performance of the periodic truss. Journal of the Mechanics and Physics of Solids. 2006. Vol. 54. No. 4. pp. 756-782.
13. Zok F. W., Latture R. M., Begley M. R. Periodic truss structures. Journal of the Mechanics and Physics of Solids. 2016. vol. 96. pp. 184–203. <https://doi.org/10.1016/j.jmps.2016.07.007>

14. *Kirsanov M. N.* Calculation of G-shaped Farming of Road Signs and Equipment. Russian Journal of Building, Construction and Architecture. Issue № 2 (42), 2019. pp. 62-71.
15. *Osadchenko N.V.* Analytical solutions of problems of deflection of flat trusses of arch type. Stroitel'naya mekhanika i konstruktzii. 2018. No. 1. pp. 12-33.
16. *Pholdee N., Bureerat S.* Comparative performance of meta-heuristic algorithms for mass minimisation of trusses with dynamic constraints. Advances in Engineering Software Vol. 75. 2014. pp. 1–13.
17. *Kaveh A, Shahrouzi M. Farshi B., Alinia-ziazi A.* Sizing optimization of truss structures by method of centers and force formulation. International Journal of Solids and Structures Vol. 47. 2010. pp. 2508–2524.
18. *Toklu Y.C., Bekdas G., Temur R.* Analysis of trusses by total potential optimization method coupled with harmony search. Structural Engineering and Mechanics. 2013. Vol. 45. No 2. pp. 183-199.
19. *Heyman J.* Design of a simple steel truss. Proceedings of the Institution of Civil Engineers: Structures and Buildings. 2010. Vol. 163. No. 1. pp. 53-56.
20. *Richardson J.N., Coelho R.F., Adriaenssens S.* Robust topology optimization of truss structures with random loading and material properties: A multiobjective perspective . Computers & Structures. Vol. 154. No. 1. 2015. Pp. 41-47.