

М. Н. КИРСАНОВ, д-р физ.-мат. наук, проф.
(НИУ МЭИ, г. Москва; e-mail: mpei2004@Yandex.ru)

СХЕМА И ФОРМУЛЫ ДЛЯ РАСЧЕТА ПРОГИБА ФЕРМЫ ТРЕХПРОЛЕТНОГО КОНСОЛЬНОГО МОСТА С ПРОИЗВОЛЬНЫМ ЧИСЛОМ ПАНЕЛЕЙ

Цель. Ставится задача получения точного решения задачи о прогибе плоской модели фермы составного консольного моста с произвольным числом панелей. Ферма симметричная, статически определимая с двумя консолями и балочной фермой, соединяющей консоли. Из четырех опор конструкции одна опора моделируется неподвижным шарниром. Решетка фермы треугольная, нагрузка прикладывается равномерно по узлам нижнего пояса или в середине пролета. Выводится также зависимость горизонтального смещения подвижной опоры от нагрузки и числа панелей в конструкции.

Метод. Усилия в стержнях фермы определяются из общей системы уравнений равновесия всех узлов фермы с использованием программы символьных преобразований Maple. Для нахождения прогиба и смещения опоры применяется формула Мора. Отдельные решения, полученные для ферм с последовательно увеличивающимся числом панелей, методом двойной индукции обобщаются на произвольное число панелей в два этапа — сначала по числу панелей в балочной ферме, затем — по числу панелей в консолях. Коэффициенты искомой формулы определяются из решения рекуррентных уравнений, составленных с помощью операторов системы Maple.

Результаты. Получены формулы для прогиба и смещения в виде полиномов третьего и четвертого порядка. В случае ограничения на суммарное число панелей и длину пролета на графиках решения обнаружены экстремальные точки, позволяющие оптимизировать соотношение размеров частей конструкции для увеличения ее жесткости. Найдены некоторые асимптотические по числу панелей свойства решения.

Ключевые слова: ферма, консольный мост, прогиб, Maple, индукция, число панелей, асимптотика

Постановка задачи. Консольные схемы ферм мостов часто используются в инженерной практике [1, 2]. Характерной чертой консольных схем являются большие пролеты, в которые всегда входит средняя ферма, как правило, небольшая, шарнирно соединенная с консольными частями (рис. 1). Усилия в стержнях таких составных ферм заметно меньше усилий в сплошной ферме такого же пролета. Несмотря на это жесткость консольных ферм достаточна для организации железнодорожного движения. Мост через залив Ферг-оф-Форт — железнодорожный. Анализ зависимости жесткости консольных схем от параметров конструкции составляет цель работы.



Рис. 1. Мост через залив Ферг-оф-Форт, Шотландия



Рис. 2. Мост Стори-бридж, Брисбен, Австралия

Ставится задача построить математическую модель консольного моста и получить аналитическую зависимость прогиба от размеров моста, нагрузок и числа панелей. Исследование прогиба ферм выполняется, как правило, численно или экспериментально [1, 2], аналитические решения редки [3-6]. Большая часть аналитических решений получена для регулярных систем [7-9]. Аналогичные задачи методом индукции для плоских ферм с применением системы компьютерной математики Maple решались в [10-14], для пространственных статически определимых — в [15-18].

Расчетная модель

Ферма консольного моста состоит из трех шарнирно соединенных ферм (рис. 3). Длина среднего основного пролета $L = 2a(n + m)$, боковых — ma , $m > 1$. Крайние консольные части имеют в середине двукратное повышение панели с опорой в нижнем поясе. Это отличительная часть такого типа конструкций. Консоли «балансируют» на опорах так, чтобы удержать среднюю часть моста — отдельную балочную ферму с $2n$ панелями высотой h и длиной a каждая. В английской части Википедии применительно к мосту через залив Ферт-оф-Форт этот эффект представлен остроумной картинкой (рис. 4).

Ферма состоит из $4n + 8m - 10$ стержней длиной a , $2n + 4m - 3$ стоек высотой h и $2n + 2m + 4$ раскосов длиной $c = \sqrt{a^2 + h^2}$. Стойки над опорами имеют длину $2h$. Общее число стержней $\mu = 16m + 8n - 4$. При определении деформации пролета опоры моделируются недеформированными стержнями. Расчетная нагрузка распределена равномерно по узлам нижнего пояса.

Стержни конструкции работают в упругой стадии. Ферма статически определимая. Усилия во всех стержнях фермы определяются в аналитической форме одновременно с реакциями опор из решения общей для всех узлов системы линейных уравнений: $M\bar{S} = \bar{B}$, где \bar{S} — вектор неизвестных усилий. Число длиной N , \bar{B} — вектор нагрузок. Матрица M составлена из проекций единичных усилий в стержнях, вычисляемых по координатам шарниров на концах стержней. Данные о номерах концов и соответствующих номерах стержней собираются в специальные списки подобно тому, как в дискретной математике задается граф. Нагрузки по оси x (горизонтальные), приложенные к узлу i , записываются в нечетные элементы B_{2i-1} , вертикальные — в четные B_{2i} .

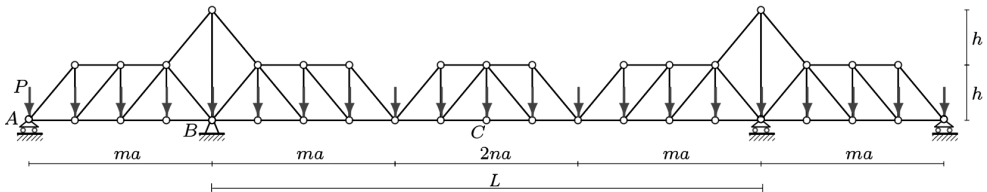


Рис. 3. Схема фермы под равномерной нагрузкой при $m=4$, $n=2$

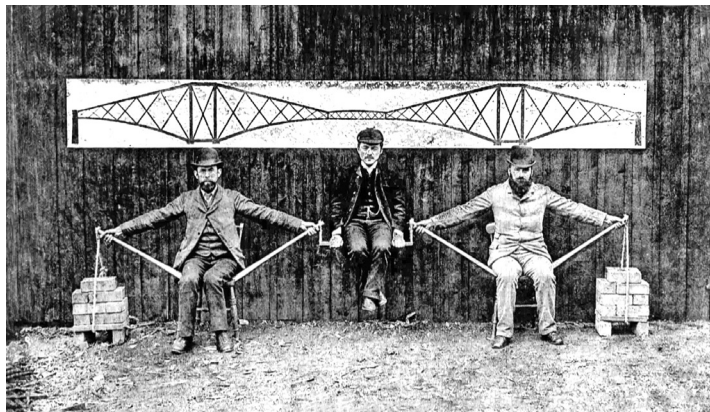


Рис. 4. Простая иллюстрация принципа работы консольного моста [19]

Прогиб

Величина прогиба Δ конструкции (вертикальное смещение центрального узла С) определяется по формуле Максвелла–Мора, в которой оставлены только продольные усилия, а суммирование ведется по всем деформируемым стержням фермы, кроме пяти опорных.

$$\Delta = \sum_{k=1}^{\mu-3} \frac{S_k s_k l_k}{EF} . \tag{1}$$

Здесь используются стандартные обозначения: S_k – усилия в k -м стержне фермы от действия приложенной нагрузки, s_k – усилие в этом же стержне от действия единичной (безразмерной) вертикальной силы, приложенной к узлу С в середине пролета, где определяется прогиб. Продольная жесткость всех стержней принята одинаковой EF . Оказывается, что для любого числа панелей n и m вид итоговой формулы для прогиба не меняется:

$$\Delta = P \frac{C_1 a^3 + C_2 c^3 + C_3 h^3}{EFh^2} . \tag{2}$$

От числа панелей зависят только коэффициенты $C_j = C_j(n, m)$, $j=1,2,3$. Нахождение этих функций составляет основную трудность задачи. Применим метод двойной индукции для вычисления зависимостей коэффициентов от числа панелей n и m . Задача решается в два этапа. Сначала фиксируется, например, число $m=2$ панелей в боковых консольных фермах и рассчитываются фермы с последовательно увеличивающимся числом панелей в средней ферме при $n=1, 2, 3, \dots$. Коэффициенты при a^3 образуют последовательность 13/2, 17,97/2, 126, 569/2... Минимальная длина последовательности, необходимая оператору `rgf_findrecur` системы Maple для выявления рекуррентного уравнения, которому удовлетворяют члены последовательности, подбирается экспериментально. Здесь длина равна 10. Получаем уравнение пятого порядка $C_{1,m} = 5C_{1,m-1} - 10C_{1,m-2} - 10C_{1,m-3} - 5C_{1,m-4} + C_{1,m-5}$. Решение этого уравнения можно найти непосредственно, решая его характеристическое уравнение, либо с помощью оператора `rsolve`:

$$C_{1,m,2} = (24 + 48n + n^2 + 5n^4) / 12.$$

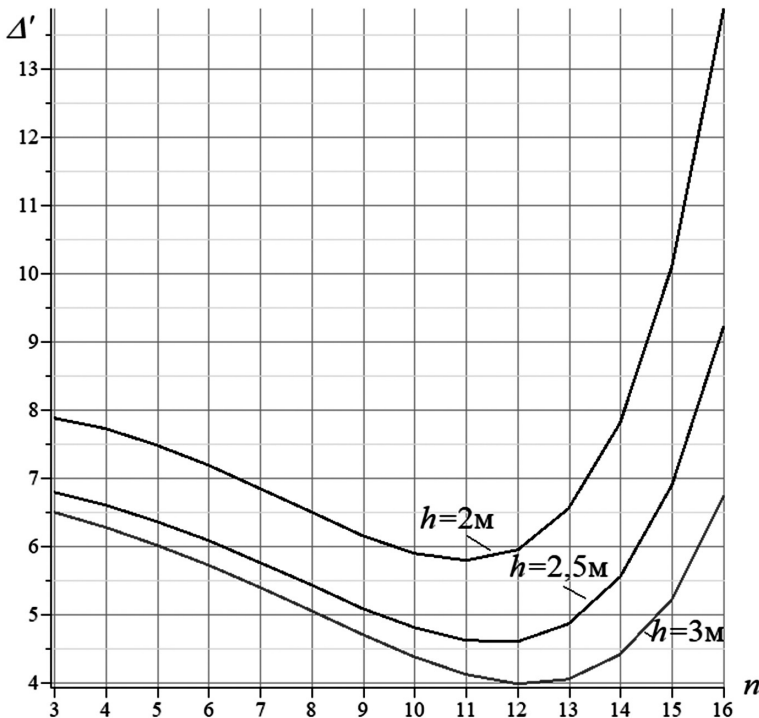


Рис. 5. Зависимость прогиба от числа панелей n при $n+m=20$

Аналогично определяются общие члены последовательностей коэффициентов при $m=3, 4, 5\dots$:

$$C_{1,n,3} = (216 + 240n + n^2 + 5n^4) / 12,$$

$$C_{1,n,4} = (864 + 672n + n^2 + 5n^4) / 12,$$

$$C_{1,n,5} = (2400 + 1440n + n^2 + 5n^4) / 12,$$

...

Обобщая эти результаты по числу панелей m , используя те же операторы `rgf_findrecur` и `rsolve`, получим формулу, справедливую при любых n и m

$$C_{1,n,m} = (6m^4 + 4(4n-3)m^3 + 6(1-4n)m^2 + 8nm + n^2 + 5n^4) / 12. \quad (3)$$

Таким же образом, в два этапа, получаем и остальные коэффициенты:

$$C_{2,n,m} = (m^3 + (2n-1)m^2 + m + n^2) / 2, \quad (4)$$

$$C_{3,n,m} = (2m^3 + (4n+2)m^2 + 4(n-2)m + 9-8n+n^2) / 2.$$

Формула (2) с коэффициентами (3, 4) дает решение поставленной задачи. Для проверки можно выполнить индукцию в обратном порядке — сначала по числу панелей m , потом по n . Одним из преимуществ использованного алгоритма является его возможность простой перенастройки на другие нагрузки. Так, для сосредоточенной нагрузки в середине пролета коэффициенты в (2) примут вид

$$C_{1,n,m} = (4m^3 + 2n^3 - 6m^2 + 2m + n) / 6,$$

$$C_{2,n,m} = (m^2 + n) / 2,$$

$$C_{3,n,m} = (2m^2 + 2m - 3 + n) / 2.$$

Двухпараметрическая форма результата позволяет провести простейшую оптимизацию конструкции по ее жесткости. Рассмотрим случай равномерной нагрузки. Фиксируя сумму $n+m$ и длину пролета L , подберем оптимальное соотношение n и m . В такой постановке график зависимости безразмерного прогиба $\Delta' = EF\Delta / (LP_{sum})$ от числа панелей n выявляет очевидный явно выраженный экстремум (рис. 5). Здесь обозначено $P_{sum} = (2n + 4m + 1)P$. Принято $n+m=20$, $L=100$ м. Зависимость экстремума от высоты h почти не заметна: с увеличением h точка минимума немного смещается вправо.

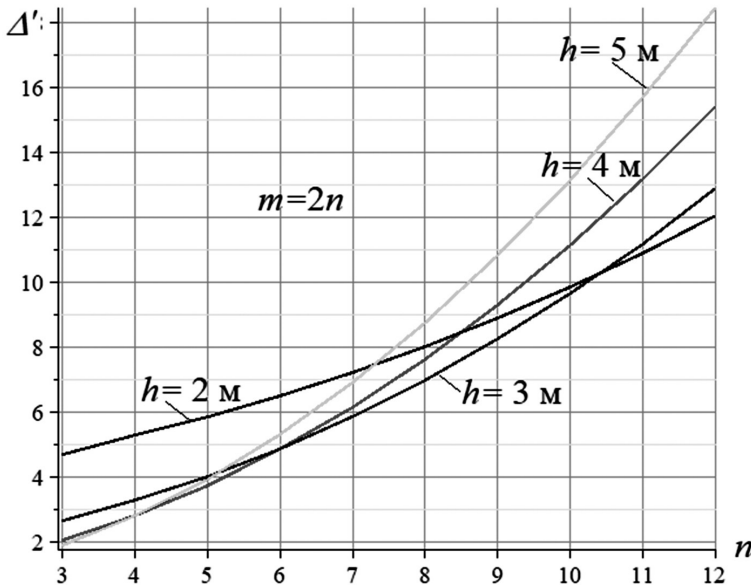


Рис. 6. Зависимость прогиба от числа n при $m = 2n$

Зависимость же прогиба от числа панелей при заданном соотношении числа панелей имеет совсем иной вид (рис. 6). Эти кривые построены при $m=2n$ для $L=100$ м. Здесь проявляется другая особенность: порядок кривых при различных значениях высоты фермы зависит от числа панелей. Это выражается в самопересечении графиков. Например, при высоте $h=2$ м прогиб по сравнению с фермами больших высот наибольший при малых числах n , а для больших n эта кривая располагается ниже других. Средствами операторов Maple можно выяснить, что рост прогиба имеет квадратичный характер:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Delta' / n^2 = 12h / (5L).$$

Горизонтальное смещение опоры

Под действием вертикальной нагрузки подвижные опоры смещаются. Наибольшее смещение можно предполагать в крайней правой опоре — наиболее удаленной от неподвижной опоры. Формулу для смещения в зависимости от числа панелей, нагрузки и размеров фермы можно получить, используя описанный алгоритм. В таком случае в качестве единичной силы в формуле Максвелла (1) выбирается горизонтальная сила, приложенная к подвижному шарниру. Методом двойной индукции получим следующее выражение для относительного смещения $\delta' = \delta EF / (PL)$:

$$\delta' = P(6m^3 + 9(2n+1)m^2 + (18n-33)m - 8n^3 - 6n^2 - 34n + 18)a^2 / (hEF). \quad (5)$$

Эта зависимость смещения от числа панелей при уже рассмотренном условии $m=2n$ весьма слабая, соответственные кривые оказываются почти горизонтальными с горизонтальной же асимптотой:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \delta' = 7L / (750h).$$

Заключение

Структура рассмотренной схемы составной несущей фермы консольного моста допускает более простой на первый взгляд расчет и напряжений, и прогиба. Сначала обычно производится расчет средней части фермы (балочная ферма на двух опорах — шарнирных концах консолей), а затем консольные части от действия внешней нагрузки и от реакций опор средней части. Для расчета некоторого частного примера это действительно удобно. Здесь же ставилась не только более общая задача — вывод формулы прогиба для фермы с произвольным числом панелей, но и задача отработки алгоритма, пригодного для почти автоматического вывода формул в произвольном случае, например, если число пролетов в конструкции будет больше. Полученные формулы оказались достаточно простыми, легко используемыми, удобными для оценки прогиба. Свойство линейности задачи по нагрузкам линейной комбинацией решений для сосредоточенной нагрузки и распределенной позволяет получить формулы для различных случаев нагружения. Все расчеты выполнены в предположении постоянства сечений всех стержней, однако, решения легко обобщаются (без дополнительного пересчета) на случай различных сечений стержней поясов и решетки [20]. Для этого в (2) к коэффициентам C_1, C_2, C_3 добавляются множители $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$, равные отношению жесткости стержней соответствующей длины к жесткости EF.

В обзоре [21] содержатся работы, использующие описанный метод индукции для вывода формул прогиба применительно к задачам о плоских фермах в системе Maple. Отдельные аналитические решения для простых консольных ферм имеются в работах [22–25].

Список литературы

1. Klowak C. S., Mufti A. A. Behaviour of bridge deck cantilever overhangs subjected to a static and fatigue concentrated load // Construction and Building Materials. — 2009. — Т. 23. — № 4. — Pp. 1653–1664.
2. Shu J. et al. Assessment of a cantilever bridge deck slab using multi-level assessment strategy and decision support framework // Engineering Structures. — 2019. — Т. 200. — P. 109666.
3. Rybakov L.S. Linear theory of an elastic prismatic framework // Mechanics of Solids. — 2001. — Т. 36. — № 4. — P. 83.

4. Игнатьев В.А. Расчет регулярных стержневых систем. Саратов: Саратовское высшее военно-химическое военное училище, 1973.
5. Guest S.D., Hutchinson J.W. On the determinacy of repetitive structures // J. Mech. Phys. Solids. – 2003. – 51. – Pp. 383–391.
6. Kirsanov M.N. Planar Trusses: Schemes and Formulas. Cambridge Scholars Publishing, 2019. Lady Stephenson Library, Newcastle upon Tyne, NE6 2PA, UK ISBN (13): 978-1-5275-3531-2
7. Hutchinson R. G., Fleck N.A. Microarchitected cellular solids – the hunt for statically determinate periodic trusses // ZAMM Z. Angew. Math. Mech. – 2005. – 85, № 9. – Pp. 607–617.
8. Hutchinson R.G., Fleck N.A. The structural performance of the periodic truss // Journal of the Mechanics and Physics of Solids. – 2006. – Vol. 54. – № 4. – Pp. 756–782.
9. Zok F. W., Lature R. M., Begley M. R. Periodic truss structures // Journal of the Mechanics and Physics of Solids. – 2016. – Vol. 96. – Pp. 184–203. <https://doi.org/10.1016/j.jmps.2016.07.007>
10. Кирсанов М.Н. Аналитический расчет балочной фермы со сложной решеткой // Строительная механика и расчет сооружений. – 2015. – № 3 (260). – С. 7–12.
11. Белянкин Н.А., Бойко А.Ю. Формулы для прогиба балочной фермы с произвольным числом панелей при равномерном нагружении // Строительная механика и конструкции. – 2019. – № 1 (20). – С. 21–29.
12. Качук Г.Н. Формула зависимости прогиба несимметрично нагруженной плоской фермы с усиленными раскосами от числа панелей // Строительная механика и конструкции. – 2019. – № 2 (21). – С. 32–39.
13. Бойко А.Ю., Качук Г.Н. Вывод формул зависимости прогиба плоской шарнирно-стержневой рамы от числа панелей в системе Maple // Строительная механика и конструкции. – 2019. – № 4 (23). – С. 15–25.
14. Тимофеева Т.А. Формулы для расчета прогиба плоской решетчатой рамы с произвольным числом панелей // Строительная механика и конструкции. – 2019. – № 4 (23). – С. 26–33.
15. Кирсанов М.Н. Оценка прогиба и устойчивости пространственной балочной фермы // Строительная механика и расчет сооружений. – 2016. – № 5 (268). – С. 19–22.
16. Кирсанов М.Н. Напряженное состояние и деформации прямоугольного пространственного стержневого покрытия // Научный вестник Воронежского государственного архитектурно-строительного университета. Строительство и архитектура. – 2016. – № 1 (41). – С. 93–100.
17. Ларичев С.А. Индуктивный анализ влияния строительного подъема на жесткость пространственной балочной фермы // Trends in Applied Mechanics and Mechatronics. – М.: Инфра-М, 2015. – Т. 1. – С. 4–8.
18. Доманов Е. В. Аналитическая зависимость прогиба пространственной консоли треугольного профиля от числа панелей // Научный альманах. – 2016. – № 6-2 (19). – С. 214–217.
19. https://en.wikipedia.org/wiki/Cantilever_bridge
20. Петриченко Е.А. О прогибе консольной фермы с крестообразной решеткой в зависимости от перераспределения площадей стержней и числа панелей // Научный альманах. – 2016. – № 6-2 (19). – С. 279–266.
21. Осадченко Н.В. Аналитические решения задач о прогибе плоских ферм арочного типа // Строительная механика и конструкции. – 2018. – №. 1. – С. 12–33.
22. Белянкин Н.А., Бойко А.Ю., Плясова А.А. Вывод формулы для прогиба плоской решетчатой фермы с консолями в системе Maple методом индукции // Постулат. – 2019. – № 3. – С. 25.
23. Пережилова Е.Д. Формула для прогиба консольной фермы под действием распределенной нагрузки по верхнему поясу // Постулат. – 2018. – № 12.
24. Доманов Е.В. Аналитическая зависимость прогиба пространственной консоли треугольного профиля от числа панелей // Научный альманах. – 2016. – № 6-2 (19). – С. 214–217.
25. Ниналов И.Г. Расчет прогиба консольной фермы // Научный альманах. – 2016. – № 6-2 (19). – С. 271–281.

SCHEME AND FORMULAS FOR CALCULATING THE DEFLECTION OF THE TRUSS OF A THREE-SPAN CANTILEVER BRIDGE WITH AN ARBITRARY NUMBER OF PANELS

M.N. Kirsanov, National Research University Moscow Power Engineering Institute, Moscow, Russia;
e-mail: mpei2004@Yandex.ru

Abstract. The task of obtaining an exact solution to the problem of deflection of a flat truss model of a composite cantilever bridge with an arbitrary number of panels is set. The truss is symmetrical, statically definable with two consoles and a beam truss connecting the consoles. Of the four pillars of the structure, one support is modeled by a fixed hinge. The truss grid is triangular, the load is applied evenly at the lower belt nodes or in the middle of the span. The dependence of the horizontal displacement of the movable support on the load of the number of panels in the structure is also deduced. The forces in the truss rods are determined from the General system of equilibrium equations for all truss nodes using the maple symbolic transformation program. To find the deflection and displacement of the support, the Mohr formula is used. Individual solutions obtained for trusses with a consistently increasing number of panels are generalized by double induction to an arbitrary number of panels in two stages—first by the number

of panels in the beam truss, then by the number of panels in the consoles. The coefficients of the desired formula are determined from the solution of recurrent equations made using operators of the Maple system. Formulas for deflection and displacement in the form of third- and fourth-order polynomials are obtained. If there is a limit on the total number of panels and the span length, extreme points are found on the solution graphs that allow optimizing the ratio of the size of the parts of the structure to increase its rigidity. Some asymptotic properties of the solution for the number of panels are found.

Key words: truss, cantilever bridge, deflection, Maple, induction, number of panels, asymptotics

References

1. Klowak C.S., Mufti A.A. Behaviour of bridge deck cantilever overhangs subjected to a static and fatigue concentrated load. *Construction and Building Materials*. 2009. 23. № 4. Pp. 1653–1664.
2. Shu J. et al. Assessment of a cantilever bridge deck slab using multi-level assessment strategy and decision support framework. *Engineering Structures*. 2019. Vol. 200. Pp. 109666.
3. Rybakov L.S. Linear theory of an elastic prismatic framework. *Mechanics of Solids*. 2001. Vol. 36. № 4. Pp. 83.
4. Ignatiev V.A. Calculation of regular core systems. Saratov: Saratov Higher Military Chemical Military School, 1973.
5. Guest S.D., Hutchinson J.W. On the determinacy of repetitive structures. *J. Mech. Phys. Solids*. 2003. 51. Pp. 383–391.
6. Kirsanov M.N. Planar Trusses: Schemes and Formulas. Cambridge Scholars Publishing. 2019. Lady Stephenson Library, Newcastle upon Tyne, NE6 2PA, UK ISBN (13): 978-1-5275-3531-2
7. Hutchinson R. G., Fleck N.A. Microarchitected cellular solids – the hunt for statically determinate periodic trusses. *ZAMM Z. Angew. Math. Mech.* 2005. 85, № 9. Pp. 607–617.
8. Hutchinson R.G., Fleck N.A. The structural performance of the periodic truss. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*. 2006. Vol. 54. №. 4. Pp. 756–782.
9. Zok F. W., Latture R. M., Begley M. R. Periodic truss structures. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*. 2016. Vol. 96. Pp. 184–203. <https://doi.org/10.1016/j.jmps.2016.07.007>
10. Kirsanov M. N. Analytical calculation of a beam truss with a complex grid. *Construction mechanics and calculation of structures*. 2015. № 3 (260). Pp. 7–12.
11. Belyankin N. A., Boyko A. Yu. Formulas for deflection of a beam truss with an arbitrary number of panels at uniform loading. *Construction mechanics and structures*. 2019. № 1 (20). Pp. 21–29.
12. Tkachuk G. N. Formula for the dependence of the deflection of an asymmetrically loaded flat truss with reinforced struts on the number of panels. *Construction mechanics and structures*. 2019. № 2(21). Pp. 32–39.
13. Boyko A. Yu., Tkachuk G. N. Derivation of formulas for the dependence of the deflection of a flat hinge-rod frame on the number of panels in the Maple system. *Construction mechanics and structures*. 2019. № 4 (23). Pp. 15–25.
14. Timofeeva T. A. Formulas for calculating the deflection of a flat lattice frame with an arbitrary number of panels. *Construction mechanics and structures*. 2019. № 4 (23). Pp. 26–33.
15. Kirsanov M. N. Estimation of deflection and stability of a spatial beam truss. *Construction mechanics and calculation of structures*. 2016. № 5 (268). Pp. 19–22.
16. Kirsanov M. N. Stress state and deformations of rectangular spatial core coating. *Scientific Bulletin of the Voronezh state University of architecture and construction. Construction and architecture*. 2016. № 1 (41). Pp. 93–100.
17. Larichev S. A. inductive analysis of the influence of construction lifting on the stiffness of a spatial beam truss. *Trends in Applied Mechanics and Mechatronics*. M: Infra-M. 2015. Vol. 1. Pp. 4–8.
18. Domanov E. V. Analytical dependence of the deflection of the spatial console of a triangular profile on the number of panels. *Science almanac*. 2016. № 6-2 (19). Pp. 214–217.
19. https://en.wikipedia.org/wiki/Cantilever_bridge
20. Petrichenko E. A. on the deflection of a cantilever truss with a cross-shaped grid depending on the redistribution of rod areas and the number of panels. *Science almanac*. 2016. № 6-2 (19). Pp. 279–266.
21. Osadchenko N. V. Analytical solutions to problems of deflection of flat trusses of arch type. *Construction mechanics and structures*. 2018. № 1. Pp. 12–33.
22. Belyankin N. A., Boyko A. Yu., Plyasova A. A. Derivation of the formula for deflection of a flat lattice truss with consoles in the Maple system by induction method. *Postulate*. 2019. № 3. P. 25.
23. Perezhilova E. D. Formula for deflection of a cantilever truss under the action of a distributed load on the upper belt. *Postulate*. 2018. 12.
24. Domanov E. V. Analytical dependence of the deflection of the spatial console of a triangular profile on the number of panels. *Science almanac*. 2016. № 6-2 (19). Pp. 214–217.
25. Ninalalov I. G. calculation of the deflection of the cantilever trusses. *Science almanac*. 2016. № 6-2 (19). Pp. 271–281.