СТРОИТЕЛЬНАЯ МЕХАНИКА И РАСЧЕТ СООРУЖЕНИЙ

НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Издается с 1 января 1959 г.
Выходит один раз в два месяца

Учредитель: ОАО «НИЦ «Строительство»

МОСКВА. ЦНИИСК им. В. А. Кучеренко

2 (229)
2010

Редактор выпуска *Пятикрестовский К.П.*
Корректор *Козлова М.В.*
Компьютерная верстка *Севастьянова М.Г.*

Журнал зарегистрирован Федеральной службой по надзору за соблюдением законодательства в сфере массовых коммуникаций и охране культурного наследия.
Свидетельство о регистрации средства массовой информации ПИ №ФС77-19167 от 27 декабря 2004 г.

Адрес редакции:
109428, Москва, ул. 2-я Институтская, д. 6, стр. 1
Тел.: 8-499-170-10-81
E-mail: stroymex@list.ru
www.sm-i-rs.ru

Подписано в печать 15.04.2010. Формат 70×108 1/16
Бумага офсетная. Офсетная печать. Тираж 500 экз.
Заказ № 9374

Отпечатано в типографии
ФГУП «Издательство «Известия»
127994, Москва, Пушкинская пл., д. 5
Тел.: (495) 694-36-36, 694-30-20

УДК 624.074.1.003

М.Н. КИРСАНОВ, д-р физ.-мат. наук, проф.
МЭИ(ТУ)

ГЕНЕТИЧЕСКИЙ АЛГОРИТМ ОПТИМИЗАЦИИ СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМ*

Решаются задачи оптимизации плоских статически определимых упругих стержневых систем. Предлагается вариант генетического алгоритма в сочетании с методом индукции для получения усилий в стержнях ферм регулярной или симметричной структуры. В качестве критерия оптимальности используются три целевые функции. Численные и аналитические вычисления проводятся с использованием системы компьютерной математики Maple.

Ключевые слова: *плоские статически определимые упругие стержневые системы, генетический алгоритм.*

Стержневые системы в строительстве и машиностроении привлекательны простотой монтажа, экономией материала, точностью расчетов. Оптимизация геометрии и прочностных характеристик системы позволяет эффективней использовать преимущества стержневых систем. Методы оптимизации весьма разнообразны. Одним из самых новейших методов является генетический алгоритм [1, 3]. В данной работе предлагается вариант этого метода совместно с методом индукции и использованием системы компьютерной математики Maple [2]. Приводятся примеры оптимизации плоских статически определимых систем.

Рассмотрим задачу оптимизации стержневой системы. Критерий оптимальности, в зависимости от назначения конструкции и поставленной задачи, может быть разный. Сравним три варианта. В первом случае будем минимизировать жесткость системы, оценивая прогиб некоторой точки. Во втором случае минимизации подлежит разность между минимальным и максимальным положительным (растягивающим) усилием в стержнях. В последнем случае найдем геометрию системы, при которой наибольшее отношение усилия в стержне к эйлеровой критической нагрузке стержня будет минимальным. Последняя минимаксная задача означает, что по отношению к критерию устойчивости, оптимальной будет система, в которой усилия в стержнях будут малы, а критическая сила для них же будет велика, а потому коэффициент запаса устойчивости будет больше. Здесь не рассматривается устойчивость всей системы в целом, а устойчивость отдельных стержней. Для ускорения расчетов сложных систем с большим числом стержней предлагается использовать индуктивный метод получения усилий.

Статический расчет

Для апробации генетического алгоритма объект исследований может быть произвольный. Рассмотрим, например, шарнирно опертую симметричную арочную ферму с круговым очертанием нижнего пояса (рис. 1). Определим очертание верхнего пояса и размеры панелей, соответствующие минимуму целевой функции. Усилия в стержнях определим методом вырезания узлов. Пусть x_j, y_j — координаты узлов (шарниров) фермы, $j = 1,.., M$, где M — общее число узлов. Стержни фермы условно представим в виде векторов, для которых N_i — номер начала стержня, K_i —

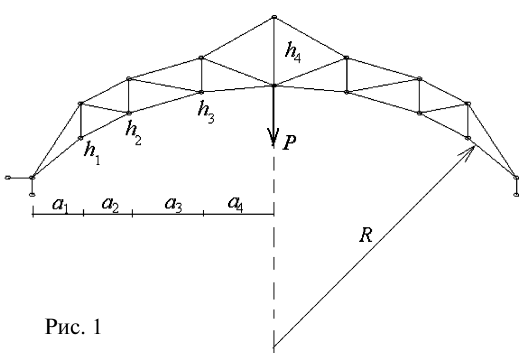

Рис. 1

* Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты 09-01-00756-а, 09-08-01184-а).

номер конца стержня i. Направления стержней выбираем произвольно, на решение задачи выбор направления не влияет. Проекции стержня: $l_{x,i} = x_{K_i} - x_{N_i}$, $l_{y,i} = y_{K_i} - y_{N_i}$. Матрица направляющих косинусов G размером $N \times N$, где $N = 4K_p$ — число стержней фермы, K_p — число панелей. Для всех стержней $G_{2N_i-1,i} = l_{x,i} / l_i$, $G_{2N_i,i} = l_{y,i} / l_i$, и для всех стержней, кроме опорных $G_{2K_i-1,i} = -l_{x,i} / l_i$, $G_{2K_i,i} = -l_{y,i} / l_i$. Систему уравнений равновесия узлов представим в векторном виде

$$G\bar{S} = \bar{B}, \tag{1}$$

где $\bar{S} = \{S_1, ..., S_N\}$ — вектор усилий в стержнях, $\bar{B} = \{P_{x,1}, P_{y,1}, ..., P_{x,M}, P_{y,M}\}$ — вектор правых частей (внешних нагрузок, приложенных к узлам). Нечетные элементы вектора $\bar{B}$ соответствуют горизонтальным нагрузкам, четные — вертикальным. Система (1) состоит из уравнений равновесия узлов. Для каждого узла записывается два уравнения – нечетные в проекции на ось x, четные – на y.

Прогиб вычисляем по формуле Максвелла — Мора $\delta = P \sum_{k=1}^{N-3} S_k^2 l_k / EF$. Жесткость стержней EF считаем для всех стержней одинаковой, а три опорных стержня — недеформируемыми; S_k — усилие в k-м стержне от единичной силы. Примем радиус $R = 12$ м и пролет $2l_0 = 20$ м, где $l_0 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4$. Выберем шесть независимых варьируемых параметров a_2, a_3, a_4, h_1, h_2, h_3. Для высот стоек введем ограничение $\sum_{k=1}^{4} h_k = H = 10$ м. Два размера, определяющие форму, будут зависимыми: $a_1 = l_0 - a_2 - a_3 - a_4$, $h_4 = H - h_1 - h_2 - h_3$. Эти величины определяют координаты узлов, поэтому допускаются и отрицательные размеры.

Алгоритм

Используем принятые в генетических алгоритмах термины. Варьируемые параметры с определенными значениями будем объединять в векторы – хромосомы. Каждый элемент такого вектора – ген, соответствует определенному параметру системы. Несколько хромосом образуют популяцию, лучшие хромосомы которых дают популяцию следующего поколения, худшие отбрасываются. Качество хромосом в рассматриваемой задаче соответствует прогибу в середине пролета. Чем меньше прогиб, тем выше качество. На начальном этапе сформируем хромосомы $\bar{Z}_k = \{z_{1k}, ..., z_{nk}\} = \{a_{2k}, a_{3k}, a_{4k}, h_{1k}, h_{2k}, h_{3k}\}$, $k = 1, ..., 13$. Число хромосом популяции связано с длиной n хромосомы $m_0 = 2n + 1$. Значения генов в первой популяции выбираем с помощью генератора случайных чисел. Пусть α — номер лучшей хромосомы в популяции. Первые n хромосомы новой популяции имеют следующие гены: $z_{ik}{}' = z_{i\alpha}$, $i \neq k$, $z_{ii}{}' = z_{i\beta}$, где $k = 1,...,n$, β — номер второй по качеству хромосомы первого поколения. Эта хромосома дает n-1 хромосом, образованных по тому же принципу, что и первые $z_{ik}{}' = z_{i\beta}$, $i \neq k$, $k = 1,..., n —1$, $z_{ii}{}' = z_{i\gamma}$, γ — номер следующей по качеству хромосомы первого поколения после хромосомы β. Две последних хромосомы получаются случайным образом и дают эффект мутации, необходимый в таких алгоритмах для исключения эффекта зацикливания после перебора конечного числа комбинаций.

Результаты

В первом случае оцениваем прогиб в середине пролета от действия вертикальной силы, приложенной в этой же точке. Случайные значения варьируемых параметров дали следующую геометрию фермы первого (начального) поколения (рис. 2). Во втором поколении получилась ферма на рис. 3. Всего несколько итераций дали оптимальную ферму на рис. 4. При этом два узла слились в один (стержень нижнего пояса первой панели оказался нулевым), а верхний пояс оказался очерченным по кривой, близкой к квадратной параболе. Получен безразмерный прогиб $\Delta = \delta EF / (Pl_0) = 6,745$.

Варьируемые параметры, соответствующие этой геометрии имеют следующие значения: $h_1 = 1,528$ м, $h_2 = 2,396$ м, $h_3 = 2,838$ м, $a_2 = 3,293$ м, $a_3 = 3,073$ м, $a_4 = 3,499$ м.

В решении второй задачи оптимальной является ферма с равнозагруженными растянутыми стержнями. В заданных ограничениях, вероятно, это в идеале невозможно, а найти условие, при котором разность между наименее и наиболее растянутыми стержнями будет минимальной, можно попытаться. Выбрав в качестве первого поколения те же размеры, что и в первой постановке,

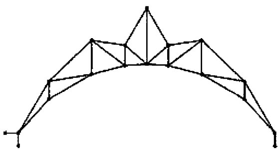

Рис. 2

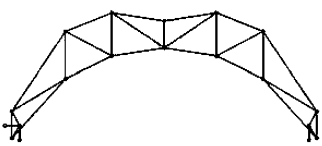

Рис. 3

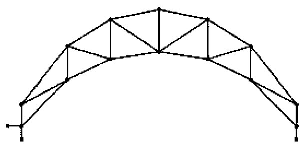

Рис. 4

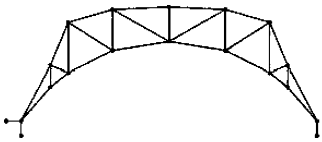

Рис. 5

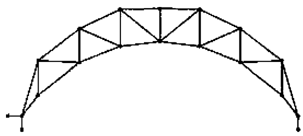

Рис. 6

т.е. рис. 2, после нескольких (не более 7) поколений получаем ферму на рис. 5. Размеры получаются следующие $h_1 = 1{,}453$ м, $h_2 = 3{,}391$ м, $h_3 = 2{,}764$ м, $a_2 = 1{,}195$ м, $a_3 = 2{,}973$ м, $a_4 = 3{,}796$ м. Относительный прогиб фермы $\Delta = 10{,}91$, разность между усилиями равна $0{,}877P$.

В третьей постановке надо найти условие минимума отношения $p = \max(S_k / S_k^*)$, $k = 1,\ldots,N-3$, где $S_k^* = \pi^2 EJ / l_k^2$ — критическая по Эйлеру нагрузка сжатого шарнирно опертого прямолинейного стержня, EJ — жесткость стержней на изгиб, принята постоянной для всех стержней. Минимизируя величину p, получаем размеры $h_1 = 2{,}424$ м, $h_2 = 2{,}392$ м, $h_3 = 2{,}652$ м, $a_2 = 2{,}974$ м, $a_3 = 2{,}892$ м, $a_4 = 2{,}826$ м. Ферма, соответствующая этим размерам изображена на рис. 6. Относительный прогиб фермы $\Delta = 8{,}92$.

Индуктивный метод

В приведенном примере ферма состоит из четырех панелей, и расчет не занимает много времени – секунды или доли секунд. Программа, использующая стандартные процедуры Maple из пакета LinearAlgebra, легко обобщается на значительно большее число стержней. При этом время расчета каждого поколения возрастает. Аналитические возможности Maple позволяют в некоторых случаях, для ферм с регулярной или симметричной геометрией, получить аналитические выражения для усилий в стержнях как функцию числа панелей. Приведем пример. Рассмотрим консольную ферму, состоящую из N панелей одинаковой длины a. Ферма загружена вертикальной силой P (рис. 7).

Длины стержней верхнего пояса и раскосов: $l_{O,k} = \sqrt{a^2 + (h_k - h_{k+1})^2}$, $l_{D,k} = \sqrt{a^2 + h_{k+1}^2}$. Аналитические выражения для усилий в стержнях k-й панели можно получить вручную или с помощью системы Maple. Для этого при составлении системы (1) координаты надо вводить не в численном, а в аналитическом виде. Имеем следующие выражения

$$D_k = l_{D,k}((N-k)h_k - (N-k+1))/(h_k h_{k+1});$$

$$U_k = -(N-k)a/h_{k+1},\ O_k = (N-k+1)l_{O,k}/h_k;$$

$$V_k = (N-k)h_{k+2}/h_{k+1} - N + k + 1.$$

Принимая опорные стрежни и первую стойку недеформируемыми, по формуле Максвелла — Мора получаем прогиб консоли

$$\delta = \sum_{k=1}^{N} (D_K^2 l_{D,k} + O_K^2 l_{O,k} + U_K^2 a + V_K^2 h_k) / EF.$$

В частности, для консоли с горизонтальным верхним поясом, т.е. при $h_k = b$, $k = 1,\ldots,N+1$, получаем $\delta = N((a^2+b^2)^{3/2}/b^2 + b + a^3/b^2(2N^2+1)/3)/EF$.

Варьируемыми параметрами назначим высоты первых четырех стоек. Ограничим суммарную длину стоек, $\sum_{k=1}^{N+1} h_k = 9$ м, при длине панели $a = 1$ м. Высота последней стойки зависит от варьируемых значений (генов хромосом). Оптимальные размеры будем определять из условия минимума прогиба консоли.

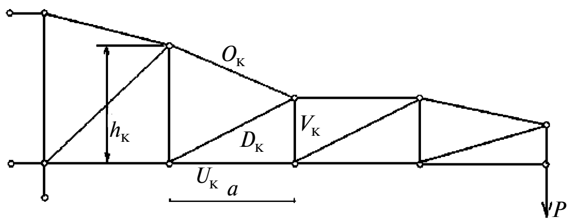

Рис. 7

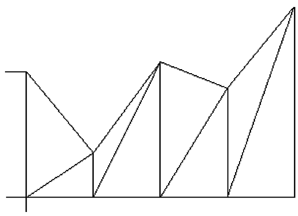
Рис. 8

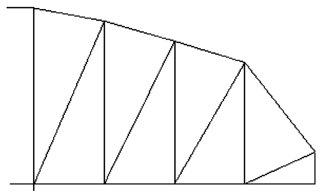
Рис. 9

Генетический алгоритм с начальными значениями, соответствующими конфигурации фермы на рис. 8 за 10—20 шагов (в зависимости от данных генератора случайных чисел, задающего две последние хромосомы) сходится к ферме на рис. 9. Значения длин стоек получены следующие: $h_1 = 2{,}414$ м, $h_2 = 2{,}391$ м, $h_3 = 2{,}188$ м, $h_4 = 1{,}793$ м. Прогиб $\delta = 17{,}186P/EF$.

Выводы

Применение генетического алгоритма для оптимизации геометрии стержневых систем показало его высокую эффективность. Большое число варьируемых параметров не позволяет использовать методы простого перебора вариантов. Метод наискорейшего спуска и другие вычислительные методы могут быть использованы для решения таких задач, однако отсутствие аналитических выражений, минимум которых разыскивается, и сложность алгоритмов ограничивают их возможности. Однако, не стоит преувеличивать и достоинства генетического алгоритма. Во-первых, до сих пор остаются неясным принципы формирования начальной популяции. Практика показала, что неудачный выбор границ генератора случайных чисел может привести к попаданию в локальный минимум, которыми изобилуют подобные задачи. Кроме того, выбор методов формирования последующих поколений ясен лишь интуитивно. В предложенных решениях основой являлось подавляющее присутствие в генерируемом поколении первых двух по качеству хромосом, разбавленных в минимальной степени хромосомами худшего качества. Это приводило к весьма быстрой сходимости результатов. Замечено также, что обычно используемое понижение влияния мутаций от поколения к поколению (по типу метода отжига) не приводит к ожидаемому улучшению сходимости. Кроме того, усложнение системы с увеличением числа стержней и пропорциональным увеличением числа варьируемых параметров при выбранном методе формирования поколений не удлиняет, а укорачивает решение. Это связано, вероятно, с тем, что число хромосом, а следовательно и поле для выбора лучшего решения, увеличивается. Без особых усложнений предложенный способ оптимизации может быть использован и в пространственных статически определимых и статически неопределимых системах. Индуктивный метод получения решения существенно ускоряет расчеты, однако вывод аналитических выражений возможен лишь в специальных случаях и требует некоторого опыта работы с пакетом Genfunc [4].

Литература

1. *Гладков Л.А., Курейчик В.В., Курейчик В.М.* Генетические алгоритмы. — М. : ФИЗМАТЛИТ, 2006. — 320 с.
2. *Дьяконов В.П.* Maple 9.5/10 в математике, физике и образовании. — М. : Солон-Пресс, 2006. — 720 с.
3. *Пелешко И.Д., Юрченко В.В.* Использование генетических алгоритмов для поиска оптимальных проектных решений металлических конструкций // VIII Украинская научно-техническая конференция «Металлические конструкции: взгляд в прошлое и будущее» (18—22 октября 2004 г. Киев. Украина) / Сборник докладов. Ч. 1. / Под общ. ред. Шимановского А.В. – К. : Сталь, 2004. С. 250—260.
4. *Кирсанов М.Н., Кленова И.Г.* Индуктивный метод исследования колебаний систем с периодической структурой// Всероссийской научно-практической конференции. «Математика, информатика, естествознание в экономике и обществе». МФЮА. 16—17.11.09 г. Москва. С. 112—113.