УДК 624.04

М. Н. КИРСАНОВ, **д-р физ.-мат. наук, проф.**,
НИУ МЭИ

РАСЧЕТ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ СТЕРЖНЕВОЙ СИСТЕМЫ, ДОПУСКАЮЩЕЙ МГНОВЕННУЮ ИЗМЕНЯЕМОСТЬ

Пространственная стержневая конструкция обнаруживает мгновенную изменяемость при четном числе опор, хотя статический расчет отдельно вырезанного узла дает совершенно определенное, не характерное для изменяемых систем, решение для усилий в стержнях. Показано распределение возможных скоростей узлов, допустимое при четном и недопустимое при нечетном числе опор. Предельный переход в решении системы уравнений для усилий в искаженной конструкции дает решение, полученное методом вырезания одного узла с учетом симметрии задачи. Определяется и оптимизируется прогиб конструкции. Используется система компьютерной математики Maple.

***Ключевые слова**: пространственные фермы, мгновенная изменяемость, Maple, оптимизация, прогиб*

В процессе численного расчета одной пространственной стержневой системы с помощью простой и хорошо зарекомендовавшей себя программы [1,2,3] в системе Maple [4], обнаружилось странное, на первый взгляд, явление. При симметричном загружении симметричной же конструкции усилия в симметричных стержнях оказались разными. В программу заложен метод вырезания узлов с последующим решением системы уравнений для всех усилий в системе. При более внимательном рассмотрении выяснилось, что решение кроме того существенно зависит от точности, задаваемой в Maple (параметр **Digits**). Все это указывало на то, что система вырождается, как это бывает при кинематической изменяемости конструкции. Последующее аналитическое решение этой же системы показало, что, действительно, в некоторых случаях определитель системы равен нулю, хотя элементарный расчет равновесия отдельного узла дает совершенно определенные значения усилий, так как будто конструкция неизменяема.

Конструкция и расчет

Пространственная ферма высотой h состоит из правильного стержневого n-угольника со стороной a, расположенного в горизонтальной плоскости. Число опорных стержней длиной b равно $2n$. Они шарнирно крепятся к земле (основанию). Нагрузка может быть произвольной, например, вертикальные силы, приложенные к узлам. На рисунке 1 изображена ферма при n=5. Усилия в стержнях будем определять методом вырезания узлов. Усилия в стержнях n-угольника будем обозначать S, в опорных стержнях — N.

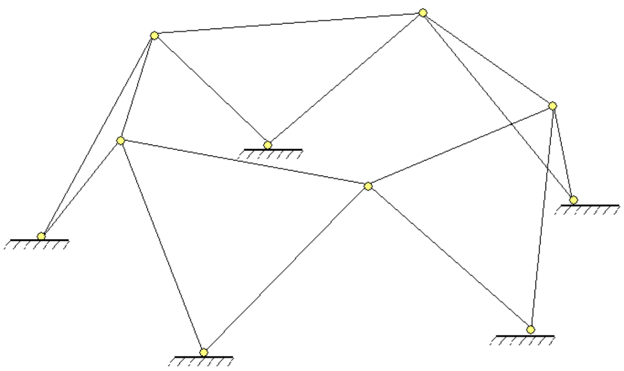

Рис. 1

С учетом симметрии конструкции имеем уравнение равновесия узла в проекции на вертикальную ось z: $-P-2N\cos\alpha=0$, где $\cos\alpha=h/b$ (рис. 2, n=4). Второе уравнение, для определения усилий в стержнях n-угольника, запишем в проекции на ось x: $2N\sin\alpha\cos(\beta+\varphi)+2S\cos\varphi=0$, где $\varphi=\pi/2-\psi/2$, $\psi=2\pi/n$, $\cos\beta=a/(2c)$, $c=\sqrt{b^2-h^2}$ (рис. 3).

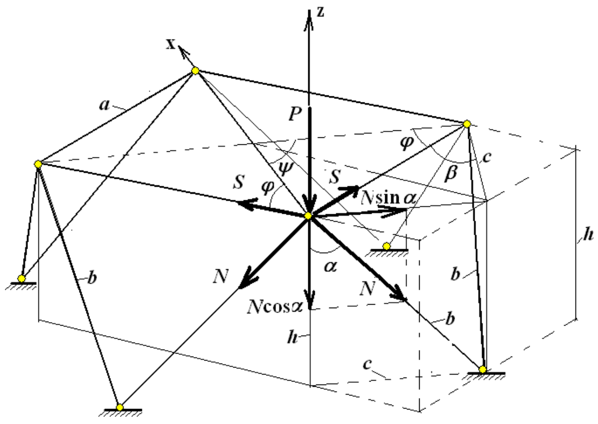

Рис. 2

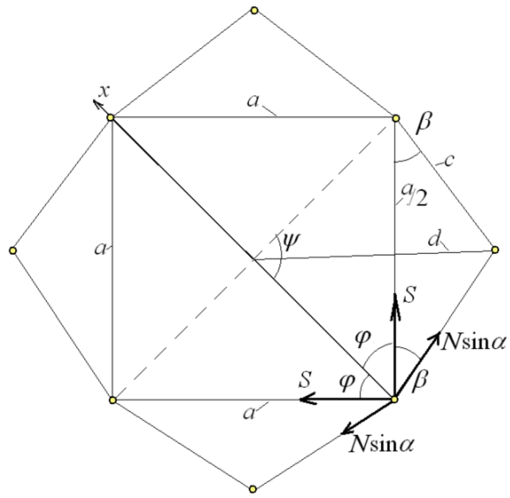

Рис. 3

Получаем решение при $P=1$

$$N=-b/(2h),\qquad S=\left(a-\operatorname{tg}\varphi\,\sqrt{4b^2-4h^2-a^2}\right)/(4h). \tag{1}$$

Анализ

Заметим, что решение (1) формально справедливо для любых значений *n*, хотя при четных значениях *n* конструкция становится мгновенно кинематически изменяемой. Действительно, если при четном n, например при $n=4$ (рис. 4), рассмотреть поворот жесткого треугольника *A'B'A* вокруг линии *A'B'*, проходящей через опоры , то точка *A* приобретет скорость $\overline{V}_A$, перпендикулярную плоскости треугольника. Аналогично точки *B, C* и *D* приобретают скорости, равные по модулю V_A. Для нечетных n, например при $n=5$ (рис. 5), подобное распределение невозможно. Так, последовательно расставляя скорости вершин *A, B, C, D, E* , начиная с *A,* получаем противоречие направлений скоростей $\overline{V}_A$ и $\overline{V}_E$. Условие равенства проекций скоростей на ось *AE* не выполняется — вектора скоростей направлены в разные стороны.

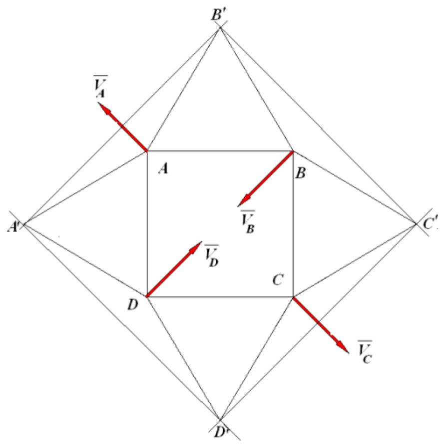

Рис. 4

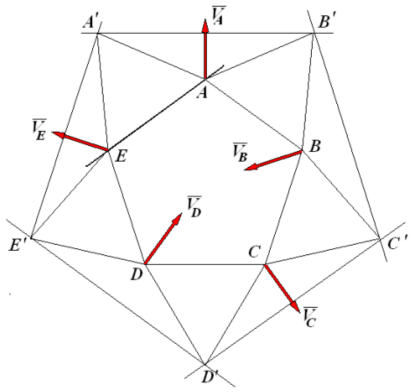

Рис. 5

Если составить систему 12 уравнений равновесия всех четырех узлов конструкции для определения усилий в 12 стержнях, то выясняется, что определитель этой системы равен нулю, что соответствует обнаруженной кинематической изменяемости, но противоречит решению (1) при n=4, $\varphi = \pi / 4$, так как принято считать, что в мгновенно изменяемых системах усилия стремятся к бесконечности. Для того, чтобы разрешить это противоречие, немного нарушим симметрию конструкции, заложенную в программу составления системы уравнений. Координаты шарниров стержневого четырехугольника (квадрата) определим по формулам

$$x_i = r\cos((i-1)\psi),\ y_i = r\sin((i-1)\psi),\ z_i = h,.$$

а опоры сместим на угол θ: $x_{i+4} = R\cos((i-1/2)\psi + \theta),\ y_{i+4} = R\sin((i-1/2)\psi + \theta),\ z_{i+4} = 0,$ где $i = 1,...,4,\quad r = a/(2\cos\varphi),\ R = \sqrt{b^2 - h^2 - a^2/4} + (a/2)\mathrm{tg}\varphi$. Конструкция становится неизменяемой, а определитель системы уравнений равновесия имеет вид $\det G = \sin(2\theta)/\Phi(\theta, R, r)$, где $\Phi(\theta, R, r)$ — некоторая (достаточно громоздкая, чтобы ее выписывать) известная функция. Усилия в стержнях, полученные из решения системы, также зависят от угла θ, но в пределе при $\theta \to 0$ в системе Maple получаем решение (1). Для вычисления предела усилия S[k] в k-м стержне используем в Maple оператор **limit(S[k],theta=0)**.

Прогиб

Под действием нагрузки шарниры фермы получат вертикальные перемещения, которые найдем по формуле Максвелла-Мора

$$\Delta = P\sum_{i=1}^{3n} S_i^2 l_i / (nEF_i) \tag{2}$$

где S_i — усилия в стержнях от действия единичных вертикальных сил на узлы фермы, l_i — длины стержней, E — модуль упругости, F_i — площади сечений. Пусть площади сечений в стержнях n-угольника равна $(1-2k)F_0$, а в опорных стержнях — $(1+ka/b)F_0$. Таким образом, общий объем стержней фермы не зависит от коэффициента перераспределения массы k и равен $nF_0(2b+a)$. С учетом (1) имеем

$$\Delta = P(2N^2 b/(1+ak/b) + S^2 a/(1-2k))/(EF_0). \tag{3}$$

Меняя коэффициент k в пределах $-b/a < k < 0,5$, можно добиться минимального (при постоянном объеме стержней) прогиба. Из условия $d\Delta/dk = 0$ получаем два значения

$$k_1 = b(2d\,\mathrm{tg}\varphi - a + 2b)/(a^2 + 4b^2 - 2a\,d\,\mathrm{tg}\varphi), \tag{4}$$

$$k_2 = b(2d\,\mathrm{tg}\varphi - a - 2b)/(a^2 - 4b^2 - 2a\,d\,\mathrm{tg}\varphi), \tag{5}$$

где $d = \sqrt{c^2 - a^2/4} = \sqrt{b^2 - h^2 - a^2/4}$. Зависимость оптимального коэффициента перераспределения масс от числа стержней при $a = b = 5м,\ h = 4м$ представлена на рисунке 6:

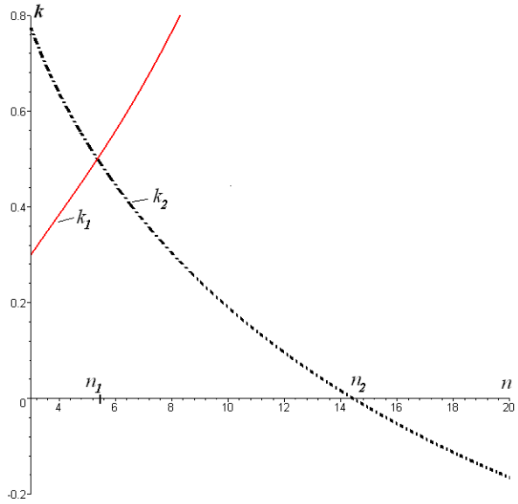

Рис. 6

Для небольшого числа стержней коэффициент перераспределения согласно решению (4) растет, не доходя до значения 0,5, при котором стержни n-угольника уменьшаются в сечении до нуля. При $n = n_1 = \pi / \mathrm{arctg}(2d/a)$ решения (4) и (5) совпадают. Затем становится справедливым решение (5), и коэффициент уменьшается до нуля при $n = n_2 = \pi / \mathrm{arctg}(2d/(a+2b))$. В практических расчетах значения n_1 и n_2 округляются до целых нечетных величин.

Найденная зависимость (3) $\Delta(n)$ обнаруживает минимум. На рисунке 7 даны кривые при $EF_0 = 1$, $a = 5м,\ h = 4м,\ k = 0$. Уравнение $d\Delta / dn = 0$ допускает аналитическое решение

$$n^* = \pi / \mathrm{arctg}(\sqrt{(2b/a)^2 + (2h/a)^2 - 1}). \tag{6}$$

Как и прежде, в практических расчетах это значение округляется до целого нечетного числа. Заметим, что решение (6) не зависит от параметра перераспределения площадей k. На рисунке 8 даны кривые (6) при $h = 4м$. Очевидно, в пределе при $h \to \infty$ или $b \to \infty$ имеем $n^* = 2$, однако эта величина не представляет практический интерес, так как данная конструкция реализуется при нечетных $n \geq 3$.

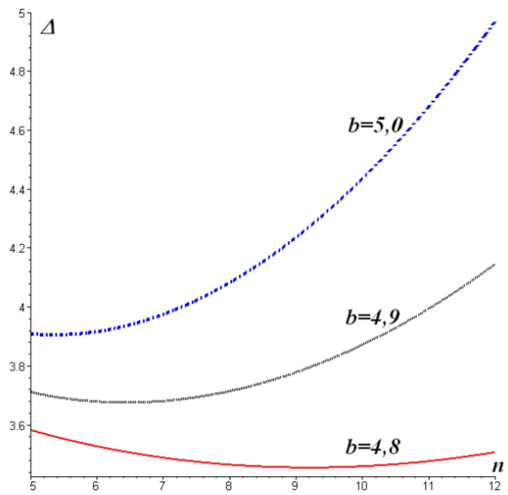

Рис. 7

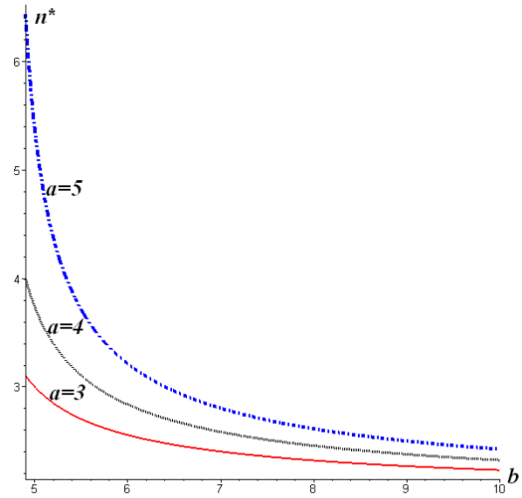

Рис. 8

Литература

1. *Кирсанов М.Н.* Особенности аналитического расчета пространственных стержневых систем. // Строительная механика и расчет сооружений. №5, 2011. С. 11-15.
2. *Кирсанов М. Н*. Статический расчет и анализ пространственной стержневой системы // Инженерно-строительный журнал. 2011. №6(24). С. 28-34
3. *Кирсанов М.Н.* Аналитический расчет пространственной стержневой системы//Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2012. №1. С. 49-53
4. *Кирсанов М. Н.* Практика программирования в системе Maple. — М.: Издательский дом МЭИ, 2011. – 208 с.