

**СТАТИЧЕСКИЙ И КИНЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ПЛОСКОЙ РЕГУЛЯРНОЙ  
БАЛОЧНОЙ ФЕРМЫ С ДВОЙНОЙ РЕШЕТКОЙ**

М. Н. Кирсанов

Национальный исследовательский университет «МЭИ»  
Россия, г. Москва

---

Д-р физ.-мат. наук, профессор кафедры робототехники, мехатроники, динамики и прочности машин,  
тел.: +7(495)362-73-14, e-mail: c216@ya.ru

---

Предлагается схема статически определимой регулярной балочной фермы решетчатого вида. Обнаружен и исследован случай кинематического вырождения конструкции от числа панелей. Для сосредоточенной и распределенной по нижнему поясу нагрузок методом индукции с привлечением системы символьной математики выводится зависимость прогиба фермы от числа ее панелей. Прогиб вычисляется по формуле Максвелла-Мора. Полученная зависимость имеет вид полинома по числу панелей с переменными, зависящими от четности числа панелей. Получена также формула зависимости величины горизонтального сдвига подвижной опоры.

**Ключевые слова:** ферма, кинематическая изменяемость, прогиб, аналитическое решение, индукция, Maple

**Введение.** Аналитические зависимости прогиба конструкции от ее геометрии, нагрузок и свойств материала позволяют точнее и проще проектировать новые и рассчитывать существующие фермы без потери точности и увеличения затрат машинного времени при усложнении системы. Одним из самых распространенных методов вывода искомых формул для регулярных ферм (плоских и пространственных) является метод индукции. Метод заключается в последовательном расчете усилий и прогибов конструкции с различным увеличивающимся числом ячеек периодичности. Полученные формулы можно обобщить на произвольный случай с помощью операторов какой-либо компьютерной символьной математики, например, Maple [1]. Некоторые схемы плоских статически определимых регулярных ферм и зависимости прогиба от числа панелей содержатся в справочниках [1, 2].

**Схема фермы. Постановка задачи.** Пролет фермы с  $2n$  панелями высотой  $2.5h$  равен  $L=2na$ , где  $n=2, 3, 4, \dots$  — число ячеек периодичности в половине пролета. Крайние ячейки имеют высоту  $2h$  и содержат по две стойки. Решетка фермы двойная, общая длина всех стержней равна  $(10n+8)c+(4n+3)a+4h$ , (рис. 1). Здесь обозначено:  $c = \sqrt{a^2 + h^2}$ . Число стержней в ферме, включая три стержня, моделирующие опоры, равно  $n_R = 8n + 10$ . Ставится задача вывести формулу для прогиба среднего узла фермы в зависимости от числа панелей. Аналогичные задачи для плоских ферм решались в системе компьютерной математики методом индукции в работах [4-8]. В работах [9] этим же методом дан вывод формул для прогиба пространственных ферм. Собственные частоты плоских ферм в зависимости от числа панелей определялись в [10-11]. Одна из первых работ, в которой приводится аналитически точный вывод формулы для собственных колебаний плоской регулярной стержневой консоли с крестообразной решеткой — это монография профессора В. А. Игнатъева [13]. Решение по-

лучено без использования компьютерной математики. Вопросы существования регулярных статически определимых ферм ставились и частично решались в трудах Hutchinson R.G. и Fleck N. A. [14,15].

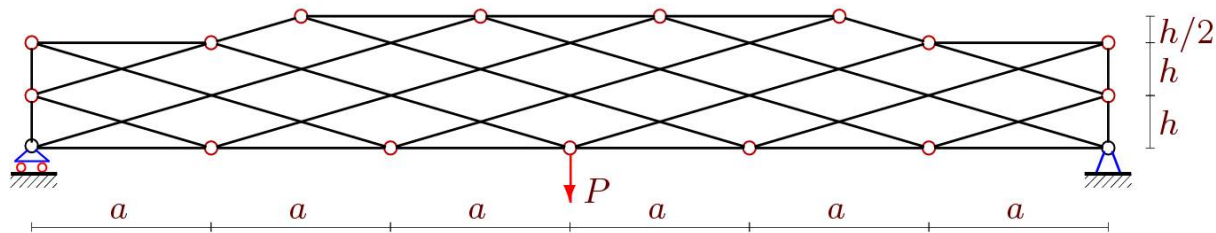


Рис. 1. Ферма, нагруженная силой в среднем узле нижнего пояса,  $n = 3$

Схема фермы статически определимая. Кинематическая изменяемость обнаруживается при расчете усилий в стержнях для  $n=2, 5, 6, 7, 10, 11, 12...$  При таких значениях числа панелей определитель системы линейных уравнений равновесия узлов (включая два опорные узла) обращается в ноль, что соответствует кинематическому вырождению. Подтверждает этот факт схема возможных скоростей узлов на рисунке 2 при  $n = 2$ . Стержни 1-2, 1-6, 6-8, 2-3, 7-8, 8-9, 9-5 и стержни им симметричные совершают вращательные движения вокруг неподвижных, либо мгновенно неподвижных точек. Стержни 8-4 и 2-11 имеют мгновенно поступательное движение. Соотношение скоростей на диаграмме следует из рассмотрения мгновенных центров скоростей:  $v/a = u/h = 2u'/c$ . Наиболее простой проверкой картины распределения скоростей является проверка равенства проекций скоростей узлов на отрезок (стержень) их соединяющий. Аналогичные картины распределения скоростей можно построить и для других исключительных случаев, соответствующих обнаруженной кинематической изменяемости.

Для того, чтобы в последовательность рассчитываемых ферм не попали отмеченные значения  $n$ , введем функцию  $n = (10k - 3(-1)^k - 1) / 4$ , принимающую на множестве натуральных  $k$  числа 3, 4, 8, 9, 13, 14 ... Это позволяет для разных  $k$  возможность получить последовательность решений, обобщить их, и вывести искомую зависимость прогиба от условного числа панелей  $k$ .

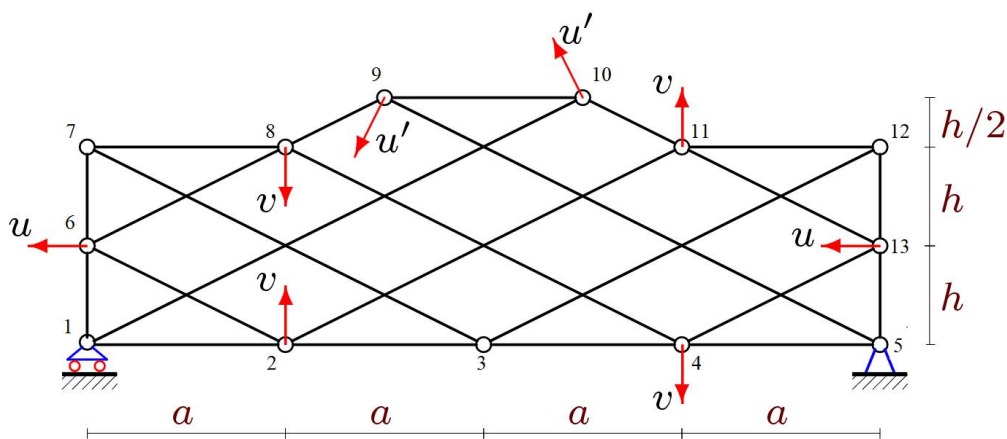


Рис. 2. Кинематически изменяемый вариант схемы,  $n = 4$

**Расчет усилий.** Усилия в стержнях для получения искомой аналитической зависимости можно определить в системе Maple, пользуясь программой [14]. Алгебраическая система уравнений равновесия узлов записывается и решается в матричном виде  $\mathbf{G} \bar{\mathbf{S}} = \bar{\mathbf{B}}$  с помощью встроенных операторов системы Maple. Элементы матрицы  $\mathbf{G}$  — это направляющие косинусы усилий, рассчитываемые по координатам узлов;  $\bar{\mathbf{B}}$  — вектор нагрузок,  $\bar{\mathbf{S}}$  вектор уси-

лий в стержнях. Нечетные номера элементов вектора нагрузок соответствуют вертикальным нагрузкам, четные — горизонтальным. Решение в символьной форме находится в виде:  $\bar{S} = \mathbf{G}^{-1}\bar{B}$ . Смещение узла  $C$  по вертикали определяется по формуле Максвелла - Мора в предположении о равенстве жесткостей стержней:

$$\Delta = \sum_{j=1}^{n_R-3} \frac{S_j s_j l_j}{EF}. \quad (1)$$

Приняты следующие обозначения:  $s_j$  — усилие в этом же стержне от действия единичной вертикальной силы, приложенной к шарниру  $C$  в середине пролета,  $S_j$  — усилие в стержне  $j$  фермы от действия внешней нагрузки,  $l_j$  — длина стержня  $j$ .

**Прогиб.** Рассмотрим случай загрузки нижнего пояса (рис. 3).

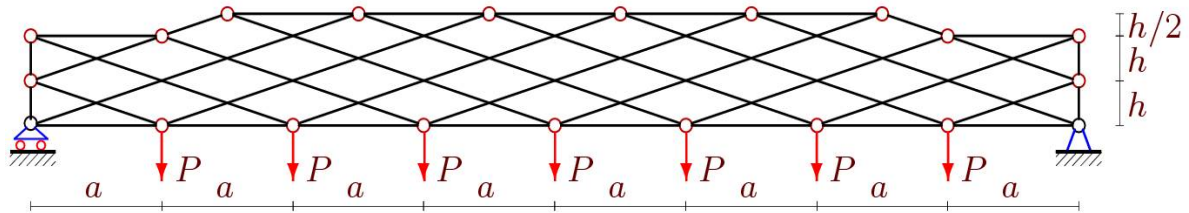


Рис. 3. Ферма, нагруженная силой в среднем узле нижнего пояса,  $n = 4$

Последовательно решая задачу о прогибе фермы с  $n=1, 2, 3, \dots$  панелями в случае действия сосредоточенной нагрузки в середине пролета (рис. 1), получаем серию решений:

$$\begin{aligned} \Delta(1) &= P(59a^3 + 109c^3 + 36h^3) / (2h^2 EF), \\ \Delta(2) &= -2P(4a^3 + 25c^3 + 2h^3) / (h^2 EF), \\ \Delta(3) &= 2P(228a^3 + 218c^3 + 27h^3) / (h^2 EF), \\ \Delta(4) &= P(691a^3 - 359c^3 - 8h^3) / (2h^2 EF), \\ \Delta(5) &= 5P(959a^3 + 473c^3 + 36h^3) / (2h^2 EF), \\ &\dots \end{aligned} \quad (2)$$

Общий вид прогиба фермы под действием равномерной нагрузки по нижнему поясу имеет вид

$$\Delta(n) = P(C_1 a^3 + C_2 c^3 + C_3 h^3) / (h^2 EF). \quad (3)$$

Коэффициенты в этом выражении находятся как общие члены последовательностей сомножителей при  $a^3, c^3, h^3$  решений (2):

$$\begin{aligned} C_1 &= (250k^4 - 100(3(-1)^k + 1)k^3 + 2(409 - 531(-1)^k)k^2 - 8(45(-1)^k + 1)k - 3(-1)^k + 147) / 96, \\ C_2 &= (30(29 - 44(-1)^k)k^2 - 6(67(-1)^k + 1)k + 93(-1)^k + 123) / 48, \\ C_3 &= 9(1 - (-1)^k)k - 2(-1)^k - 2. \end{aligned} \quad (4)$$

Порядок определения общих членов в системе Maple следующий. Сначала по числовым значениям элементов последовательностей составляется соответствующее рекуррентное уравнение. Затем с помощью оператора `rsolve` находится искомым общий член. Для коэффициента  $C_1$  уравнение получается девятого порядка

$$C_{1,k} = C_{1,k-1} + 4C_{1,k-2} - 4C_{1,k-3} - 6C_{1,k-4} + 6C_{1,k-5} + 4C_{1,k-6} - 4C_{1,k-7} - C_{1,k-8} + C_{1,k-9}.$$

Выражения для коэффициентов в (3) в случае сосредоточенной нагрузки (рис. 1) имеют вид

$$\begin{aligned} C_1 &= (20k^3 - 6(3(-1)^k + 1)k^2 + 2(128 - 51(-1)^k)k - 69(-1)^k + 33) / 24, \\ C_2 &= (10(19 - 8(-1)^k)k - 53(-1)^k + 17) / 8, \\ C_3 &= 7 - 3(-1)^k. \end{aligned} \quad (5)$$

Рекуррентные уравнения для других коэффициентов получаются несколько проще. Таким образом, формула (3) с коэффициентами (4) или (5) дает искомое решение для двух вариантов нагружения.

**Смещение подвижной опоры.** Под действием вертикальной нагрузки подвижная опора смещается. Смещение для случая равномерной нагрузки находится по той же формуле Максвелла – Мора (1), где  $s_j$  – усилия от действия единичной горизонтальной силы, приложенной к левой опоре. Приведем окончательную формулу:

$$\delta = Pa^2(50k^3 - 15(3(-1)^k + 1)k^2 + (33(-1)^k - 35)k + 6(-1)^k + 6) / (12hEF).$$

**Распределение усилий в стержнях конструкции.** Графические возможности системы Maple позволяют получить картину распределения усилий по стержням фермы. Рассмотрим случай нагрузки по нижнему поясу. Синим цветом обозначены сжатые стержни,  $S_i < 0, i = 1, 2, \dots, n_R$ , красным — растянутые (рис. 4). Усилия относятся к силе  $P$  и округлены до десятых долей. Наибольшие сжимающие усилия оказываются в крайних стержнях средней части верхнего пояса, растянутые — в стержнях решетки и в стержнях нижнего пояса. Характерно то, что, как и в нижнем, так и в верхнем поясах есть и растянутые и сжатые стержни. Это, как правило, наблюдается в фермах с двойными крестообразными решетками, в которых стержни решетки перераспределяют усилия между поясами фермы. В простых балочных фермах с такой же нагрузкой все стержни поясов либо сжаты, либо растянуты. Такой же эффект, но выраженный не так ярко, наблюдается для фермы с большим числом панелей (рис. 5).

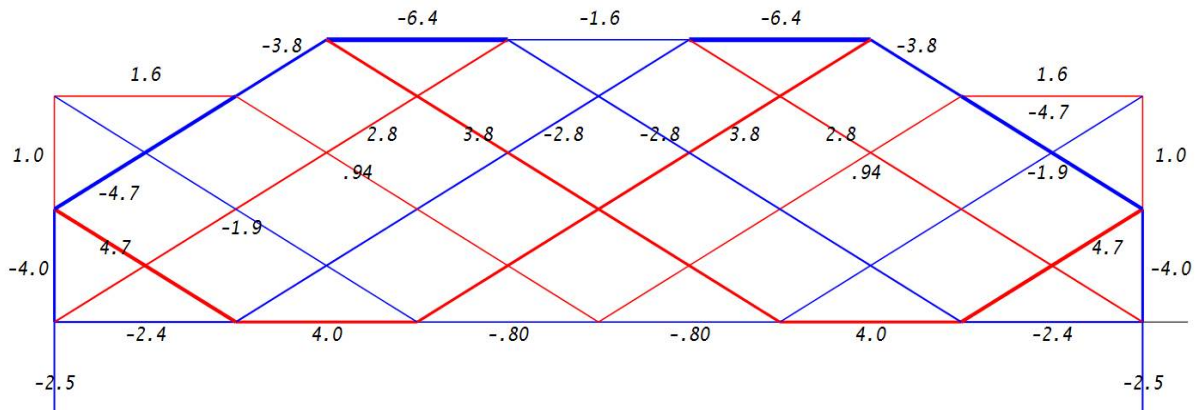


Рис. 4. Распределение усилий в стержнях фермы при загрузении нижнего пояса,  $n=3, a=8\text{м}, h=5\text{ м}$

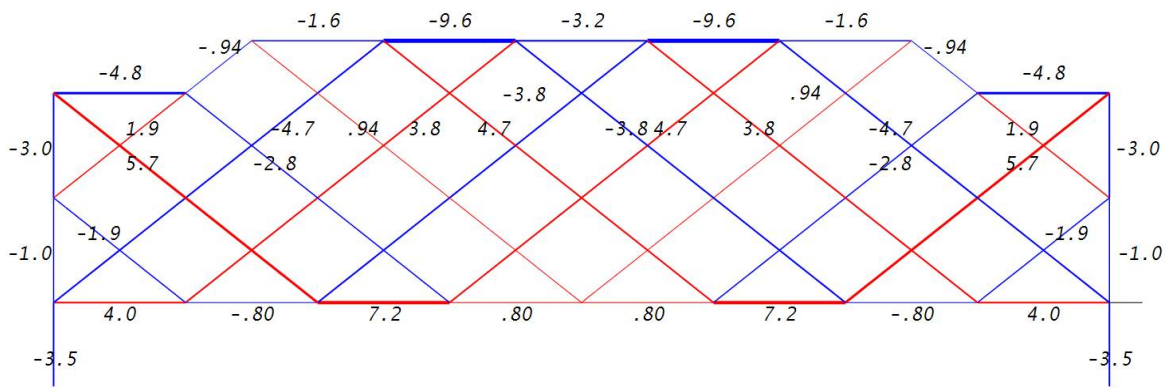


Рис. 5. Распределение усилий в стержнях фермы при загрузении нижнего пояса,  $n=4$ ,  $a=8\text{м}$ ,  $h=5\text{ м}$

**Анализ полученных результатов.** Построим графики найденной зависимости (3) с коэффициентами (4). Рассмотрим случай постоянного, не зависящего от числа панелей, пролета:  $L = 2an = 100\text{м}$ . Фиксируем также суммарную величину нагрузки, введя безразмерный относительный прогиб:  $\tilde{\Delta}' = \Delta EF / (P_0 L)$ , где  $P_0 = (2n - 1)P$ . Зависимость обнаруживает существенную нелинейность и большие скачки по числу панелей (рис. 6). Рисунки кривых выполнены условно. В действительности, решение представлено отдельными точками, соответствующими целым значениям  $k$ , а отрезки, соединяющие эти точки, даны только для наглядности. Несмотря на это видно, что с увеличением числа панелей прогибы растут, при этом для четных  $k$  рост монотонный, а для нечетных сначала прогиб убывает, затем растет. При этом скачки относительного прогиба весьма существенные. Наибольший скачок (в 8 раз) наблюдается от  $k=4$  до  $k=5$  при малой высоте фермы ( $h=2\text{м}$ ).

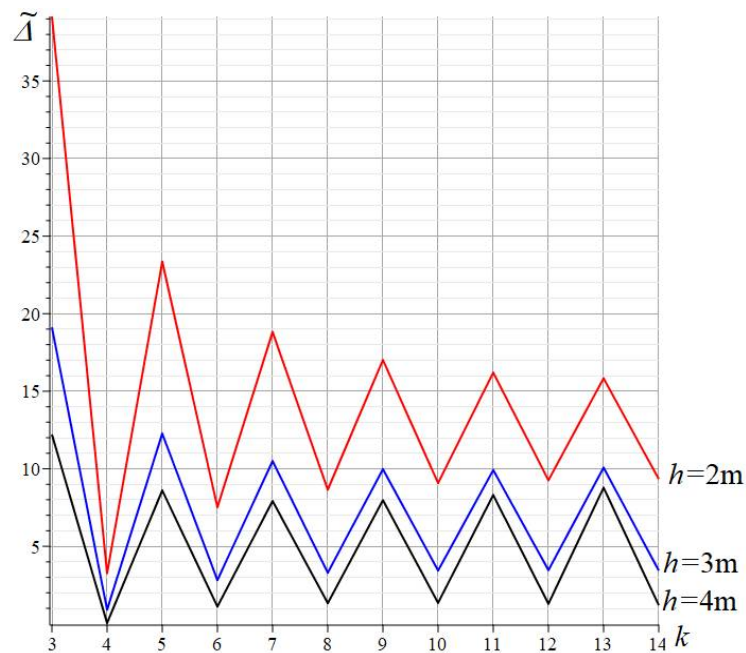


Рис. 6. Зависимость относительного прогиба от числа панелей  $n=2k$  для распределенной по нижнему поясу нагрузки

Аналогичные кривые обнаруживает и зависимость прогиба от числа панелей при действии на ферму сосредоточенной нагрузки (рис. 1).

**Заключение.** Рассмотрена плоская схема статически определимой балочной фермы решетчатого типа. Обнаружено кинематическое вырождение конструкции при определенном числе панелей. Особенностью этой конструкции является уменьшение высоты фермы по ее концам в области опорной части. Получены аналитические зависимости прогиба от числа панелей для равномерной и сосредоточенной нагрузки и величина сдвига подвижной опоры. Зависимости имеют вид полиномов четвертой и второй степеней с коэффициентами, зависящими от четности числа панелей.

Графики полученных решений имеют резкие скачки зависимости прогиба от числа панелей. Полученные формулы могут быть полезны в инженерной практике, а скачкообразный характер решения позволяет оптимизировать по жесткости конструкцию выбором подходящего числа панелей.

Исследование выполнено при поддержке Междисциплинарной научно-образовательной школы Московского университета «Фундаментальные и прикладные исследования космоса».

#### Библиографический список

1. Kirsanov M. Trussed Frames and Arches: Schemes and Formulas. – Cambridge Scholars Publishing UK, 2020.
2. Осадченко Н.В. Аналитические решения задач о прогибе плоских ферм арочного типа // *Строительная механика и конструкции*. – 2018. – №1 (16). – С.12–33.
3. Тиньков Д.В. Формулы для расчёта прогиба вспарушенной балочной раскосной фермы с произвольным числом панелей // *Строительная механика и конструкции*. – 2016. – № 2 (13). – С. 10–14.
4. Суд И. Б. Формулы для прогиба шпренгельной балочной фермы с произвольным числом панелей // *Строительная механика и конструкции*. – 2020. – №2 (25). – С. 25–32.
5. Овсянникова В.М. Зависимость деформаций балочной фермы трапециевидной формы от числа панелей // *Строительная механика и конструкции*. – 2020. – №3 (26). – С.13–20.
6. Воробьев О.В. О методах получения аналитического решения для проблемы собственных частот шарнирных конструкций // *Строительная механика и конструкции*. – 2020. – № 1 (24). – С. 25–38.
7. Доманов Е. В. Аналитическая зависимость прогиба пространственной консоли треугольного профиля от числа панелей // *Научный альманах*. –2016. – №6-2 (19). – С. 214-217 (DOI: 10.17117/na.2016.06.02.214)
8. Ларичев С.А. Индуктивный анализ влияния строительного подъема на жесткость пространственной балочной фермы // *Trends in Applied Mechanics and Mechatronics*.– М: Инфра-М, 2015. – Т. 1. – С. 4-8.
9. Vorobev O. Bilateral analytical estimation of first frequency of a plane truss // *Construction of Unique Buildings and Structures*. – 2020. – Vol. 92. – Article – No 9204 (doi: 10.18720/CUBS.92.4).
10. Петриченко Е.А. Нижняя граница частоты собственных колебаний фермы Финка // *Строительная механика и конструкции*. – 2020. – №3 (26). –С. 21–29.
11. Игнатъев В.А. Расчет регулярных стержневых систем. – Саратов: Саратовское высшее военно-химическое военное училище, 1973.
12. Hutchinson R. G., Fleck N. A. Microarchitected cellular solids – the hunt for statically determinate periodic trusses // *ZAMM Z. Angew. Math. Mech*. – 2005. – Vol. 85 – № 9. – P. 607 – 617 (DOI: 10.1002/zamm.200410208).

13. Hutchinson R.G., Fleck N. A. The structural performance of the periodic truss // *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*. – 2006. – Vol. 54. – Issue 4. – P. 756-782. (doi:10.1016/j.jmps.2005.10.008).
14. Buka-Vaivade, K. Kirsanov M. N., Serdyuk D. O. Calculation of deformations of a cantilever frame planar truss model with an arbitrary number of panels // *Vestnik MGSU*. – 2020. – Vol. 15. – № 4. – P. 510—517 (DOI: 10.22227/1997-0935.2020.4.510-517).

#### Reference

1. Maple software package. *Advanced Mathematics for Engineering Students*. 2022. Pp. 389–393. DOI:10.1016/B978-0-12-823681-9.00023-X.
2. Kirsanov M. *Planar Trusses: Schemes and Formulas*. Cambridge Scholars Publishing UK. 2019.
3. Kirsanov M. *Trussed Frames and Arches: Schemes and Formulas*. Cambridge Scholars Publishing UK. 2020.
4. Osadchenko N.V. Analytical solutions to the problems of deflection of flat trusses of arch type. *Structural Mechanics and Structures*. 2018. Vol.1. No. 16. Pp.12–33.
5. Tinkov D.V. Formulas for calculating the deflection of a braced girder with an arbitrary number of panels. *Structural Mechanics and Structures*. 2016.Vol. 2.No.13 (13). Pp. 10–14.
6. Sud I.B. Formulas for the deflection of a truss girder with an arbitrary number of panels. *Structural Mechanics and Structures*. 2020. No. 2 (25). Pp. 25–32.
7. Ovsyannikova V.M. Dependence of deformations of a trapezoidal girder on the number of panels. *Structural Mechanics and Structures*. 2020. No. 3 (26). Pp.13–20.
8. Vorobyev O. V. On methods for obtaining an analytical solution for the problem of natural frequencies of hinged structures. *Structural Mechanics and Structures*. 2020. Vol. 1. No. 24. Pp. 25–38.
9. Domanov E.V. Analytical dependence of the deflection of the spatial console of a triangular profile on the number of panels. *Scientific Almanac*. 2016. No. 6-2 (19). S. 214-217. DOI: 10.17117 / na.2016.06.02.214
10. Larichev S.A. Inductive analysis of the effect of building lifting on the stiffness of a spatial girder // *Trends in Applied Mechanics and Mechatronics*. M: Infra-M. 2015, T. 1.S. 4-8.
11. Vorobev O. Bilateral analytical estimation of first frequency of a plane truss. *Construction of Unique Buildings and Structures*. 2020. Vol. 92. Article No. 9204 doi: 10.18720/CUBS.92.4
12. Petrichenko E.A. The lower limit of the frequency of natural oscillations of the Fink truss. *Structural mechanics and structures*. 2020. No. 3 (26). Pp. 21–29.
13. Ignatiev, V.A. *Raschet regulyarnykh sterzhnevnykh sistem* [Calculation of regular rod systems]. Saratov Higher Military Chemical Military School. Saratov, 1973.
14. Hutchinson R. G., Fleck N. A. Microarchitected cellular solids – the hunt for statically determinate periodic trusses. *ZAMM Z. Angew. Math. Mech*. 2005. 85, No. 9. Pp. 607 – 617.DOI: 10.1002/zamm.200410208
15. Hutchinson R.G., Fleck N. A. The structural performance of the periodic truss // *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*,.Vol. 54. Issue 4. April 2006. Pp. 756-782. doi:10.1016/j.jmps.2005.10.008
16. Buka-Vaivade, K. Kirsanov M. N., Serdyuk D. O. Calculation of deformations of a cantilever frame planar truss model with an arbitrary number of panels. *Vestnik MGSU*. 2020. V. 15. No. 4. Pp. 510—517. DOI: 10.22227/1997-0935.2020.4.510-517.

# STATIC AND KINEMATIC ANALYSIS OF A PLANAR REGULAR BEAM TRUSS WITH A DOUBLE LATTICE

M. N. Kirsanov

National Research University «MPEI»  
Moscow, Russia

---

Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor of the Department of Robotics, Mechatronics, Dynamics and Strength of Machines, tel.: +7(495)362-73-14, e-mail: c216@ya.ru

---

A scheme of a statically determinate regular girder truss of a lattice type is proposed. The case of kinematic degeneration of the structure from the number of panels is discovered and investigated. For concentrated and distributed loads over the lower belt, the dependence of the deflection of the truss on the number of its panels is derived by induction with the involvement of a system of symbolic mathematics. The deflection is calculated using the Maxwell – Mohr formula. The resulting dependence has the form of a polynomial in the number of panels with variables depending on the parity of the number of panels. A formula for the dependence of the magnitude of the horizontal shift of the movable support is also obtained.

**Keywords:** truss, kinematic variability, deflection, analytical solution, induction, Maple