

DOI 10.36622/VSTU.2022.32.1.003

УДК 624.04

МОДЕЛЬ И АНАЛИТИЧЕСКИЙ РАСЧЕТ ФЕРМЫ ПРОСТРАНСТВЕННОГО ШЕСТИГРАННОГО КУПОЛА

М. Н. Кирсанов

Национальный исследовательский университет «МЭИ»
Россия, г. Москва

Д-р физ.-мат. наук, профессор кафедры робототехники, мехатроники, динамики и прочности машин,
тел.: +7(495)362-73-14; e-mail: c216@ya.ru

Предлагается схема статически определимой фермы шестигранного купола с опорами на два ряда внешнего контура. Выводятся формулы для расчета усилий в наиболее сжатых и растянутых стержнях в зависимости от числа панелей. Приводится картина распределения усилий по стержням конструкции. Рассмотрен алгоритм вывода формулы для прогиба купола под действием вертикальной нагрузки. Использована формула Максвелла-Мора. Нагрузка равномерно распределена по узлам фермы либо приложена к вершине купола. Вывод основывается на индуктивном обобщении последовательности решения для конструкций с увеличивающимся числом панелей. Коэффициенты искомых формул вычисляются как общие члены последовательностей коэффициентов в частных решениях. Решение уравнений равновесия узлов и все преобразования производятся в программе, написанной на языке системы символьной математики Maple. Найдены линейные асимптотики решений.

Ключевые слова: пространственная ферма, купол, индукция, Maple, асимптотика, прогиб

Введение. В большинстве конструкций легких покрытий общественных зданий, промышленных и торговых предприятий чаще всего используют ферменные конструкции. Такие конструкции удобны, недороги в сборке, долговечны и допускают многовариантность.

Расчет деформаций, прочности и устойчивости ферменных конструкций традиционно ведется в численной форме с использованием специальных компьютерных программ методом конечных элементов [1, 2]. При этом существуют и аналитические решения, применяемые для упрощенных моделей статически определимых сооружений [3, 4]. Ценность таких расчетов зависит от широты охвата рассматриваемого класса конструкций. В частности, при расчете регулярных ферм учет числа панелей в расчетной формуле существенно расширяет область применимости формулы и позволяет кроме того проводить анализ оптимальности проектируемой конструкции, например, выбором соотношения длины панели и числа панелей в сооружении. Вопросы существования и расчета статически определимых регулярных плоских и пространственных стержневых конструкций впервые рассмотрены в работах Р. Хатчинсона и Н. Флека [5, 6]. Схемы регулярных плоских ферм и формулы для расчета их прогиба под действием различных нагрузок собраны в справочнике автора [7]. Расчетные формулы получены методом индукции в системе символьной математики Maple. Известны также отдельные аналитические решения задач статики для плоских регулярных ферм [8-11]. Расчет прогиба пространственных ферм в аналитической форме, как правило, сложнее [12]. В [13, 14] по методу Донкерлея выведены формулы для нижней границы первой частоты собственных колебаний плоских статически определимых ферм.

В настоящей работе предлагается новая схема регулярной статически определимой конструкции пространственного покрытия. Ставится задача вывести аналитические зависимости деформаций фермы от числа панелей. Полученные формулы могут быть использованы для оценки численных решений, особенно для сооружений с большим числом элементов, для которых в численных расчетах появляется неизбежная погрешность накопленных ошибок округления.

Схема конструкции. Основой конструкции является шестигранная стержневая пирамида в форме купола. Пирамида опирается на основание из двух стержневых контуров. Внешний контур из $6n$ стержней длиной a опирается на стойки высотой $2h$. Внутренний контур имеет высоту h и опорные стойки по всей длине, кроме угловых точек. Контур соединены $6(2n-1)$ раскосами длиной $c = \sqrt{a^2 + h^2}$. Узел A закреплен на две дополнительные горизонтальные связи. Узел B имеет одну такую связь. Общее число стержней конструкции, включая связи и стойки, равно $n_s = 36n - 15$. Из уравнений равновесия $K = 12n - 5$ внутренних узлов конструкции в проекции на оси координат можно найти усилия во всех стержнях, опорных стойках и связях. Конструкция фермы статически определимая. Расчет будем проводить в системе Maple, позволяющей получать как численное решение, так и решение в символьной форме.

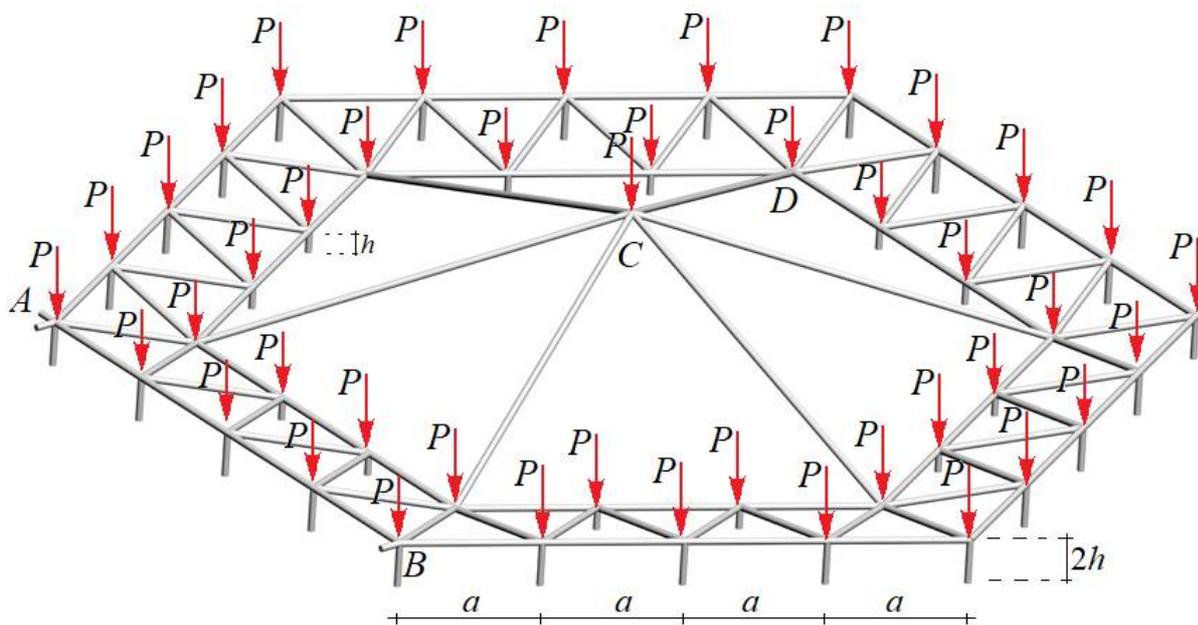


Рис. 1. Равномерно распределенная узловая нагрузка, $n=4$

Расчет усилий. Начало координат выбирается на оси симметрии конструкции на уровне внутреннего контура. Ввод координат в программу [15] производится с учетом круговой периодичности фермы.

Координаты узлов внешнего контура имеют вид (рис. 2):

$$\begin{aligned} x_{i+jn} &= L \cos \phi - a(i-1) \cos \beta, \\ y_{i+jn} &= L \sin \phi + a(i-1) \sin \beta, \\ z_{i+jn} &= h, \quad i = 1, \dots, n, \quad j = 0, \dots, 5, \end{aligned}$$

где $L = na$, $\phi = j\pi/3$, $\beta = \pi/3 - \phi$.

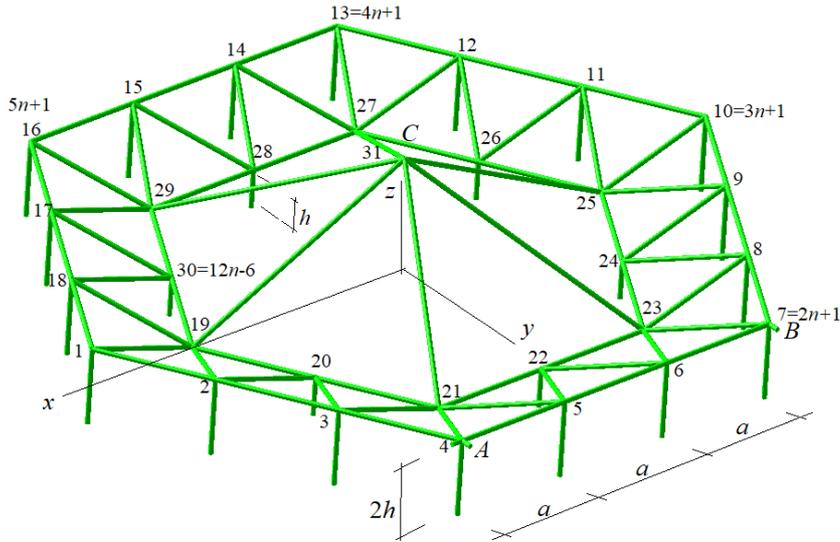


Рис. 2. Нумерация узлов фермы, $n=3$

Координаты шарниров меньшего (нижнего) контура:

$$\begin{aligned} x_{i+j(n-1)+6n} &= (L-a) \cos \phi - a(i-1) \cos \beta, \\ y_{i+j(n-1)+6n} &= (L-a) \sin \phi + a(i-1) \sin \beta, \\ z_{i+j(n-1)+6n} &= 0, \quad i = 1, \dots, n-1, j = 0, \dots, 5. \end{aligned}$$

Вершина купола C имеет следующие координаты:

$$x_{12n-5} = y_{12n-5} = 0, \quad z_{12n-5} = 2(n-1)h.$$

Координаты шарниров, к которым крепятся снизу опорные стойки внешнего контура:

$$x_{i+12n-5} = x_i, \quad y_{i+12n-5} = y_i, \quad z_{i+12n-5} = -h, \quad i = 1, \dots, 6n.$$

Координаты нижних шарниров стоек внутреннего контура:

$$\begin{aligned} x_t &= x_{i+(5+j)n-j+2}, \quad y_t = x_{i+(5+j)n-j+2}, \quad z_t = -h, \\ t &= i + 18n - 5 + (n-2)(j-1), \quad i = 1, \dots, n-2, j = 1, \dots, 6. \end{aligned}$$

Для определения порядка соединения стержней в шарнирах введем ориентированные списки вершин концов стержней $\Phi_i, i = 1, \dots, n_s$. Аналогично задаются графы в дискретной математике. Стержни внешнего контура, например, задаются списками: $\Phi_i = [i, i+1], i = 1, \dots, 6n-1, \Phi_{6n} = [6n, 1]$. Стержни внутреннего контура:

$$\Phi_{i+6n} = [i+6n, i+6n+1], \quad i = 1, \dots, 6n-7, \Phi_{12n-6} = [12n-6, 6n+1].$$

Остальные стержни нумеруются аналогично.

Элементы матрицы коэффициентов системы линейных уравнений равновесия узлов \mathbf{G} вычисляются по данным координат и спискам концов стержней:

$$g_{x,i} = (x_{\Phi_{i,1}} - x_{\Phi_{i,2}}) / l_i, \quad g_{y,i} = (y_{\Phi_{i,1}} - y_{\Phi_{i,2}}) / l_i, \quad g_{z,i} = (z_{\Phi_{i,1}} - z_{\Phi_{i,2}}) / l_i, \quad i = 1, \dots, n_s + 3,$$

где $l_i = \sqrt{(x_{\Phi_{i,1}} - x_{\Phi_{i,2}})^2 + (y_{\Phi_{i,1}} - y_{\Phi_{i,2}})^2 + (z_{\Phi_{i,1}} - z_{\Phi_{i,2}})^2}$ — длина стержня с номером i . В число стержней включаются и подпорные угловые стержни в вершинах A и B . Матрица

коэффициентов заполняется по строкам. Каждые три строки соответствуют направляющим косинусам усилий с осями x, y, z соответственно:

$$G_{3\Phi_{i,1}-2,i} = g_{x,i}, \quad G_{3\Phi_{i,1}-1,i} = g_{y,i}, \quad G_{3\Phi_{i,1},i} = g_{z,i},$$

$$G_{3\Phi_{i,2}-2,i} = -g_{x,i}, \quad G_{3\Phi_{i,2}-1,i} = -g_{y,i}, \quad G_{3\Phi_{i,2},i} = -g_{z,i}.$$

Знак минус появляется за счет того, что вектор усилия, приложенный к узлу на одном конце стержня, противоположно направлен вектору усилия, приложенному к узлу на другом конце стержня.

Система уравнений равновесия узлов записывается в матричном виде $\mathbf{GS} = \mathbf{T}$, где \mathbf{S} вектор-столбец всех усилий в конструкции, включая и реакции опор. Длина вектора \mathbf{S} равна n_s . Такая же длина у вектора нагрузок \mathbf{T} . Проекция на ось x внешних сил, приложенных на узел i , записываются в элементы этого вектора T_{3i-2} , на ось y — в элементы T_{3i-1} . Вертикальные силы содержатся в элементах T_{3i} , $i = 1, \dots, K$. Решение матричного уравнения в символьной форме быстрее всего в системе Maple выполняется методом обратной матрицы: $\mathbf{S} = \mathbf{G}^{-1}\mathbf{T}$.

Распределение усилий по стержням конструкции в случае равномерной вертикальной узловой нагрузки представлено на рис. 3.

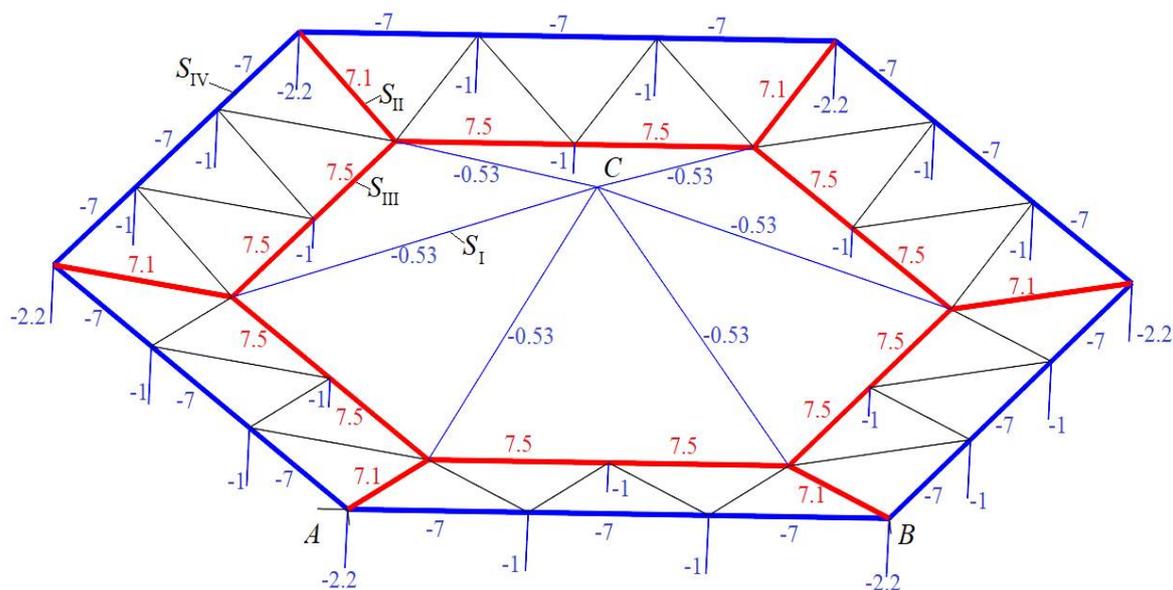


Рис. 3. Распределение усилий в стержнях фермы, $n=3$

Значения усилий отнесены к силе P и округлены до двух значащих цифр. Для наглядности синим цветом выделены сжатые стержни (их усилия меньше нуля). Красным цветом помечены растянутые стержни. Раскосы, соединяющие контуры — кроме угловых, при такой нагрузке не напряжены. Именно через угловые раскосы напряжение передается от стержней купола и внутреннего контура — к внешнему.

Наиболее сжатые элементы оказались на внешнем контуре. Наиболее растянутые элементы находятся на внутреннем контуре. Интересно отметить, что ни распределение усилий, ни сами усилия не зависят от числа панелей. Такие же усилия и реакции опор будут в ферме с другим числом панелей (рис. 4).

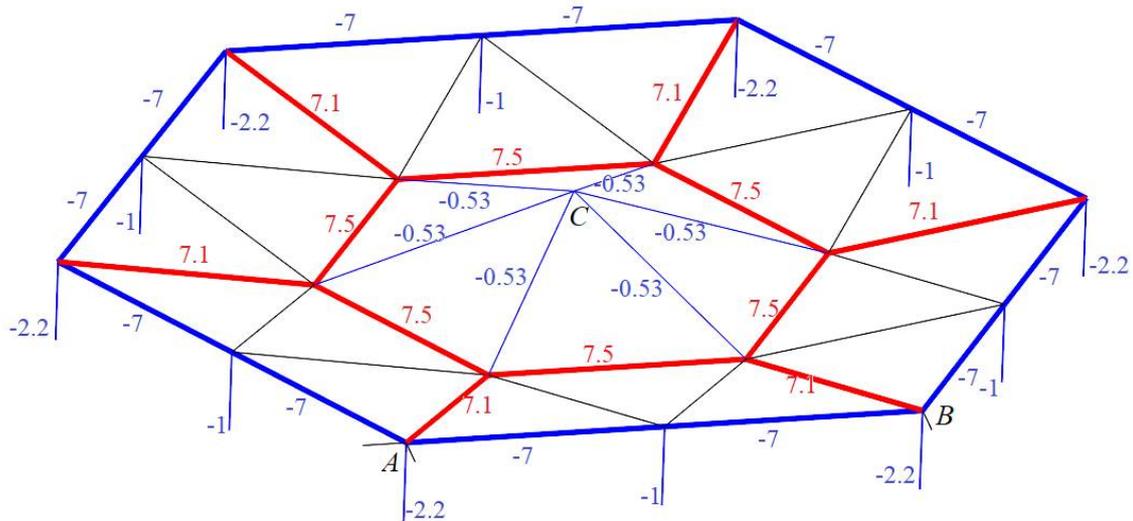


Рис. 4. Распределение усилий в стержнях фермы, $n=2$

По результатам расчета усилий в аналитической форме можно вывести формулы для усилий в характерных стержнях. Сжимающие усилия в стержнях купола по результату решения системы уравнений равновесия не зависят от числа панелей $S_I = -Pd / (12h)$, где $d = \sqrt{a^2 + 4h^2}$. Растягивающие усилия в угловых раскосах: $S_{II} = 7Pc / (6h)$, усилия стержней внутреннего контура $S_{III} = 5Pa / (4h)$, усилия во внешнем контуре $S_{IV} = 7Pa / (6h)$. Усилия во всех опорных стойках на внешнем контуре, кроме угловых, равны $-P$. Усилия стоек на внутреннем контуре также равны $-P$. Реакции опор в угловых стойках не зависят от размеров фермы и вычисляются по формуле $R_{coner} = 13P / 6$. При этом полученное решение легко проверить, записав сумму проекций на ось z всех реакций опор внешних сил, приложенных к $K = 12n - 5$ узлам конструкции:

$$6(n-1) \cdot P + 6(n-2) \cdot P + 6R_{coner} - (12n-5) \cdot P = 0.$$

Расчет прогиба. Прогиб конструкции в вершине C от действия распределенной нагрузки вычислим по формуле Максвелла - Мора:

$$\Delta_n = \sum_{j=1}^{n_s} \frac{S_j s_j l_j}{EF}, \quad (1)$$

где l_j — длина стержня, S_j — усилие от действия нагрузки, s_j — усилие от единичной вертикальной силы, приложенной к узлу C , в котором вычисляется прогиб, EF — продольная жесткость стержней. Последовательный расчет прогиба ферм с различным числом панелей n дает следующие формулы:

$$\Delta_2 = P(101a^3 + 28c^3 + 52h^3 + d^3) / (24h^2 EF),$$

$$\Delta_3 = P(87a^3 + 14c^3 + 26h^3 + d^3) / (12h^2 EF),$$

$$\Delta_4 = P(247a^3 + 28c^3 + 52h^3 + 3d^3) / (24h^2 EF),$$

$$\Delta_5 = P(80a^3 + 7c^3 + 13h^3 + d^3) / (6h^2 EF),$$

$$\Delta_6 = P(393a^3 + 28c^3 + 52h^3 + 5d^3) / (24h^2 EF), \dots$$

Операторы системы компьютерной математики Maple позволяют вычислить общие члены последовательностей коэффициентов при степенях a^3, c^3, d^3, h^3 и получить следующую итоговую формулу зависимости прогиба от числа панелей и размеров конструкции

$$\Delta_n = P(C_1 a^3 + C_2 c^3 + C_3 h^3 + C_4 d^3) / (h^2 EF), \quad (2)$$

где

$$C_1 = (73n - 45) / 24, C_2 = 7 / 6, C_3 = 13 / 6, C_4 = (n - 1) / 24. \quad (3)$$

По сравнению с известными аналогичными решениями, даже для плоских ферм [7–11, 15], решение получилось на редкость простым. Два коэффициента линейно зависят от числа панелей, а два вообще постоянные. В данном случае для получения общих членов последовательностей не обязательно использовать операторы Maple. Это упрощение объясняется, по-видимому, уже замеченной особенностью напряженного состояния конструкции, не зависящего от числа панелей (рис. 3, рис. 4).

Формула для прогиба угловой (не опертой на стойку) точки D внутреннего контура (рис.1) находится аналогичным образом. Соответствующие коэффициенты (2) для прогиба весьма близки к формулам (3) и имеют вид:

$$C_1 = (29n - 15) / 24, C_2 = 7 / 6, C_3 = 13 / 6, C_4 = 0. \quad (4)$$

Кривые, иллюстрирующие эти решения, построены на рисунке 5 для безразмерного прогиба $\Delta' = \Delta_n EF / (P_{sum} L)$, где $P_{sum} = P(12n - 5)$ при $L = na = 50\text{m}$.

Кривые имеют асимптоты, значения которых можно вычислить средствами Maple:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Delta'_C = h / (288L), \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \Delta'_D = 0.$$

Заключение. Предложена новая схема статически определимой пространственной фермы купольного типа. Подобная схема покрытия может быть использована в конструкциях цирков, аэровокзалов, складов. Простые и легко проверяемые расчетные формулы, справедливые при любом числе панелей, обеспечивают надежную проверку численных решений и применимы для предварительной оценки проектируемых сооружений.

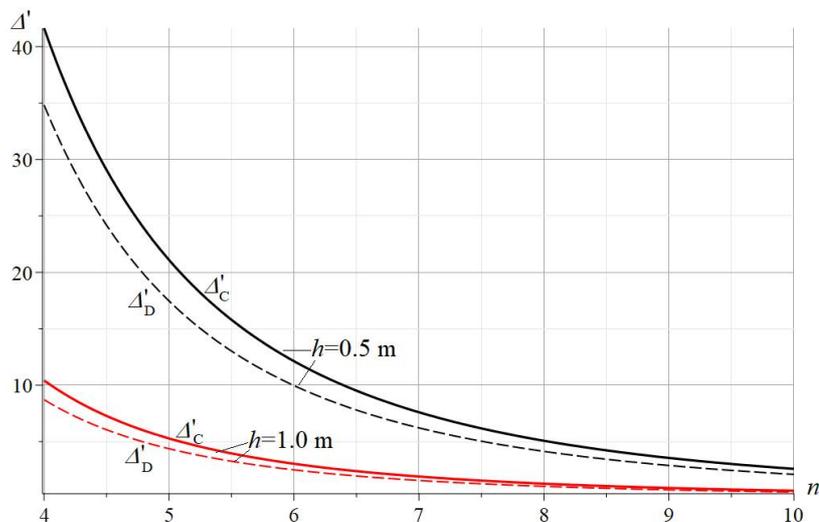


Рис. 5. Зависимости безразмерных прогибов в вершине C и узле D от числа панелей

Библиографический список

1. Козлов А.В., Козлов В.А. Напряженно-деформированное состояние составной конструкции с учетом податливости на сдвиг между железобетонной плитой и стальной балкой // *Строительная механика и конструкции*. 2021. №2 (29). С. 48–61.
2. Ефрюшин С.В., Ефанов А.Р. Оценка эффективности применения легких стальных тонкостенных конструкций в башенных сооружениях // *Строительная механика и конструкции*. 2021. №3 (30). С. 26–48.
3. Goloskokov, D.P., Matrosov, A. V. A Superposition Method in the Analysis of an Isotropic Rectangle. *Applied Mathematical Sciences*. 2016. 10(54). doi:10.12988/ams.2016.67211. URL: www.m-hikari.com <http://dx.doi.org/10.12988/ams.2016.67211> (date of application: 17.06.2020).
4. Goloskokov, D.P., Matrosov, A. V. Comparison of two analytical approaches to the analysis of grillages. 2015 International Conference on “Stability and Control Processes” in Memory of V.I. Zubov, SCP 2015 // *Proceedings*. 2015. Pp. 382–385. doi:10.1109/SCP.2015.7342169.
5. Hutchinson, R.G., Fleck, N.A. Microarchitected cellular solids — The hunt for statically determinate periodic trusses // *ZAMM Zeitschrift fur Angewandte Mathematik und Mechanik*. 2005. 85(9). Pp. 607–617. doi:10.1002/zamm.200410208.
6. Hutchinson, R.G., Fleck, N.A. The structural performance of the periodic truss // *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*. 2006. 54(4). Pp. 756–782. doi:10.1016/j.jmps.2005.10.008.
7. Kirsanov M. N. *Planar Trusses: Schemes and Formulas*. Cambridge Scholars Publishing, 2019. 206 p.
8. Dai Qiao. Analytical Dependence of Planar Truss Deformations on the Number of Panels // *AlfaBuild*. 2021. 17 Article No 1701. doi: 10.34910/ALF.17.1
9. Kitaev, S.S. Derivation of the formula for the deflection of a cantilevered truss with a rectangular diagonal grid in the computer mathematics system Maple // *Postulat*. 2018. 5–1. Pp. 43. URL: <http://e-postulat.ru/index.php/Postulat/article/view/1477> (date of application: 3.03.2021).
10. Ilyushin, A. The formula for calculating the deflection of a compound externally statically indeterminate frame // *Structural mechanics and structures*. 2019. 3(22). Pp. 29–38. URL: https://www.elibrary.ru/download/elibrary_41201106_54181191.pdf.
11. Комерзан Е.В., Свириденко О.В. Аналитический расчет прогиба плоской внешне статически неопределимой фермы с произвольным числом панелей // *Строительная механика и конструкции*. 2021. №2 (29). С. 29–37.
12. Kirsanov M.N. Deformations And Spatial Structure Vibrations Frequency of The Rectangular Contour Type Cover: Analytical Solutions // *Construction of Unique Buildings and Structures*; 2021. 98 Article No 9805. doi: 10.4123/CUBS.98.5
13. Petrenko V. The natural frequency of a two-span truss; 2021; *AlfaBuild*; 20 Article No 2001. doi: 10.34910/ALF.20.1
14. Vorobev O. Bilateral analytical estimation of first frequency of a plane truss // *Construction of Unique Buildings and Structures*. 2020. Vol. 92. Article No 9204 doi: 10.18720/CUBS.92.4

15. Buka-Vaivade, K., Kirsanov, M.N., Serdjuks, D.O. Calculation of deformations of a cantilever-frame planar truss model with an arbitrary number of panels // Vestnik MGSU. 2020. (4). Pp. 510–517. doi:10.22227/1997-0935.2020.4.510-517

References

1. Kozlov A.V., Kozlov V.A. Stress-strain state of a composite structure taking into account shear compliance between a reinforced concrete slab and a steel beam. *Stroitel'naya Mekhanika i Konstruktsii*. 2021. No. 2 (29). pp. 48–61.
2. Efrushin S.V., Efanov A.R. Evaluation of the effectiveness of the use of light steel thin-walled structures in tower structures. *Stroitel'naya mekhanika i konstruktsii*. 2021. No. 3 (30). pp. 26–48.
3. Goloskokov, D.P., Matrosov, A. V. A Superposition Method in the Analysis of an Isotropic Rectangle. *Applied Mathematical Sciences*. 2016. 10(54). doi:10.12988/ams.2016.67211. URL: www.m-hikari.com<http://dx.doi.org/10.12988/ams.2016.67211> (date of application: 17.06.2020).
4. Goloskokov, D.P., Matrosov, A. V. Comparison of two analytical approaches to the analysis of grillages. 2015 International Conference on “Stability and Control Processes” in Memory of V.I. Zubov, SCP 2015 - Proceedings. 2015. Pp. 382–385. doi:10.1109/SCP.2015.7342169.
5. Hutchinson, R.G., Fleck, N.A. Microarchitected cellular solids - The hunt for statically determinate periodic trusses. *ZAMM Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik*. 2005. 85(9). Pp. 607–617. doi:10.1002/zamm.200410208.
6. Hutchinson, R.G., Fleck, N.A. The structural performance of the periodic truss. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*. 2006. 54(4). Pp. 756–782. doi:10.1016/j.jmps.2005.10.008.
7. Kirsanov M. N. *Planar Trusses: Schemes and Formulas*. Cambridge Scholars Publishing, 2019. 206 p.
8. Dai Qiao. Analytical Dependence of Planar Truss Deformations on the Number of Panels; 2021. *AlfaBuild*. 17 Article No 1701. doi: 10.34910/ALF.17.1
9. Kitaev, S.S. Derivation of the formula for the deflection of a cantilevered truss with a rectangular diagonal grid in the computer mathematics system Maple. *Postulat*. 2018. 5–1. Pp. 43. URL: <http://e-postulat.ru/index.php/Postulat/article/view/1477> (date of application: 3.03.2021).
10. Ilyushin, A. The formula for calculating the deflection of a compound externally statically indeterminate frame. *Structural mechanics and structures*. 2019. 3(22). Pp. 29–38. URL: https://www.elibrary.ru/download/elibrary_41201106_54181191.pdf.
11. Komerzan E.V., Sviridenko O.V. Analytical calculation of the deflection of a planet externall statically indeterminate truss with an arbitrary number of panels. *Stroitel'naya mekhanika i konstruktsii*. 2021. No. 2 (29). pp. 29–37.
12. Kirsanov M.N. Deformations And Spatial Structure Vibrations Frequency of The Rectangular Contour Type Cover: Analytical Solutions; 2021; *Construction of Unique Buildings and Structures*; 98 Article No 9805. doi: 10.4123/CUBS.98.5
13. Petrenko V. The natural frequency of a two-span truss; 2021; *AlfaBuild*; 20 Article No 2001. doi: 10.34910/ALF.20.1

14. Vorobev O. Bilateral analytical estimation of first frequency of a plane truss // Construction of Unique Buildings and Structures. 2020. Vol. 92. Article No 9204 doi: 10.18720/CUBS.92.4
15. Buka-Vaivade, K., Kirsanov, M.N., Serdjuks, D.O. Calculation of deformations of a cantilever-frame planar truss model with an arbitrary number of panels. Vestnik MGSU. 2020. (4). Pp. 510–517. doi:10.22227/1997-0935.2020.4.510-517

MODEL AND ANALYTICAL CALCULATION OF A SPATIAL HEXAGONAL DOME TRUSS

M. N. Kirsanov

National Research University «MPEI»
Russia, Moscow

Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor of the Department of Robotics, Mechanotronics, Dynamics
and Strength of Machines, tel.: +7(495)362-73-14; e-mail: c216@ya.ru

A scheme of a statically determined truss of a hexagonal dome with supports on two rows of the outer contour is proposed. Formulas are derived for calculating the forces in the most compressed and stretched rods depending on the number of panels. A picture of the distribution of forces on the rods of the structure is given. The algorithm for deriving the formula for the deflection of the dome under the action of a vertical load is considered. The Maxwell – Mohr formula is used. The load is evenly distributed over the truss nodes or applied to the top of the dome. The conclusion is based on an inductive generalization of the solution sequence for structures with an increasing number of panels. The coefficients of the desired formulas are calculated as common members of the sequences of coefficients in particular solutions. The solution of equilibrium equations for nodes and all transformations are performed in a program written in the language of the Maple symbolic mathematics system. Linear asymptotics of solutions are found.

Keywords: spatial truss, dome, induction, Maple, asymptotics, deflection