

ВЫВОД ФОРМУЛ ДЛЯ ПРОГИБА ШПРЕНГЕЛЬНОЙ БАЛОЧНОЙ ФЕРМЫ С ПРОИЗВОЛЬНЫМ ЧИСЛОМ ПАНЕЛЕЙ В СИСТЕМЕ MAPLE

И. Б. Суд¹

Национальный исследовательский университет "МЭИ"¹
Россия, г. Москва

¹Студент, тел.: +7(903)004-88-55; e-mail: SudIB@mpei.ru

Приводится вывод формул для прогиба плоской шпренгельной статически определимой фермы в зависимости от числа панелей. Вычисление прогиба середины пролета на основе аналитических выражений для усилий, полученных по программе в системе компьютерной математики Maple, выполнено с использованием интеграла Мора. Обобщение ряда формул для ферм с различным, последовательно увеличивающимся числом панелей, произведено методом индукции. Использован аппарат составления и решения линейных однородных рекуррентных уравнений. Найдена линейная асимптотика решения. Изучено влияние соотношения высоты фермы к высоте ее шпренгельной (верхней) части на жесткость конструкции.

Ключевые слова: ферма, индукция, Maple, прогиб, интеграл Мора.

Введение

Фермы балочного типа широко применяются в строительстве и машиностроении как основные и вспомогательные несущие конструкции. Одной из важнейших характеристик фермы является ее жесткость. Простейшие модели ферм имеют шарнирное крепление стержней, обеспечивающее статическую определимость. Несмотря на это, непосредственный расчет усилий в таких фермах не всегда возможен. Особенно это касается ферм шпренгельного типа, где метод сечений не работает. Численные расчеты в стандартных программах для определения напряженно-деформированного состояния фермы с увеличением числа панелей могут давать погрешности за счет накопления ошибок округления. В любом случае, простые формулы для расчета прогиба всегда полезны, однако не всегда такие формулы настолько универсальны, чтобы не просто тестировать численные решения, но и позволять проводить качественный анализ конструкций математическими методами. В частности, как правило, простые формулы для расчета прогиба не учитывали конфигурацию решетки (формула Качурина [1,2]) и выводились на основе моделирования балочной фермы путем замены ее на балку такой же жесткости. С появлением систем компьютерной математики появилась возможность вывода точных формул для прогиба ферм с любым числом панелей, что исключает эффект накопления ошибок округления. Наряду с методом непосредственного расчета фермы с параметрическим заданием числа панелей [3] в тех случаях, когда для расчета усилий в стержнях можно использовать метод сечения и метод поэтапного вырезания узлов, для вывода аналитических решений применяется метод индукции. Этим методом были получены формулы для прогиба плоских ферм арочного типа [4-8], рам [9-13], решетчатых ферм с различными схемами решеток [14-20] и некоторых регулярных пространственных ферм [21-23]. Метод применим и для частотного анализа стержневых конструкций [24-31].

В настоящей работе приводится вывод формул прогиба для балочной фермы шпренгельного типа (рис. 1).

Схема фермы и расчет усилий

Верхний пояс фермы, подверженный сжатию, состоит из укороченных стержней длиной a . Это обеспечивает большой запас устойчивости конструкции. В ферме $n=2k$ панелей.

Каждая панель состоит из двух стержней верхнего пояса, стержня нижнего пояса длиной $2a$, стойки высотой f и четырех раскосов. Общая высота фермы $f+h$. Средняя стойка имеет высоту $h+f$.

Расчет прогиба конструкции начинается с определения усилий в стержнях. Используется программа, составленная для решения данной задачи в системе символьной математики Maple.

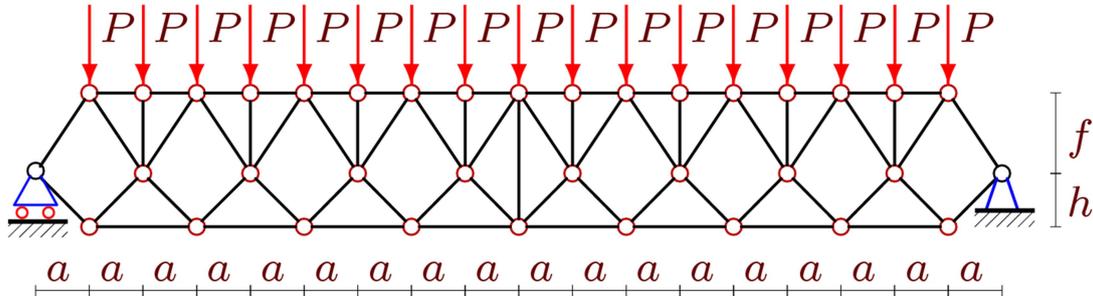


Рис. 1. Ферма под действием равномерной нагрузки, $k=4$

Стержни и узлы фермы нумеруются (рис. 2). Координаты шарниров вводятся в циклах. На языке Maple это имеет вид:

```
> for i to 2*n+1 do x[i]:=(i-1)*a; y[i]:=h+f; od:
> for i to n+2 do x[i+2*n+1]:=(i-1)*2*a-a; y[i+2*n+1]:=h; od:
> for i to n+1 do x[i+3*n+3]:=(i-1)*2*a; y[i+3*n+3]:=0; od:
```

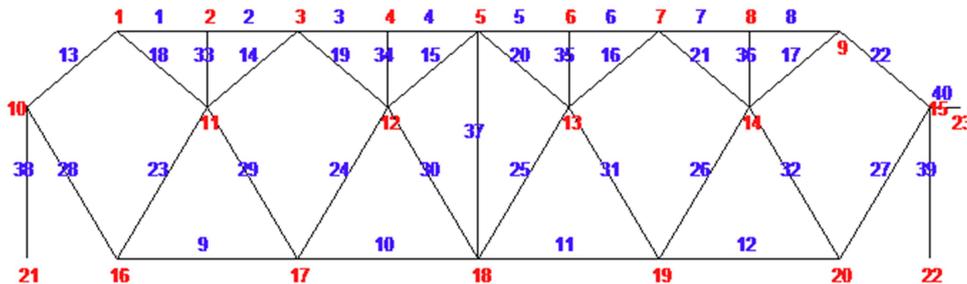


Рис. 2. Нумерация узлов и стержней, $n=4$

Схема решетки в программе задается специальными упорядоченными списками $N[i]$ номеров концов соответствующих стержней. Выбор начала и конца стержня не влияет на величину усилия или его знак. Ввод решетки напоминает задание графа в дискретной математике:

```
for i to 2*n do N[i]:=[i,i+1];od:
for i to n do
  N[i+2*n]:=[3*n+3+i,i+3*n+4];
  N[i+7*n+4]:=[2*n+2+i,2*i]; od:
for i to n+1 do
  N[i+3*n]:=[2*i-1,i+2*n+1];
  N[i+4*n+1]:=[2*i-1,i+2*n+2];
  N[i+5*n+2]:=[i+3*n+3,i+2*n+2];
  N[i+6*n+3]:=[i+3*n+3,i+2*n+1]; od:
N[8*n+5]:=[n+1,3*n+k+4]:
```

По данным координат и номеров концов стержней составляется матрица системы уравнений равновесия узлов. Решение системы одновременно дает и усилия в стержнях и реакции опор (с обратным знаком). Значения усилий используются в интеграле Мора

$$\Delta = \sum_{j=1}^{m-3} \frac{S_j s_j l_j}{EF}, \quad (1)$$

где $m = 8(n+1)$ — число стержней, включая три опорных стержня (два стержня на неподвижную опору, один - на подвижную), EF — жесткость стержней, S_j — усилия в стержнях от действия внешней нагрузки, s_j — усилия от безразмерной единичной силы, приложенной к узлу в середине пролета, l_j — длина стержня с номером j . Три опорных стержня, принятые жесткими, в сумму не входят (бесконечная жесткость).

Прогиб

Расчет ряда ферм с разным числом панелей показал, что итоговая формула для прогиба имеет один и тот же вид, не зависящий от числа панелей. При действии распределенной нагрузки имеем

$$EF\Delta = P(C_1 a^3 h + C_2 a^3 f + C_3 (g^3 + c^3) f + C_4 f^2 h (h + f)) / (2f(h + f)^2),$$

где коэффициенты формулы зависят только от числа k панелей в половине пролета. Методом индукции, обработкой серии решений для 14 ферм, получаем следующие коэффициенты:

$$\begin{aligned} C_1 &= (-2k^2 + 2(-1)^k k - 2k + (-1)^k - 1) / 2, \\ C_2 &= (40k^4 + 80k^3 + 62k^2 - 6(-1)^k k + 22k - 3(-1)^k + 3) / 6, \\ C_3 &= (4k^2 + 4k + 1) / 2, \quad C_4 = -(-1)^k. \end{aligned}$$

Рекуррентное уравнение для коэффициента C_1 , полученное оператором **rgf_findrecur**, имеет вид:

$$C_{1,k} = C_{1,k-1} + 2C_{1,k-2} - 2C_{1,k-3} - C_{1,k-4} + C_{1,k-5}.$$

Уравнение для коэффициента C_2 имеет вид

$$C_{2,k} = 3C_{2,k-1} - C_{2,k-2} - 5C_{2,k-3} + 5C_{2,k-4} + C_{2,k-5} - 3C_{2,k-6} + C_{2,k-7}.$$

Уравнение для коэффициента C_3 :

$$C_{3,k} = 3C_{3,k-1} - 3C_{3,k-2} + C_{3,k-3}.$$

Самым простым уравнением оказалось уравнение для коэффициента C_4 :

$$C_{4,k} = -C_{4,k-1}.$$

Прогиб в случае сосредоточенной в середине фермы нагрузки, как и следовало ожидать, имеет более простой вид:

$$EF\Delta = (C_1 a^3 + C_2 (g^3 + c^3) + 2(f^2 h + f^3)) / (2(h + f)^2),$$

где $C_1 = (16k^3 + 24k^2 + 8k) / 3$, $C_2 = 2k + 1$.

Проанализируем полученное решение в случае действия распределенной нагрузки. Построим графики зависимости относительного прогиба $\Delta' = \Delta EF / (P_0 L)$, где $P = P_0 / (2n + 1)$ от высоты h при фиксированной высоте $f+h=10$ м для разного числа панелей k . Фиксируем пролет фермы $L=2(n+1)=70$ м (рис. 3).

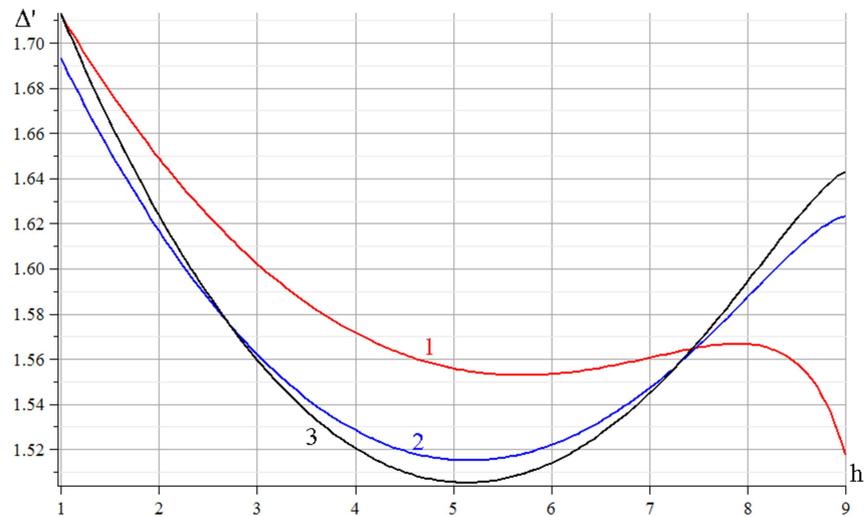


Рис. 3. Зависимость прогиба от высоты h при разном числе панелей k , $h+f=10$ м, $L=70$ м.
1 – $k=3$; 2 – $k=4$; 3 – $k=5$

Интересно отметить сильную зависимость решения от числа панелей. Минимум прогиба во всех трех случаях наблюдается при одинаковых размерах $f=h$. При небольшом числе панелей и, следовательно, достаточно длинных стержнях поясов, наибольшая жесткость наблюдается при больших значениях h и малых значениях f .

Зависимость прогиба от числа панелей, при разных h , представлена кривыми на рис. 4. На первый взгляд проявляется устойчивая тенденция к уменьшению прогиба с ростом k . Однако асимптотика решения линейна и положительна:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \Delta' / k = (f^2 - hf + h^2) / (2(h + f)L)$$

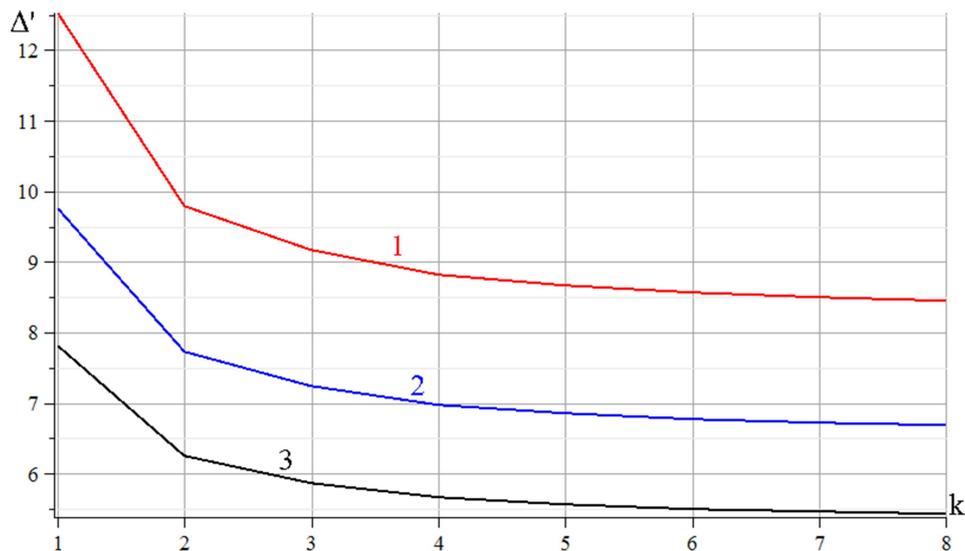


Рис. 4. Зависимость прогиба от числа панелей k при разной высоте h , $f=3$ м, $L=70$ м.
1 – $h=1$ м; 2 – $h=1.5$ м; 3 – $h=2$ м.

Это указывает на то, что после некоторого значения k прогиб будет расти.

Заключение

Отличительная особенность рассмотренной фермы - наличие дополнительного шпренгельного усиления верхнего пояса. Методом индукции получено решение задачи о зависимости прогиба конструкции от числа панелей. Анализ решения показал, что соотношение высот частей фермы существенно влияет на эту зависимость. Решение получилось достаточно простое, пригодное для оценки прогиба проектируемых ферм такого типа при любом числе панелей.

Библиографический список

1. Стрелецкий Н. С., Беленя Е.И., Ведеников Г.С., Лессиг Е.Н., Муханов К. К. Металлические конструкции. Специальный курс М.: Издательство литературы по строительству. 1965. 368 с.
2. Качурин В.К. О прогибе мостовых ферм. Сб. №17. Отделение инженерных исследований НТК НКПС, 1928.
3. Игнатьев В.А. Расчет регулярных стержневых систем – Саратов: Саратовское высшее военно-химическое военное училище, 1973.
4. Кийко Л.К. Аналитическая оценка прогиба арочной фермы под действием ветровой нагрузки // Научный вестник. 2016. № 1 (7). С. 247-254.
5. Кирсанов М.Н. Сравнительный анализ жесткости двух схем арочной фермы // Строительство уникальных зданий и сооружений. 2015. № 9 (36). С. 44-55.
6. Кирсанов М.Н. Формулы для расчета прогиба арочной фермы // Строительная механика и конструкции. 2018. Т. 1. № 16. С. 7-11.
7. Кирсанов М.Н. Индуктивный анализ деформации арочной фермы // International Journal for Computational Civil and Structural Engineering. 2018. Т. 14. № 1. С. 64-70.
8. Кирсанов М.Н. Формулы для расчета деформаций арочной фермы с произвольным числом панелей // Строительство уникальных зданий и сооружений. 2018. № 4 (67). С. 86-94.
9. Кирсанов В.И. Формулы для прогиба шарнирно-стержневой рамы с произвольным числом панелей в ригеле и опорах // Строительная механика и расчет сооружений. 2019. № 4 (285). С. 31-36.
10. Кирсанов М.Н. Расчетная модель плоской фермы рамного типа с произвольным числом панелей // Вестник МГСУ. 2018. Т. 13. № 10 (121). С. 1184-1192.
11. Чинченко А.М. Analytical calculation of the size of the bend of rectangular shape frame truss with a random number of panels in the Maple system // Механизация и автоматизация строительства [Электронный ресурс]: сборник статей. Самара: Самар. гос. техн. ун-т, 2019. С. 54-58.
12. Бойко А.Ю., Ткачук Г.Н. Вывод формул зависимости прогиба плоской шарнирно-стержневой рамы от числа панелей в системе Maple // Строительная механика и конструкции. 2019. №4 (23). С. 15-25.
13. Ткачук Г.Н. Формула зависимости прогиба несимметрично нагруженной плоской фермы с усиленными раскосами от числа панелей // Строительная механика и конструкции. 2019. №2(21). С. 32-39.
14. Белянкин Н.А., Бойко А.Ю. Формулы для прогиба балочной фермы с произвольным числом панелей при равномерном загрузении // Строительная механика и конструкции. 2019. №1(20). С. 21-29.
15. Кирсанов М.Н. Анализ прогиба фермы с декоративной решеткой // Строительство: наука и образование. 2019. № 1. С. 1.
16. Кирсанов М.Н., Москвин В.Г. Деформации плоской фермы с усиленной решеткой // Строительная механика и расчет сооружений. 2018. № 4 (279). С. 10-14.

17. Buka-Vaivade K., Kirsanov M.N., Serdjuks D.O. Calculation of deformations of a cantilever-frame planar truss model with an arbitrary number of panels // Вестник МГСУ. 2020. Т. 15. № 4. С. 510-517.
18. Кирсанов М.Н., Маслов А.Н. Формулы для расчета прогиба балочной многорешетчатой фермы // Строительная механика и расчет сооружений. 2017. № 2 (271). С. 6-10.
19. Кирсанов М.Н. Схема и формулы для расчета прогиба фермы трехпролетного консольного моста с произвольным числом панелей // Строительная механика и расчет сооружений. 2020. № 1 (288). С. 16-22.
20. Тиньков Д.В. Формулы для расчёта прогиба вварушенной балочной раскосной фермы с произвольным числом панелей // Строительная механика и конструкции. 2016. Т. 2. № 13. С. 10-14.
21. Кирсанов М.Н. Аналитический расчет прогиба пространственного прямоугольного покрытия // Вестник МГСУ. 2018. Т. 13. № 5 (116). С. 579-586.
22. Kirsanov M.N. The deflection of spatial coatings with periodic structure // Инженерно-строительный журнал. 2017. № 8 (76). С. 58-66
23. Кирсанов М.Н. Оценка прогиба и устойчивости пространственной балочной фермы // Строительная механика и расчет сооружений. 2016. № 5 (268). С. 19-22.
24. Воробьев О.В. О методах получения аналитического решения для проблемы собственных частот шарнирных конструкций // Строительная механика и конструкции. 2020. № 1 (24). С. 25-38.
25. Кирсанов М.Н., Тиньков Д.В. Анализ частот колебаний груза в зависимости от его положения в узлах плоской фермы // Строительство и реконструкция. 2020. № 1 (87). С. 14-19.
26. Кирсанов М.Н., Тиньков Д.В. Аналитические выражения частот малых колебаний балочной фермы с произвольным числом панелей // Строительная механика и конструкции. 2019. Т. 1. № 20. С. 14-20.
27. Kirsanov M.N., Tinkov D.V. Analysis of the natural frequencies of oscillations of a planar truss with an arbitrary number of panels // Вестник МГСУ. 2019. Т. 14. № 3 (126). С. 284-292.
28. Кирсанов М.Н. Формула для основной частоты колебания многопролетной фермы // Строительная механика и конструкции. 2020. Т. 1. № 24. С. 19-24.
29. Kirsanov M.N. Lower estimate of the fundamental frequency of natural oscillations of a truss with an arbitrary number of panels // Вестник МГСУ. 2019. Т. 14. № 7. С. 844-851.
30. Кирсанов М.Н. Формула зависимости низшей частоты колебания балочной фермы от числа панелей // Строительная механика и расчет сооружений. 2019. № 3 (284). С. 45-49.
31. Kirsanov M.N. The property of embedding of natural frequencies spectra of regular mechanical systems // Строительная механика и конструкции. 2019. Т. 2. № 21. С. 40-49.

Reference

1. Streletsky N. S., Belenja E. I., Vedernikov G. S., Lessig E. N., Mukhanov K. K. Metal construction. Special course Moscow: Publishing house of literature on construction. 1965. 368 p.
2. Kachurin V. K. On the deflection of bridge trusses. Sat. no. 17. Department of engineering research NTC NCPs, 1928.
3. Ignatiev V. A. Calculation of regular rod systems — Saratov: Saratov higher military chemical military school, 1973.
4. Kiiko L. K. Analytical assessment of arch truss deflection under the influence of wind load. Scientific Bulletin. 2016. No. 1 (7). Pp. 247-254.
5. Kirsanov M. N. Comparative analysis of the rigidity of two arch truss schemes. Construction of unique buildings and structures. 2015. No. 9 (36). Pp. 44-55.
6. Kirsanov M. N. The formula for calculating the deflection of the arch truss. Structural mechanics and structures. 2018. Vol. 1. No. 16. Pp. 7-11.
7. Kirsanov M. N. Inductive analysis of arch truss deformation. international journal of computational civil and construction engineering. 2018. Vol. 14, No. 1. Pp. 64-70.
8. Kirsanov M. N. Formulas for calculating deformations of an arched truss with an arbitrary number of panels. Construction of unique buildings and structures. 2018. no. 4 (67). Pp. 86-94.

9. Kirsanov V. I. Formulas for the deflection of a hinge-rod frame with an arbitrary number of panels in the crossbar and supports. *Construction mechanics and calculation of structures*. 2019. No. 4 (285). Pp. 31-36.
10. Kirsanov M. N. Calculation model of a planar frame truss with an arbitrary number of panels. *MGSU Bulletin*. 2018. Vol. 13. No. 10 (121). Pp. 1184-1192.
11. Chinchenko a.m. Analytical calculation of the bending value of a rectangular frame truss with a random number of panels in the Maple system. *Mechanization and automation of construction [Electronic resource]: Collection of articles*. Samara: Samar state technical University. Un-t, 2019. Pp. 54-58.
12. Boyko A. Yu., Tkachuk G. N. Derivation of the formulas for the deflection of a flat hinged-rod frame in the of symbol mathematics Maple system. *Structural mechanics and structures*. 2019. No. 4 (23). Pp. 15-25.
13. Tkachuk G. N. The formula for the dependence of the deflection of an asymmetrically loaded flat truss with reinforced braces on the number of panels. *Structural mechanics and structures*. 2019. No. 2(21). Pp. 32-39.
14. Belyankin N. A., Boyko A. Yu. Formulas for deflection of a beam truss with an arbitrary number of panels at uniform loading. *Structural mechanics and structures*. 2019. No. 1(20). Pp. 21-29.
15. Kirsanov M. N. Analysis of the deflection of a truss with a decorative grid. *Construction: science and education*. 2019. No. 1. 1.
16. Kirsanov M. N., Moskvina V. G. Deformations of a flat truss with a reinforced grid. *Construction mechanics and calculation of structures*. 2018. no. 4 (279). Pp. 10-14.
17. Buka-Vaivade K., Kirsanov M.N., Serdjuk D.O. Calculation of deformations of a cantilever-frame planar truss model with an arbitrary number of panels. *MGSU Bulletin*. 2020. Vol. 15. No. 4. Pp. 510-517.
18. Kirsanov M. N., Maslov A. N. Formulas for calculating the deflection of a multi-lattice girder truss. *Construction mechanics and calculation of structures*. 2017. no. 2 (271). Pp. 6-10.
19. Kirsanov M. N. Scheme and formulas for calculating the deflection of the truss of a three-span cantilever bridge with an arbitrary number of panels. *Construction mechanics and calculation of structures*. 2020. No. 1 (288). Pp. 16-22.
20. Tinkov D. V. Formulas for calculating the deflection of a broken beam raskosnoy truss with an arbitrary number of panels. *Structural mechanics and structures*. 2016. Vol. 2. No. 13. Pp. 10-14.
21. Kirsanov M. N. Analytical calculation of the deflection of a spatial rectangular cover // *MGSU Bulletin*. 2018. Vol. 13. No. 5 (116). Pp. 579-586.
22. Kirsanov M. N. deflection of spatial coverings with periodic structure. *Engineering and Construction magazine*. 2017. no. 8 (76). Pp. 58-66
23. Kirsanov M. N. Estimation of deflection and stability of spatial beam truss. *Construction mechanics and calculation of structures*. 2016. No. 5 (268). Pp. 19-22.
24. Vorobyov O. V. on methods for obtaining an analytical solution for the problem of natural frequencies of articulated structures. *Construction mechanics and construction*. 2020. no. 1 (24). Pp. 25-38.
25. Kirsanov M. N., Tinkov D. V. Analysis of cargo vibration frequencies depending on its position in the nodes of a flat truss. *Construction and reconstruction*. 2020. No. 1 (87). Pp. 14-19.
26. Kirsanov M. N., Tinkov D. V. Analytical expressions of frequencies of small vibrations of a beam truss with an arbitrary number of panels. *Construction mechanics and construction*. 2019. Vol. 1. No. 20. Pp. 14-20.
27. Kirsanov M. N., Tinkov D. V. analysis of natural vibration frequencies of a flat truss with an arbitrary number of panels // *MGSU Bulletin*. 2019. Vol. 14. No. 3 (126). Pp. 284-292.
28. Kirsanov M. N. Formula for the main frequency of vibration of a multi-span truss. *Construction mechanics and construction*. 2020. Vol. 1. No. 24. Pp. 19-24.
29. Kirsanov M. N. lower estimation of the basic frequency of natural vibrations of a truss with an arbitrary number of panels. *MGSU Bulletin*. 2019. Vol. 14. No. 7. Pp. 844-851.
30. Kirsanov M. N. The formula for the dependence of the lowest frequency of vibration of the beam truss on the number of panels. *Construction mechanics and calculation of structures*. 2019. No. 3 (284). Pp. 45-49.

31. Kirsanov M. N. property of embedding eigenfrequency spectra of regular mechanical systems. Construction mechanics and structures. 2019. Vol. 2. No. 21. Pp. 40-49.

DERIVATION OF FORMULAS FOR DEFLECTION OF THE GIRDER TRUSS WITH AN ARBITRARY NUMBER OF PANELS IN THE MAPLE SYSTEM

I.B. Sud¹

National Research University «MPEI»¹

Moscow, Russia

¹Student, tel.: +7(903)004-88-55; e-mail: SudIB@mpei.ru

The derivation of formulas for deflection of a statically determinate planar truss depending on the number of panels. The calculation of the mid-span deflection based on analytical expressions for forces obtained by the program in the Maple computer mathematics system was performed using the Mohr's integral. Generalization of a number of formulas for trusses with a different, consistently increasing number of panels, produced by method of induction. The apparatus for composing and solving linear homogeneous recurrent equations is applied. The linear asymptotic behavior of the solution is found. The effect of the ratio of the height of the truss to the height of its upper part on the rigidity of the structure is studied.

Keywords: truss, induction, Maple, deflection, Mohr's integral.