



doi: 10.18720/CUBS.67.7

Формулы для расчета деформаций арочной фермы с произвольным числом панелей

The formula for calculating the deformations of the arched truss with arbitrary number of panels

М.Н. Кирсанов ^{1*}

Национальный исследовательский университет
"МЭИ", 111250, г.Москва, ул. Красноказарменная, д.14

M.N. Kirsanov ^{1*}

National Research University "Moscow Power Engineering
Institute", 14 Krasnokazarmennaya, 111250 Moscow, Russia

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА

ферма;
арка;
Maple;
индукция;
прогиб;
точная формула;
критические усилия;

KEYWORDS

truss;
arch;
Maple;
induction;
deflection;
exact formula;
critical forces;

ИСТОРИЯ

Подана в редакцию: 05.07.2017
Принята: 30.05.2018

ARTICLE HISTORY

Submitted: 05.07.2017
Accepted: 30.05.2018

АННОТАЦИЯ

Предлагается схема статически определимой плоской симметричной фермы арочного типа. Решетка фермы содержит стойки и раскосы. Приводится вывод формулы для прогиба фермы под действием нагрузки, равномерно распределенной по узлам верхнего или нижнего пояса, в зависимости от размеров фермы и числа панелей. Для обобщения ряда решений для ферм с конечным числом панелей на общий случай применяется метод индукции. Все преобразования и решения уравнений равновесия узлов выполняются в системе компьютерной математики Maple. Для нахождения рекуррентных уравнений, которым удовлетворяют коэффициенты в формулах, привлекаются специализированные операторы системы Maple. Найдено асимптотическое свойство решения. Получены и проанализированы формулы для усилий в наиболее сжатых и растянутых стержнях.

ABSTRACT

The scheme of statically determinate planar symmetric arched truss is proposed. Lattice of truss comprises a rack and braces. The derivation of the formula for the deflection of a truss under the influence of a load uniformly distributed over the nodes of the upper or lower belt, depending on the size of the truss and the number of panels is given. To summarize the number of solutions for trusses with a finite number of panels to the General case used the method of induction. All the transformations and solution of equilibrium equations of nodes are performed in the system of computer mathematics Maple. For finding recurrence equations satisfied by the coefficients in the formulas involves specialized operators of the system Maple. Asymptotic property of the solution is found out. Obtained and analyzed formula for forces in the most compression and tie rods.

Содержание

1.	Введение	86
2.	Методы	87
3.	Результаты и обсуждение	89
4.	Выводы	93

1. Введение

Арочные фермы принципиально отличаются от балочных не только методом расчета, но и деформацией, характером распределения усилий в стержнях и зависимостью этих усилий от размеров

фермы и числа панелей. Это подтверждают существующие аналитические расчеты различных ферм арочного типа [1-5]. Наиболее актуально для крупных большепролетных, уникальных сооружений, содержащих значительное число элементов, — это точность расчетов, которая естественным, практически независящим от расчетчика, образом падает с усложнением конструкции (увеличением числа элементов). Цель работы — на примере расчета арочной фермы показать возможность получения явной формульной зависимости прогиба фермы, усилий в стержнях для произвольного числа панелей. Такая формула может служить как тестовой для более сложных численных расчетов, так и расчетной для упрощенной модели конструкции.

Предлагаемая схема решетки плоской арочной фермы (рис. 1) не позволяет рассчитывать усилия в стержнях методом сечений. Расчет методом вырезания узлов здесь также не подходит для определения усилий в отдельных стержнях. Единственная реальная возможность решения задачи о нахождении усилий, необходимых для определения прогибов, — это расчет всех усилий методом вырезания всех узлов и составления общей матрицы равновесия. Применение компьютерных методов в этом случае совершенно естественно. Современные же программные средства символьной математики дают возможность при этом получить решение в символьной форме. Однако решение задачи о прогибе фермы с конкретным числом панелей не представляет практического интереса. Для обобщения ряда таких решений на произвольное число панелей используется метод индукции. Этот же метод применяется ниже для решения поставленной задачи. Расчеты дополняются графической формой представления характера распределения усилий в стержнях фермы. Ранее в [1] методом индукции получена простая формула для прогиба арки под действием сосредоточенной силы. В [2] проведен анализ горизонтальной жесткости трехшарнирной распорной арки. Полученное аналитическое решение показало наличие точек экстремума на кривых "прогиб - число панелей". Аналитическое решение методом индукции в системе Maple выведено в [3] для прогиба простой балочной фермы с треугольной решеткой под действием нагрузки в половине пролета. Элементы индуктивного и аналитических методов применены в [4] для решения задачи оптимизации балочной фермы с прямоугольной решеткой из реологического материала. Задачи о прогибе арочных и решетчатых ферм в символьной форме решены также в [5-8]. В отличие от других аналитических методов решения задач о стержневых структурах [9] индуктивный метод дает компактные формулы, удобные для применения и свободные от эффекта накопления ошибок округления при большом числе стержней.

2. Методы

Применены два основных метода. Метод вырезания узлов при расчете усилий, необходимых для использования формулы Максвелла-Мора при вычислении деформаций, известен и широко используется как в простых расчетах, так и в современных программных комплексах применительно к сложным шарнирно-стержневым конструкциям. Единственной отличительной чертой этого метода в настоящем исследовании, ставящим своей целью получить аналитическую зависимость прогиба от числа панелей, — это выполнение всех преобразований в символьной форме, что существенно увеличивает время работы программы, и в ряде случаев может даже сделать задачу невыполнимой из-за ограничения по времени счета. Для того чтобы избежать этого используется второй метод — метод индукции. В методе индукции, применимом к задачам регулярного типа с периодической структурой, необходимо последовательно рассчитать несколько конструкций с числом ячеек периодичности n (параметр индукции) от 1 до N . Если конструкция действительно регулярная, и все преобразования выполнены верно, то формула для рассчитываемой величины (прогиб, усилие и т.д.) имеет одну и ту же структуру с коэффициентами, зависящими только от n .

Далее для полученной последовательности коэффициентов составляется рекуррентное уравнение, решение которого дает искомым коэффициент как функцию n . Длина последовательности N может быть разной. Минимальная величина N соответствует рекуррентному уравнению с целыми коэффициентами, допускающему физически оправданное решение. Это решение в символьной форме, требует значительного машинного времени, резко растущего с числом n . Решение проверяется численно при различных n . В численной форме (с вещественными данными) программа работает существенно быстрее.

2.1. Схема фермы. Ввод данных в программу

Ферма состоит из n панелей в половине пролета. Конструкция статически определена. Она содержит $m = 4n + 8$ шарниров и $n_s = 8n + 16$ стержней, включая три опорных стержня. Две крайние стойки имеют высоту $2h$, средние — $4h$.

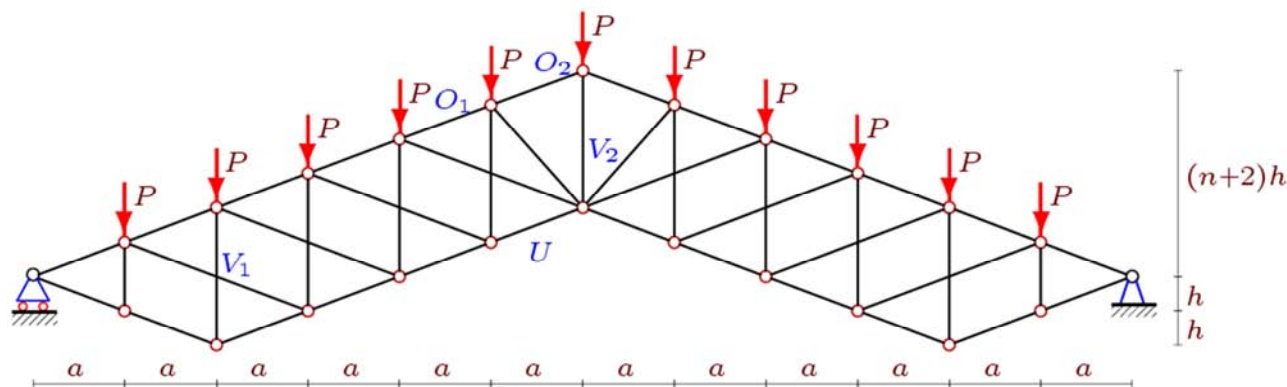


Рисунок 1. Ферма, $n=4$

Расчет усилий в стержнях фермы в символической форме производится по программе [10], составленной в среде компьютерной математики Maple. Для ввода информации в программу необходимо задать координаты шарниров и порядок соединения стержней. Начало координат выбрано в левой, подвижной, шарнирной опоре. Координаты шарниров нижнего пояса (рис. 2) имеют следующий вид:

$$\begin{aligned}
 x_i &= (i-1)a, & i &= 1, \dots, 2n+5, \\
 y_{i+2} &= (i-1)h, & i &= 1, \dots, n+1, \\
 y_{i+n+3} &= (n-i)h, & i &= 1, \dots, n, \\
 y_1 = y_{2n+5} &= 2h, & y_2 = y_{2n+4} &= h.
 \end{aligned}$$

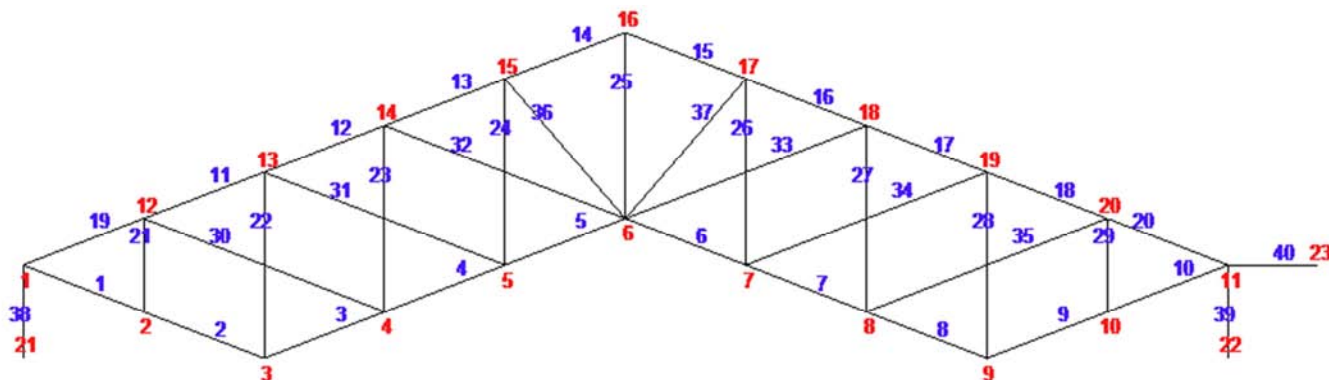


Рисунок 2. Нумерация узлов и стержней в системе Maple [10], $n=3$

Координаты шарниров верхнего пояса

$$\begin{aligned}
 x_{i+2n+5} &= ia, & i &= 1, \dots, 2n+3, \\
 y_{i+2n+5} &= (i+2)h, & i &= 1, \dots, n+2, \\
 y_{i+3n+7} &= (4+n-i)h, & i &= 1, \dots, n+1.
 \end{aligned}$$

Три опорные стержня будем предполагать жесткими. Их длины b выбраны произвольными и в решение не входят. Координаты узлов крепления опор к "земле":

$$x_{m+1} = 0, \quad y_{m+1} = -1, \quad x_{m+2} = x_{2n+5}, \quad y_{m+2} = -1, \quad x_{m+3} = x_{2n+5} + 1, \quad y_{m+3} = 2h.$$

Структура решетки фермы определяется условными векторами $\bar{V}_i, i = 1, \dots, n_s$. Компонентами этих векторов являются номера шарниров по концам соответствующих стержней. При этом выбор начала и конца векторов произволен и не влияет на знаки усилий в стержнях. Например, стержни нижнего пояса кодируются следующими векторами: $\bar{V}_i = [i, i+1], i = 1, \dots, 2n+4$. Для стержней верхнего пояса вектора структуры имеют вид:

$$\bar{V}_{i+2n+4} = [i+2n+5, i+2n+6], \quad i = 1, \dots, 2n+2, \quad \bar{V}_{4n+7} = [1, 2n+6], \quad \bar{V}_{4n+8} = [2n+5, 4n+8].$$

Стойки заданы векторами $\bar{V}_{i+4n+8} = [i+1, i+2n+5], i = 1, \dots, 2n+3$.

Раскосам решетки соответствуют следующие векторы:

$$\bar{V}_{i+6n+11} = [i + 3, i + 2n + 5], \bar{V}_{i+7n+11} = [i + n + 2, i + 3n + 8], i = 1, \dots, n,$$

$$\bar{V}_{8n+12} = [n + 3, 3n + 6], \bar{V}_{8n+13} = [n + 3, 3n + 8].$$

Направляющие косинусы усилий, задающие проекции усилий на оси в уравнениях равновесия узлов, вычисляются через длины стержней и проекции их векторных представлений на оси координат:

$$l_i = \sqrt{l_{1,i}^2 + l_{2,i}^2}, l_{1,i} = x_{V_{2,i}} - x_{V_{1,i}}, l_{2,i} = y_{V_{2,i}} - y_{V_{1,i}}, i = 1, \dots, n_s.$$

В номере $V_{j,i}$ первый индекс соответствует номеру компоненты вектора \bar{V}_i (номер начала или конца стержня), второй индекс — это номер стержня. Таким образом, матрица G системы уравнений равновесия имеет следующие элементы:

$$G_{k,i} = -l_{j,i} / l_i, k = 2V_{i,2} - 2 + j, k \leq n_s, j = 1, 2, i = 1, \dots, n_s,$$

$$G_{k,i} = l_{j,i} / l_i, k = 2V_{i,1} - 2 + j, k \leq n_s, j = 1, 2, i = 1, \dots, n_s.$$

Система уравнений равновесия записывается в матричной форме $G\bar{S} = \bar{B}$, где \bar{S} — вектор усилий в стержнях, включая реакции опор стержня, \bar{B} — вектор нагрузок. Горизонтальные нагрузки, приложенные к узлу i , в общем случае заносятся в нечетные элементы B_{2i-1} (в данной постановке их нет), вертикальные — в четные B_{2i} , $i = 1, \dots, m$.

3. Результаты и обсуждение

3.1. Прогиб

Вычисление прогиба центрального узла с номером $n + 3$ нижнего пояса фермы производится по формуле Максвелла–Мора:

$$\Delta = \sum_{i=1}^{n_s-3} \frac{S_i \bar{S}_i l_i}{EF}.$$

Здесь введены обозначения: S_i — усилия в стержнях фермы от действия внешней нагрузки, \bar{S}_i — усилия от единичной нагрузки, приложенной к узлу $n + 3$, l_i — длины стержней. Материал стержней предполагается упругим, жесткость EF всех стержней принята одинаковой.

Последовательный расчет прогиба ферм при различном числе панелей ($n=1, \dots, 14$) дает в результате одну и ту же формулу

$$\Delta_n EF = P(C_{1,n}c^3 + C_{2,n}d^3 + C_{3,n}h^3) / (32h^2), \tag{1}$$

где $c = \sqrt{a^2 + h^2}$, $d = \sqrt{a^2 + 9h^2}$ — длины раскосов и стержней поясов, а коэффициенты C_1 , C_2 и C_3 зависят только от числа панелей n . С помощью оператора **rgf_findrecur** системы Maple можно выяснить, что члены последовательности 119, 336, 685, 1356, 2339, 3904, 6041, 9100, 13071, 18384, 25029, 33516, 43835, 56576 коэффициентов $C_{1,n}$ удовлетворяют следующему рекуррентному уравнению:

$$C_{1,n} = 3C_{1,n-1} - C_{1,n-2} - 5C_{1,n-3} + 5C_{1,n-4} + C_{1,n-5} - 3C_{1,n-6} + C_{1,n-7}.$$

Для получения этого уравнения потребовался расчет 14 ферм, меньшая длина последовательности коэффициентов закономерность в этой задаче не выявляет. Оператор **rsolve** дает решение этого уравнения.

$$C_{1,n} = (5n^4 + 40n^3 + 166n^2 + (329 + 15(-1)^n)n + (453 + 75(-1)^n) / 2) / 6.$$

Аналогично получаются и другие коэффициенты:

$$C_{2,n} = (1 - (-1)^n)(2 + n) / 2,$$

$$C_{3,n} = 8(n^3 + 12n^2 + 2(13 - (-1)^n)n + 7(1 - (-1)^n)).$$

Зависимость прогиба (1) от размеров фермы и числа панелей отражена на рисунке 3. Кривые безразмерного прогиба $\Delta' = \Delta EF_0 / (LP_s)$ построены при фиксированной длине пролета $L = 2(n + 2)a = 90$ м и заданной суммарной нагрузке $P_s = (2n + 3)P$. Следует обратить внимание на точки пересечения кривых, свидетельствующие о возможности выбрать наилучшие размеры при одинаковых прогибах фермы.

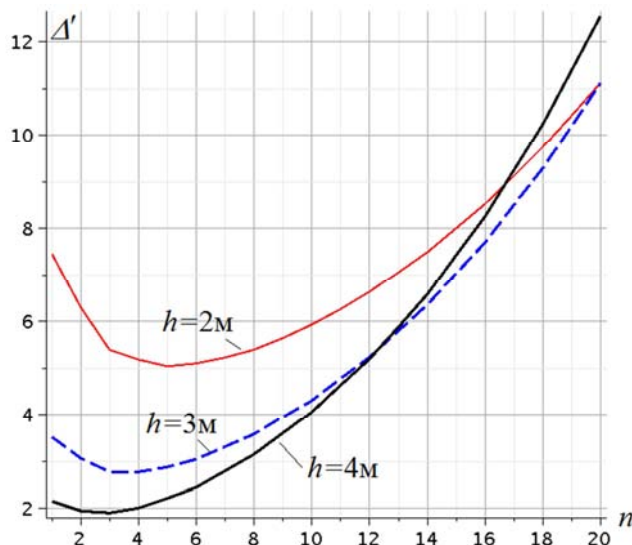


Рисунок 3. Зависимость прогиба от числа панелей

Экстремальные точки кривых (минимумы) приходятся на значения n, при которых длина панелей нереально велика и поэтому практического значения они не имеют. Однако сам факт их существования подсказывает, что при других параметрах оптимизация конструкции, реализующая минимум на кривой прогиба, возможна.

Аналитическая форма решения позволяет выявить предельные свойства решения в такой постановке. Имеется следующий предел, свидетельствующий о кубическом характере роста прогиба:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Delta' / n^3 = 5h / (384L)$$

3.2. Усилия

Для расчета фермы на прочность и устойчивость ее элементов необходимо иметь аналитические выражения для усилий в критических (с наибольшими усилиями) стержнях. Программа [11], записанная на языке Maple на основе программы [10], дает возможность не только получить усилия, но и отобразить схему фермы с величинами усилий в отдельных стержнях. На рисунках 4, 5 и 6 приведены примеры таких схем при $a=3$ м, $h=4$ м. Красным цветом выделены растянутые стержни, синим — сжатые. Усилия отнесены к силе P. Толщина линии пропорциональна модулю усилия в соответствующем стержне.

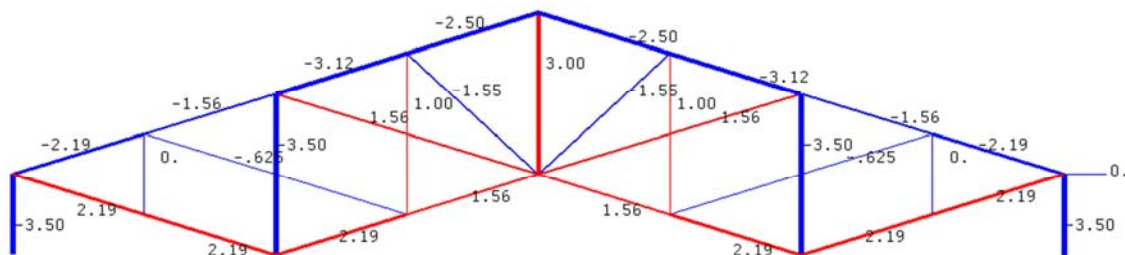


Рисунок 4. Усилия в стержнях при n=2

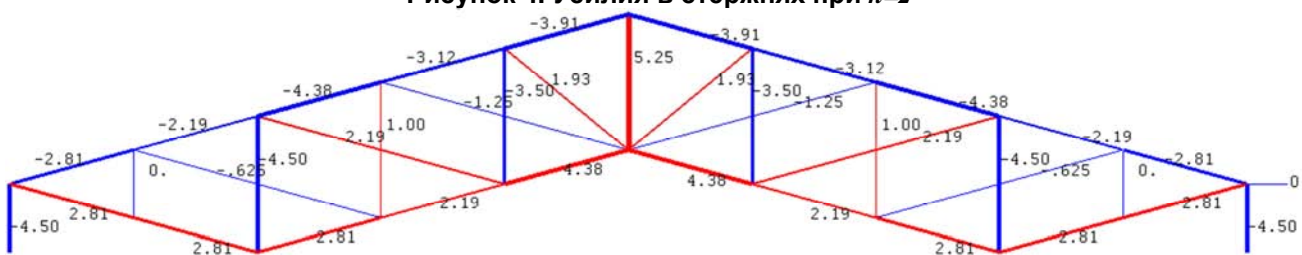


Рисунок 5. Усилия в стержнях при n=3

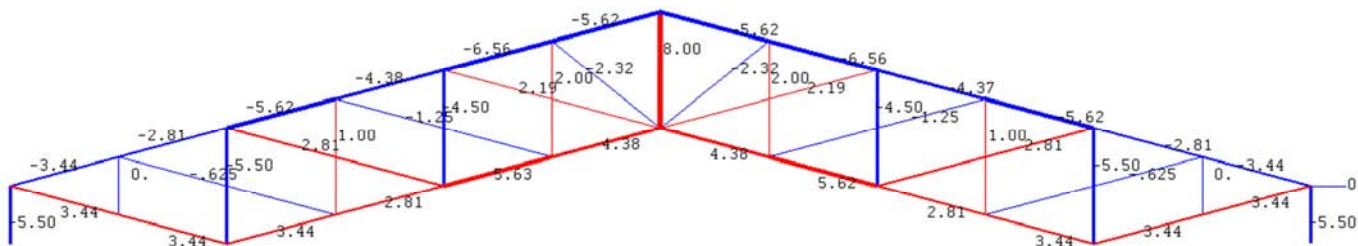


Рисунок 6. Усилия в стержнях при $n = 4$

Из анализа приведенных схем выявляются стержни, усилия в которых должны быть ограничены из условия прочности или устойчивости. Формулы для усилий в наиболее растянутых стержнях (в середине нижнего пояса и средней стойке) получаются методом индукции (рис. 1)

$$U = S_{n+2} = P(n^2 + 4n + 2 - (-1)^n(n + 2))c / (8h),$$

$$V_2 = S_{5n+10} = Pn(n + 4) / 4.$$

Усилия в некоторых наиболее сжатых стержнях (вторая стойка и стержни в середине верхнего пояса) имеют вид:

$$V_1 = S_{4n+10} = -P(2n + 3) / 2, \tag{2}$$

$$O_1 = S_{3n+4} = -P(n^2 + (4 + (-1)^n)n + 2(-1)^n + 4)c / (8h),$$

$$O_2 = S_{3n+5} = -P(n + 2)^2 c / (8h).$$

Безусловно, для полного анализа требуются формулы и для усилий в других стержнях. Например, при $n=4$ наиболее сжатый стержень, устойчивость которого необходимо проверить на этапе проектирования конструкции, — это стержень соседний со средним в верхнем поясе. Наиболее растянутые стержни также могут меняться местами. Если усилие в средней стойке $5n + 10$, как выясняется, не зависит от размеров фермы, то на усилия в нижнем поясе влияют соотношение и величины размеров. При $a=3$ м усилие в среднем стержне нижнего пояса $n+2$ всегда больше усилия в средней стойке с номером $5n+10$ при $h=1$ м, а при $h=2$ м ситуация зависит от числа панелей (рис. 7). Штрихом обозначены величины усилий, отнесенные к силе P : $S'_k = S_k/P$.

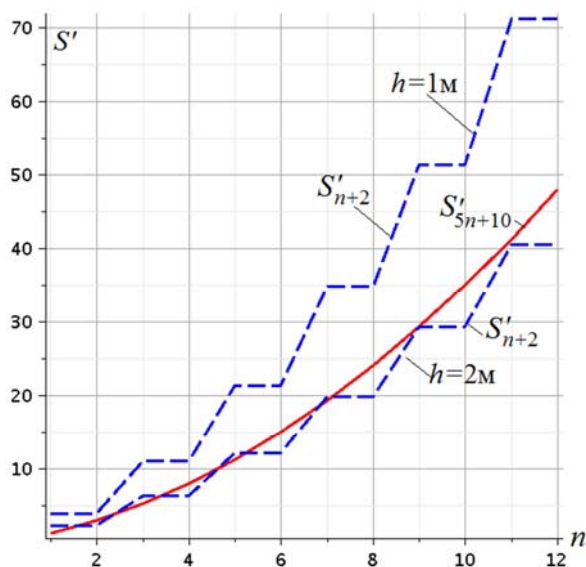


Рисунок 7. Перераспределение усилий в наиболее растянутых стержнях

Аналогичный график, показывающий варианты положения наиболее сжатых стержней, можно построить по формулам (2) для стержней с номерами $4n+10$ и $3n+6$. Здесь также получается, что усилие в стойке $4n+10$ не зависит от размеров фермы.

3.3. Другие варианты нагрузок

Отлаженный алгоритм вывода формул в системе Maple позволяет легко изменить вид нагрузки. Рассмотрим нагружение фермы по узлам нижнего пояса (рис. 8).

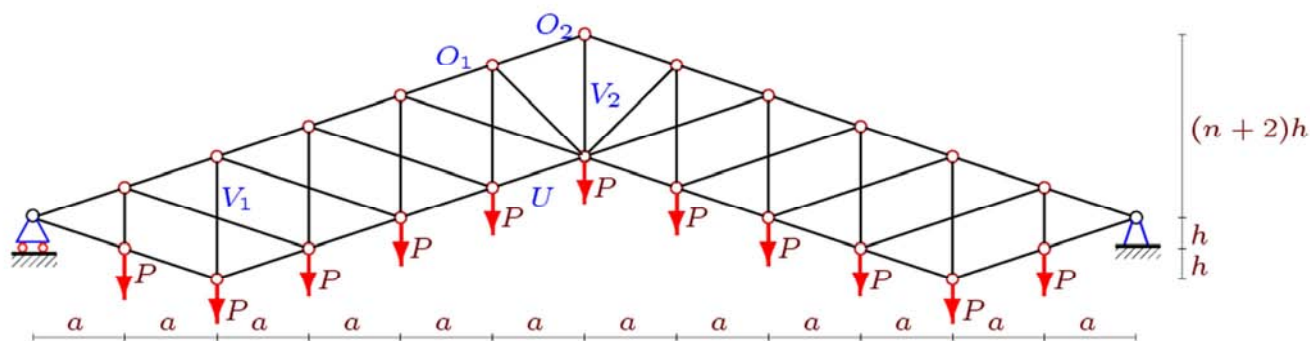


Рисунок 8. Нагрузка по узлам нижнего пояса, n=4

Решение для прогиба имеет ту же форму (1) с отличием только в одном коэффициенте

$$C_{3,n} = 8(n^3 + 12n^2 + 2(11 - (-1)^n)n + 11 - 3(-1)^n).$$

Усилия в критических стержнях имеют вид:

$$U = P(n^2 + (4 - (-1)^n)n - 2(-1)^n + 2)c / (8h),$$

$$V_1 = -P(2n + 1) / 2,$$

$$V_2 = P(n + 2)^2 / 4,$$

$$O_1 = -P(n^2 + (4 + (-1)^n)n + 2(-1)^n + 4)c / (8h),$$

$$O_2 = -P(n + 2)^2 c / (8h).$$

Фермы арочного типа имеют, как правило, большую высоту. Для таких конструкций имеет значение боковая (ветровая нагрузка). Рассмотрим случай горизонтальной равномерной нагрузки по узлам левой половины пролета (рис. 9).

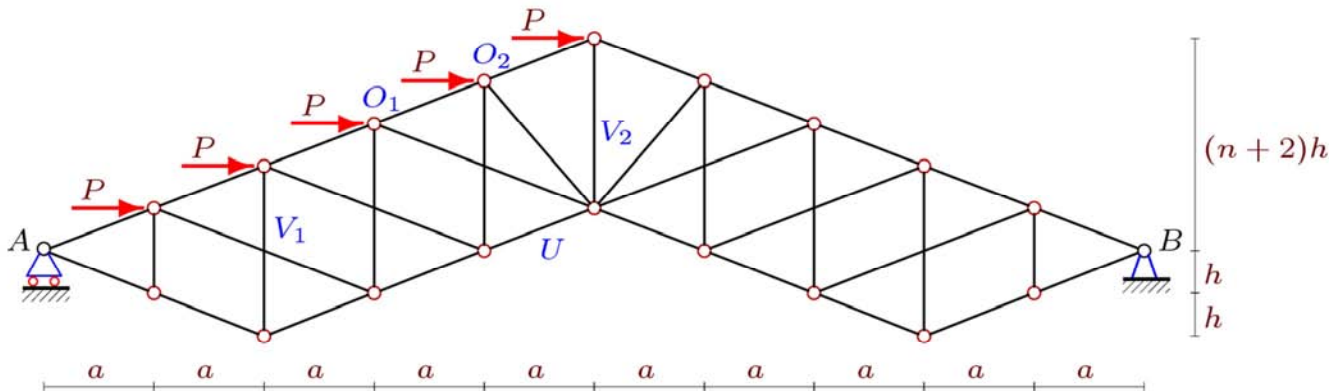


Рисунок 9. Боковая нагрузка, n=3

Решение для прогиба имеет форму, близкую к (1)

$$\Delta_n EF = P(C_{1,n}c^3 + C_{2,n}d^3 + C_{3,n}h^3) / (32ah),$$

где

$$C_{1,n} = (22n^4 + 88n^3 + 44n^2 + (42(-1)^n - 202)n + 75(-1)^n - 219) / 24,$$

$$C_{2,n} = (3n + 5)(1 - (-1)^n) / 4,$$

$$C_{3,n} = 4(3n^3 + 11n^2 - 6((-1)^n + 1)n - 7(-1)^n - 21).$$

Усилия в критических стержнях имеют вид:

$$U = Pc(n+1)(1+6n-(-1)^n)/(32a),$$

$$V_1 = -Ph(n+3)/(4a),$$

$$V_2 = Ph(3n^2-5n-14)/(8a),$$

$$O_1 = -Pc(6n^2+((-1)^n-15)n+11+(-1)^n)/(32a),$$

$$O_2 = -Pc(3n^2-5n-6)/(16a).$$

Использованный алгоритм вывода аналитических зависимостей опробован ранее на плоских [1-8,12-18] и пространственных [19] фермах различной конфигурации. Полученные аналитические решения могут быть использованы и в задачах оптимизации как с помощью генетических алгоритмов [4, 20, 21] (здесь увеличение скорости счета за счет применения готовых формул принципиально важно), так и с помощью нейронных сетей [22]. Обзор аналитических решений для плоских ферм в системе Maple дан в работе [12], арочных — в [13].

4. Выводы

Построена математическая модель предлагаемой схемы статически определимой фермы. На основе хорошо апробированной программы [11], написанной на языке Maple, получены и проанализированы основные формулы, вывод которых поставлен в целях работы.

Сформулируем основные выводы по работе.

1. Предлагаемая схема фермы допускает аналитическое решение для прогиба и для усилий в отдельных стержнях при любом числе панелей.
2. Решение как для прогиба, так и для усилий имеет полиномиальный по числу панелей характер.
3. Выявлены предельные свойства решения.
4. Кривые зависимости прогиба от числа панелей, построенные по выведенным формулам, обнаруживают точки пересечения. Эта особенность конструкции может быть использована для ее оптимизации.
5. Показано, что усилия в некоторых стержнях не зависят от размеров фермы.
6. Отмечено определенное положительное качество предлагаемой схемы решетки фермы — наиболее длинные стержни (раскосы длиной d) имеют либо растягивающие усилия, либо весьма небольшие сжимающие. Это делает конструкцию более устойчивой. При этом число панелей на замеченную особенность не влияет (рис. 4-6).
7. Приведен алгоритм построения картины распределения усилий в стержнях в системе Maple.

Литература

- [1]. Bolotina T. D. The deflection of the flat arch truss with a triangular lattice depending on the number of panels // Bulletin of Scientific Conferences. 2016. № 4-3(8). Pp.7-8.
- [2]. Voropai R.A., Kazmiruk I.Yu. Analytical study of the horizontal stiffness of the flat statically determinate arch truss // Bulletin of Scientific Conferences. 2016. № 2-1(6). Pp. 10-12
- [3]. Rakhmatulina A.R., Smirnova A.A. The formula for the deflection of a truss loaded at half-span by a uniform load // Postulat. 2018. No. 3.
- [4]. Tinkov D.V., Safonov A.A. Design Optimization of Truss Bridge Structures of Composite Materials // Journal of Machinery Manufacture and Reliability, 2017, Vol. 46, No. 1, pp. 46–52. DOI: 10.3103/S1052618817010149
- [5]. Rakhmatulina A.R., Smirnova A.A. The dependence of the deflection of the arched truss loaded on the upper belt, on the number of panels // Science Almanac. 2017. № 2-3(28). С. 268-271. DOI: 10.17117/na.2017.02.03.268
- [6]. Кирсанов М.Н. Аналитический метод расчета прогиба плоской фермы со сложной решеткой шпренгельного типа // Транспортное строительство. 2017. №5. С.11-13.
- [7]. Кирсанов М.Н. Формулы для расчета прогиба и усилий в

References

- [1]. Bolotina T. D. The deflection of the flat arch truss with a triangular lattice depending on the number of panels. Bulletin of Scientific Conferences. 2016. No. 4-3(8). Pp.7-8.
- [2]. Voropai R.A., Kazmiruk I.Yu. Analytical study of the horizontal stiffness of the flat statically determinate arch truss. Bulletin of Scientific Conferences. 2016. No. 2-1(6). Pp. 10-12
- [3]. Rakhmatulina A.R., Smirnova A.A. The formula for the deflection of a truss loaded at half-span by a uniform load. Postulat. 2018. No. 3.
- [4]. Tinkov D.V., Safonov A.A. Design Optimization of Truss Bridge Structures of Composite Materials. Journal of Machinery Manufacture and Reliability. 2017. Vol. 46. No. 1. Pp. 46–52. DOI: 10.3103/S1052618817010149
- [5]. Rakhmatulina A.R., Smirnova A.A. The dependence of the deflection of the arched truss loaded on the upper belt, on the number of panels. Science Almanac. 2017. No. 2-3(28). Pp. 268-271. DOI:10.17117/na.2017.02.03.268
- [6]. Kirsanov M.N. Analiticheskiy metod rascheta progiba ploskoy fermy so slozhnoy reshetkoy shprengel'nogo tipa [Formulas for calculation of the deflection of flat truss with complex lattice] Transportnoye stroitelstvo. 2017. No. 5. Pp.11-13. (rus)

- решетчатой ферме // Механизация строительства. 2017. № 4. С. 20–23. <http://ms.enjournal.net/article/12930/>
- [8]. Кирсанов М.Н. Расчет жесткости стержневой решетки // Вестник машиностроения. 2015. № 8. С. 48-51.
- [9]. Рыбаков Л. С. Линейная теория плоской ортогональной решетки // Механика твердого тела. – 1999. №. 4. С. 174.
- [10]. Кирсанов М. Н. Maple и Maplet. Решения задач механики. СПб.: Изд-во Лань, 2012. 512 с.
- [11]. <http://vuz.exponenta.ru/Truss-diagram-of-forces.rar>
- [12]. Тиньков Д. В. Сравнительный анализ аналитических решений задачи о прогибе ферменных конструкций // Инженерно-строительный журнал. 2015. №5(57). С. 66–73.
- [13]. Осадченко Н.В. Аналитические решения задач о прогибе плоских ферм арочного типа // Строительная механика и конструкции. 2018. Т. 1. № 16. С. 12-33.
- [14]. Shipaeva A.S. Calculation of the deflection of girder beam loaded on the bottom flange in the system Maple // Science Almanac. 2016. N 5-3(19). Pp. 236-239.
- [15]. Астахов С.В. Вывод формулы для прогиба внешне статически неопределимой плоской фермы под действием нагрузки в середине пролета // Строительство и архитектура. 2017. Том 5. №2(15). С. 50–54. DOI:10.12737/25110
- [16]. Ponamareva M.A. The displacement of the support trusses with parallel belts under uniform load // Science Almanac. 2016. N 4-3(18). С.257-259. DOI: 10.17117/na.2016.04.03.257
- [17]. Voropai R. A. Analysis of the deflection of the regular truss with cross type lattice //Science Almanac. 2016. N 4-3(18). Pp.238-240. DOI: 10.17117/na.2016.04.03.238
- [18]. Ponamareva M.A. The displacement of the support trusses with parallel belts under uniform load //Science Almanac. 2016. N 4-3(18). С.257-259. DOI: 10.17117/na.2016.04.03.257
- [19]. Кирсанов М.Н. Напряженное состояние и деформации прямоугольного пространственного стержневого покрытия// Научный журнал строительства и архитектуры. 2016. №1(41). С. 93-100.
- [20]. Kociecki M., Hojjat A. Two-Phase Genetic Algorithm for Topology Optimization of Free-Form Steel Space-Frame Roof Structures with Complex Curvatures // Engineering Applications of Artificial Intelligence. Elsevier, 2014. Pp. 1–10. doi:10.1016/j.engappai.2014.01.010.
- [21]. Li Jian-Ping. Truss Topology Optimization Using an Improved Species-Conserving Genetic Algorithm // Engineering Optimization. 2015. 47 (1): 107–128. doi:10.1080/0305215X.2013.875165.
- [22]. Mehrjooa M., Khaji N., Moharrami H., Bahreininejad A. Damage detection of truss bridge joints using Artificial Neural Networks // Expert Systems with Applications. 2008. Vol.35. N3. Pp. 1122-113. <https://doi.org/10.1016/j.eswa.2007.08.008>
- [7]. Kirsanov M.N. Formuly dlya rascheta progiba i usilyi v reshetchatoy ferme [Formulas for calculating deflection and effort in lattice truss]. Mekhanizatsiya stroitelstva. 2017. No. 4. Pp.20-23. <http://ms.enjournal.net/article/12930/> (rus)
- [8]. Kirsanov M.N. Raschet zhestkosti stержnevoj reshetki [The calculation of the stiffness of the rod grille]. Bulletin of mechanical engineering. 2015. No. 8. Pp. 48-51. (rus)
- [9]. Rybakov L. S. Lineynaya teoriya ploskoy ortogonalnoy reshetki [Linear theory of a planar orthogonal lattice] Mekhanika tverdogo tela. 1999. No. 4. Pp. 174. (rus)
- [10]. Kirsanov M. N. Maple i Maplet. Resheniya zadach mekhaniki [Maple, and Maplet. Solving mechanics problems]. Saint Petersburg. Izd-vo Lan'. 2012. 512 p. (rus)
- [11]. <http://vuz.exponenta.ru/Truss-diagram-of-forces.rar>
- [12]. Tinkov D.V. Sravnitel'nyy analiz analiticheskikh resheniy zadachi o progibe fermennykh konstruksiy [Comparative analysis of analytical solutions to the problem of truss structure deflection]. Magazine of Civil Engineering. 2015. No. 5. Pp. 66–73.(rus)
- [13]. Osadchenko N.V. Analiticheskie resheniya zadach o progibe ploskih ferm arochnogo tipa [Analytical solutions of problems on the deflection of planar trusses of arch type]. Structural mechanics and structures. 2018. Vol. 1. No. 16. Pp. 12-33. (rus)
- [14]. Shipaeva A.S. Calculation of the deflection of girder beam loaded on the bottom flange in the system Maple. Science Almanac. 2016. No. 5-3(19). Pp. 236-239.
- [15]. Astakhov S.V. Vyvod formuly dlya progiba vneshe staticheski neopredelimoj ploskoy fermy pod deystviyem nagruzki v seredine proleta [Derivation of formulas for deflection externally statically indeterminate flat truss under load in the middle of the span]. Stroitelstvo i arkhitektura. 2017. Vol. 5. No. 2(15). Pp. 50-54. DOI: 10.12737/25110 (rus)
- [16]. Ponamareva M.A. The displacement of the support trusses with parallel belts under uniform load. Science Almanac. 2016. No. 4-3(18). Pp.257-259. DOI: 10.17117/na.2016.04.03.257
- [17]. Voropai R. A. Analysis of the deflection of the regular truss with cross type lattice. Science Almanac. 2016. N 4-3(18). Pp. 238-240. DOI: 10.17117/na.2016.04.03.238
- [18]. Ponamareva M.A. The displacement of the support trusses with parallel belts under uniform load. Science Almanac. 2016. No. 4-3(18). S.257-259. DOI: 10.17117/na.2016.04.03.257
- [19]. Kirsanov M.N. Napryazhennoye sostoyaniye i deformatsii pryamougolnogo prostranstvennogo stержneвого pokrytiya [Stress state and deformations of a rectangular spatial rod covering]. Russian Journal of Building Construction and Architecture. 2016. No.1(41). Pp. 93-100. (rus)
- [20]. Kociecki M., Hojjat A. Two-Phase Genetic Algorithm for Topology Optimization of Free-Form Steel Space-Frame Roof Structures with Complex Curvatures. Engineering Applications of Artificial Intelligence. Elsevier, 2014. Pp. 1–10. doi:10.1016/j.engappai.2014.01.010.
- [21]. Li Jian-Ping. Truss Topology Optimization Using an Improved Species-Conserving Genetic Algorithm. Engineering Optimization. 2015. 47 (1): 107–128. doi:10.1080/0305215X.2013.875165.
- [22]. Mehrjooa M., Khaji N., Moharrami H., Bahreininejad A. Damage detection of truss bridge joints using Artificial Neural Networks. Expert Systems with Applications. 2008. Vol.35. No. 3. Pp. 1122-113.

Контактная информация

1.* +7(495)3627314, mpei2004@yandex.ru (Кирсанов Михаил Николаевич, д.ф.-м.н., профессор)

Contact information

1.* +7(495)3627314, mpei2004@yandex.ru (Mikhail Kirsanov, Ph.D., Professor)

©Кирсанов М.Н., 2018