Н. В. ОСАДЧЕНКО

КУРС ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ

Допущено Министерством образования и науки
Российской Федерации в качестве учебного пособия
для студентов технических университетов

МОСКВА
ЮРАЙТ
2014

УДК 531

ББК 22.21

О 664

Осадченко Н.В. **Курс теоретической механики.** М.: ЮРАЙТ, 2014. – 798 с. – ISBN 978-5-9221-0748-8.

В основу пособия положен курс лекций, читаемый автором в Московском энергетическом институте для студентов, обучающихся по направлению “Энергомашиностроение”. Представлены все разделы втузовского курса теоретической механики: статика, кинематика, динамика, основы аналитической механики. Объём и содержание теоретического материала соответствуют требованиям государственных образовательных стандартов 3-го поколения. Помимо этого теоретического материала, пособие для типовых задач по ключевым темам курса содержит рекомендации по их решению, сопровождающиеся примерами решения таких задач (решение части задач предполагает применение компьютера).

Для студентов технических университетов, изучающих курс “Теоретическая механика”, а также для преподавателей механики.

ISBN 978-5-9221-0748-8

ПРЕДИСЛОВИЕ

Данное пособие основывается на курсе лекций, читаемом автором в течение ряда лет в Московском энергетическом институте (МЭИ) для студентов Энергомаша (Институт энергомашиностроения и механики, ЭнМИ) во втором и третьем семестрах. Оно ориентировано на студентов технических вузов, изучающих курс теоретической механики.

При отборе учебного материала учитывались требования государственных образовательных стандартов 3-го поколения. Пособие полностью покрывает тематику примерных программ для односеместрового и двухсеместрового курсов и охватывает большинство тем из программы для трёхсеместрового курса (для полного охвата потребностей последнего надо было бы рассмотреть вопросы, относящиеся к теории гироскопов, теории колебаний и теории устойчивости[1)], интегральным вариационным принципам механики, но тогда значительно вырос бы объём пособия).

Хотя бо́льшая часть излагаемого в пособии материала носит традиционный характер, однако и по подбору материала, и по способу его изложения читатель найдёт немало отличий от имеющихся учебников по теоретической механике.

Во-первых, здесь нет традиционного для учебников XX в. раздела с систематическим изложением теории векторов – надобность в таком разделе отпала, поскольку сейчас студент технического вуза, приступающий к изучению теоретической механики, необходимыми знаниями и навыками уже владеет. Получает он эти знания и навыки на первом году обучения в рамках курса линейной алгебры (представление о содержании такого курса можно составить, обратившись к учебнику О.В.Зиминой “Линейная алгебра и аналитическая геометрия” [55]).

[1)] Последовательное изложение теории колебаний и теории устойчивости предусматривает, что студенты предварительно изучили и усвоили основные разделы теории дифференциальных уравнений (в большинстве технических вузов её изучение приходится на третий семестр). Представляется разумным вынести этот (безусловно, очень важный) материал в отдельный специальный курс. Хорошим дополнением к базовому курсу теоретической механики послужили бы также спецкурсы по теории удара, асимптотическим методам нелинейной механики, вычислительной механике и др.

В рамках этого курса студент знакомится и с основами теории линейных операторов, действующих в конечномерном векторном пространстве. Данное обстоятельство позволило автору настоящего пособия достаточно широко применять операторную технику и при формулировке многих результатов, и при их доказательстве (ранее операторная техника использовалась в учебниках по теоретической механики для классических университетов [7,8,13], но не для втузов).

Практика преподавания показывает, однако, что можно говорить лишь о знакомстве второкурсников с теорией линейных операторов, но не о прочном и уверенном владении ею. Поэтому практически *все* определения и основные результаты данной теории, используемые в курсе теоретической механики, в пособии формулируются и доказываются.

Во-вторых, учтены также новые требования к втузовскому курсу теоретической механики, отражённые в ныне действующих государственных образовательных стандартах. Эти требования предусматривают, что в результате изучения курса студент должен не только освоить учебный материал, знать основные понятия теоретической механики, важнейшие теоремы и следствия из них, владеть типовыми алгоритмами исследования равновесия и движения механических систем. Ему нужно также обрести умение самостоятельно строить и исследовать математические и механические модели технических систем, квалифицированно используя возможности современных компьютеров и компьютерных технологий.

Отсюда вытекает, что значительная часть выполняемых студентом расчётных заданий должна включать компьютерное моделирование механических систем. Пособие содержит методические рекомендации по выполнению таких заданий вместе с разбором конкретных примеров. Заметим, что ориентация на применение компьютерных технологий повлияла и на отбор представленного в пособии теоретического материала: широко применяется матричная техника, аналитическим методам решения задач уделяется большее внимание по сравнению с геометрическими, весьма подробно излагаются методы расчёта скоростей и кратко – методы расчёта ускорений (нужда в таком расчёте при использовании уравнений Лагранжа 2-го рода для решения задач динамики отпадает).

Текст данного пособия (почти весь) представляет собой слегка отредактированный авторский конспект лекций, прочитанных на Энергомаше МЭИ (хотя и в разные годы, так что объём текста примерно на четверть больше, чем запись какого-то определённого курса). При этом более крупным шрифтом набраны предложения, продиктованные студентам для записи в конспектах, а более мелким шрифтом – попутные комментарии и наводящие соображения. Автор стремился не к краткости изложения, а к максимально подробному объяснению излагаемого материала; нередко, комментируя те или иные утверждения или выкладки, он предпочитал дважды (но разными словами) изложить одну и ту же мысль – чтобы доходчивее донести её до сознания студентов.

Весь материал излагается на основе векторного исчисления; при этом векторы и линейные операторы обозначаются полужирными буквами с верхней чертой ($\bar{\mathbf{a}}$, $\bar{\mathbf{u}}$ и т.п.), а скаляры, столбцы и матрицы – обычными буквами (курсивного начертания для латинских букв и прямого – для греческих: a, b, $\mathrm{\omega}$ и т.п.).

В отборе материала для лекций и методике его изложения автор стремился следовать традициям, заложенным его предшественниками – читавшими на Энергомаше МЭИ курс теоретической механики профессорами Игорем Васильевичем Новожиловым и Юрием Григорьевичем Мартыненко.

Автор пользуется случаем выразить искреннюю благодарность за всестороннюю поддержку в работе, советы и ценные замечания своим коллегам по кафедре теоретической механики и мехатроники МЭИ, а особенно – профессорам А.И.Кобрину, В.В.Подалкову, М.Н.Кирсанову, И.В.Меркурьеву, доцентам М.Ф.Зацепину и А.В. Корецкому. Он заранее благодарит тех, кто пришлёт свои замечания и пожелания, касающиеся дальнейшего улучшения книги.

ВВЕДЕНИЕ

Теоретическая механика – одна из фундаментальных дисциплин физико-математического цикла, которая является базой многих отраслей естествознания и большинства технических наук.

Выдающиеся достижения космической техники, энергетического и транспортного машиностроения, строительной индустрии, приборостроения, робототехники опираются на глубокое понимание законов механики и точный расчёт.

В чём состоит предмет механики? Если пытаться дать совсем краткую формулировку, то механика – это наука о законах движения тел.

К сожалению, короткие формулировки – не самые точные. В нашем случае проблема состоит в том, что слово "движение" в естествознании часто используется в широком смысле, и под движением понимают *любые* изменения, происходящие при электромагнитных, тепловых, химических и других процессах. Не все такие изменения являются объектом изучения механики.

Сделаем необходимые уточнения.

Механическое движение – процесс перемещения материальных тел в пространстве с течением времени.

С учётом этого предмет механики можно определить так.

Механика – наука о закономерностях механического движения материальных тел.

Строго говоря, если иметь в виду современную механику, то это – даже не отдельная наука, а целый комплекс наук.

В состав механики входят:

– теоретическая механика;
– механика сплошной среды;
– специальные механические дисциплины.

Последние носят прикладной характер и образуют мост между первыми двумя дисциплинами и техническими науками. Таких специальных дисциплин много: теория механизмов и машин, строительная механика, сопротивление материалов, гидравлика, детали машин и т.д.

Наш курс посвящён теоретической механике, и ей можно дать такое определение.

Теоретическая механика – наука об общих законах механического движения недеформируемых материальных тел.

Изучение же механических свойств деформируемых тел является предметом *механики сплошной среды*.

Нередко механику рассматривают как раздел физики; Вы знаете, что в курсах физики начальные главы посвящены именно вопросам механики.

Однако в настоящее время всё более утверждается взгляд на механику как на самостоятельную науку. Дело в том, что она существенно отличается от разделов физики по своей методологии.

В самом деле, современная физика по методам исследования подразделяется на теоретическую и экспериментальную физику. Эти две стороны физики носят, в общем-то, равноправный характер.

В механике положение дел иное.

Основные особенности современной механики:

– резкое преобладание теоретических методов над экспериментальными;

– дедуктивный характер построения теории;

– ориентация не столько на открытие новых законов природы, сколько на запросы техники.

Действительно, основные законы механики тоже возникли как результат эксперимента; но они были сформулированы уже давно, и с тех пор в арсенале механики главную роль играют математические методы исследования. Нередко грань между математикой и механикой почти стирается.

В связи с изложенными особенностями современную механику естественно рассматривать не как раздел физики, а в качестве самостоятельной науки, отличающейся и используемыми методами, и кругом решаемых задач. Ближайшая аналогия: атомы и молекулы – предмет изучения физики, но процессы образования молекул из атомов, разнообразные превращения вещества изучаются уже химией, которая также считается самостоятельной областью естествознания.

Уделим некоторое внимание истории теоретической механики. Более подробные сведения читатель может найти в учебниках и монографиях по истории механики: [45–48] (в частности, в периодизации истории механики мы следовали известному советскому механику и историку науки Н.Д.Моисееву [46]).

Периодизация истории механики.

Вообще говоря, механика – наука древняя. С механическими явлениями человечество столкнулось на заре своего существования. Само выделение человека из общей массы живых существ связано с началом трудовой деятельности, и, прежде всего, – систематического изготовления орудий труда.

Древнейшие известные каменные орудия имеют возраст около 3 миллионов лет. Уже тогда перед человеком вставали механические задачи: как именно нужно ударить одним камнем по другому, чтобы расколоть последний, получив орудие нужной формы.

Позднее появились: лук и стрелы, гончарный круг, ручной ткацкий станок, блоки, весы, колёсные повозки. Люди начали возводить крупные здания и сооружения. Постепенно накапливались навыки обращения с простейшими орудиями труда, навыки возведения разнообразных строений.

Но на этом этапе материал, получаемый из практической древности, не получал сколь либо заметной теоретической проработки.

Итак:

1°. Донаучный период (до начала IV в. до н.э.).

Использованное здесь прилагательное отражает лишь тот факт, что в механике отсутствовал теоретический компонент. Тем не менее данный период накопления механических знаний нельзя недооценивать.

От этой эпохи до нас дошли и прекрасные творения архитектуры, и замечательные изделия ремесленников. Многие вещи, окружающие нас и сегодня, имеют прототипы в той эпохе.

А принципы работы орудий и приспособлений, известных в древности, в подавляющем большинстве основаны именно на законах механики. Только эти законы не были явно сформулированы, и человек пользовался ими неосознанно.

Заслуга выведения механики на уровень теоретического осмысления законов природы принадлежит древнегреческой цивилизации. Именно в Древней Греции, в начале IV в. до н.э., механика начинает складываться как наука, вступив в следующий период своего развития.

2°. Элементарный период (до начала XVII в.).

В этот период история механики перестаёт быть безымянной. Ограничимся лишь тремя – наиболее яркими – именами учёных, стоявших у истоков теоретической механики.

IV в. до н.э.:

Архит Тарентский (428 – 365 до н.э.): основы теории “простых машин”.

Имеются в виду рычаг, весы, колесо, блок, клин. Архит впервые стал разрабатывать механику, применяя в ней математические методы (а в механике – математические). Он написал и первый трактат по механике (до нас этот трактат не дошёл).

Архит сочетал в себе талант математика и инженера. По сведениям древних авторов, он якобы построил автоматического голубя, который мог летать.

Евдокс Книдский (408 – 355 до н.э.): кинематическая модель планетных движений.

Евдокс был одним из крупнейших греческих математиков. Но мы сейчас говорим о созданной им модели Солнечной системы из концентрических сфер. Это была первая кинематическая модель механической системы.

В модели Евдокса центром планетной системы являлась Земля. Движение каждой планеты моделировалось при помощи четырёх сфер, каждая из которых равномерно вращалась относительно другой. К 20 планетным сферам добавлялись три для Солнца, три для Луны и одна для неподвижных звёзд – всего было 27 сфер.

С помощью этой модели Евдокс сумел количественно объяснить прямые и попятные движения планет по небосводу.

Разумеется, с точки зрения наших сегодняшних знаний модель Евдокса выглядит фантастической. Но в те времена истинное устройство Солнечной системы было ещё неизвестно, а модель Евдокса позволяла производить *расчёты* положений светил на небе, что и было нужно для практики. Кстати, именно в этой модели впервые были разработаны правила сложения вращательных движений, с которыми Вам предстоит встретиться в курсе теоретической механики.

Позднее *Гераклид Понтийский* (ок. 390 – ок. 322 до н.э.), *Гиппарх Никейский* (ок. 180 – 125 до н.э.) и *Клавдий Птолемей* (ок. 100 – 178) предложили более совершенные кинематические модели планетных движений, добившись в итоге прекрасного для того времени согласия с данными наблюдений.

Наконец, третий из крупнейших механиков IV века:

Аристотель из Стагиры (384 – 322 до н.э.): первая попытка сформулировать общие законы движения.

Аристотель в своих трудах стремился выявить универсальные законы, на основе которых можно было бы решать самые разнообразные задачи о движении и равновесии тел. Речь шла уже о законах динамики. Именно в трудах Аристотеля теоретическая механика впервые предстала как целостная научная теория.

Впрочем, он не слишком преуспел в формулировке общих законов механики. Его труды – это причудливая смесь правильных положений с утверждениями нечёткими, а зачастую – и явно ошибочными. Главная ошибка Аристотеля такова: мы знаем, что постоянная сила соответствует постоянному ускорению, а он считал, что – постоянной скорости. Поэтому научных основ динамики Аристотелю заложить не удалось; однако некоторые его результаты выдержали проверку временем, и Вы с ними ещё встретитесь в данном курсе.

Между прочим, именно в школе Аристотеля возникло и само название "механика". Происхождение этого названия таково.

"Механика" (буквально "ухищрение") – от греческого слова μηχανη (механэ): "машина".

Первоначально слово "механэ" имело двоякий смысл: либо "хитрость, уловка", либо "хитроумное приспособление". В последнем смысле оно использовалось для обозначения подъёмных машин, которые в греческих театрах опускали и поднимали актёров, изображавших богов.

Римляне заимствовали у греков это слово в форме machina ("махина") – отсюда и произошло русское слово "машина". У римлян это слово стало обозначать уже всякое приспособление, где при помощи малой силы требовалось получить большую.

Таким образом, под механикой первоначально понимали искусство создания различных "хитроумных" механизмов и машин.

К числу крупнейших древнегреческих механиков нужно отнести также *Архимеда*, творчество которого относится уже к следующему веку – к III веку до нашей эры.

Архимед из Сиракуз (287 – 212 до н.э.): начало аксиоматизации механики.

Архимед сделал только первый шаг в этом направлении, сформулировав ряд аксиом о равновесии рычага. Он ввёл некоторые важные понятия статики, в частности – понятие центра тяжести твёрдого тела (с его результатами мы познакомимся при изучении теории параллельных сил). Им были заложены также основы гидростатики (включая знаменитый закон Архимеда).

Хотя Архимед занимался довольно-таки простыми – с современной точки зрения – задачами механики, его достижения выдержали проверку временем и послужили отправным пунктом для многих исследований позднейшего времени.

Нужно упомянуть также *Герона Александрийского* (I в. н.э.), который, развивая идеи Архимеда, впервые сформулировал правила расчёта равновесия простых машин.

Но в целом механика в элементарном периоде развивалась медленно. Успехи её, как правило, сводились к решению отдельных, весьма несложных задач. Применяемый математический аппарат был очень простым – отсюда и название периода.

Это относится и к механике античности, и к механике средневекового Востока. В Европе же в раннем средневековье наука вообще была отброшена назад.

Механика средневекового Востока в целом продолжала оставаться в круге идей, выработанных механикой античности. Однако появлялись и отдельные новые результаты – особенно в трудах таких учёных, как Сабит *Ибн Корра* (836 – 901), Абу Рейхан *ал-Беруни* (973 – 1048), Абд ар-Рахман *ал-Хазини* (XII в.), Насир ад-Дин *ат-Туси* (1201 – 1274).

В Западной Европе возрождение механики началось лишь в XIII веке, и именно с этого времени она начинает продвигаться вперёд. Потом её развитие всё более ускоряется, хотя она и остаётся ещё на элементарном уровне развития.

К числу наиболее выдающихся учёных-механиков европейского средневековья и эпохи Возрождения следует отнести *Иордана Неморария* (XIII в.), Никола *Орезма* (1323 – 1382), Николая *Коперника* (1473 – 1543), Симона *Стевина* (1548 – 1620).

В конце концов эволюционное развитие механики перерастает в научную революцию, и она вступает в третий период своего развития.

3°. Период становления классической механики (XVII – XVIII вв.).

Именно в этот период формируются основные понятия и основные законы теоретической механики. Механика преодолевает заблуждения предыдущей эпохи и обретает необходимый математический аппарат. При этом она прочно утверждается в авангарде всего естествознания.

Среди многих имён учёных, сыгравших важную роль в становлении теоретической механики, особо выделим четыре:

Основоположники классической механики: Галилей, Ньютон, Эйлер, Лагранж.

С именами этих учёных и с полученными ими результатами Вы ещё не раз встретитесь, изучая курс теоретической механики. Начнём с научного вклада Галилея.

Замечание 1. Если в состав механической системы наряду с твёрдыми телами входят и материальные точки, то:

– их не нумеруют;
– слагаемое в (∗∗∗), отвечающее каждой такой точке A, обозначают T_A и вычисляют как $\dfrac{1}{2}\, m\, v_A^2$.

Эта формула для кинетической энергии материальной точки Вам известна ещё из школы. В чём суть упомянутой ошибки? Совершающий её студент рассматривает точку как тело и указывает для него в качестве индекса вид движения (для материальной точки все эти слова – поступательное, вращательное, плоское движение – смысла не имеют: точка просто движется).

А затем студент, написавший, например, индекс “общ”, пытается вычислить для точки угловую скорость (которую материальная точка в принципе иметь не может) и момент инерции.

Беды не случится, если в формуле для общего случая плоского движения помнить, что момент инерции вычисляется относительно центра масс; для материальной точки его роль играет она сама, и момент инерции будет нулевым. Но, к сожалению, немало встречается работ, в которых студент вычисляет момент инерции относительно какого-то другого полюса; в результате он получает, разумеется, *неверное* выражение для кинетической энергии.

Замечание 2. Нумеровать следует *все* движущиеся тела; если тело – невесомое, то его вклад в T будет равен нулю, но в кинематическом плане такое тело не отличается от остальных.

Напомним, что в кинематике мы нумеровали как раз все движущиеся тела. При вычислении кинематической энергии системы обычно требуется вычислить её в виде функции обобщённых скоростей (и координат). Следовательно, в ходе решения требуется решить такую кинематическую задачу: выразить все линейные и угловые скорости через обобщённую скорость. Если невесомое тело, скажем, имеет ненулевую угловую скорость, то при составлении кинематических графов эта скорость также войдёт в формулы.

Есть задачи, в которых именно угловая скорость невесомого тела играет роль обобщённой скорости.

Получим теперь для кинетической энергии формулу, характеризующую её изменение с течением времени.

3. Теорема об изменении кинетической энергии СМТ.

Это – одна из общих теорем динамики, т.е. теорема из того же ряда, что и теоремы об изменении количества движения, кинетического момента и о движении центра масс.

Теорема (закон изменения кинетической энергии). Производная по времени от кинетической энергии СМТ равна сумме мощностей *внешних* и *внутренних* сил:

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = \sum_\nu \left(\overline{\mathbf{F}}_\nu^{(e)}, \overline{\mathbf{v}}_\nu\right) + \sum_\nu \left(\overline{\mathbf{F}}_\nu^{(i)}, \overline{\mathbf{v}}_\nu\right)}\,.$$

Обратите внимание: это – единственная из общих теорем динамики, в которой внутренние силы фигурируют наравне с внешними.

■ Запишем для каждой точки уравнение II закона Ньютона:

$$m_\nu \overline{\mathbf{w}}_\nu = \overline{\mathbf{F}}_\nu^{(e)} + \overline{\mathbf{F}}_\nu^{(i)}\,.$$

Здесь $\overline{\mathbf{F}}_\nu^{(e)}$ и $\overline{\mathbf{F}}_\nu^{(i)}$ – равнодействующие внешних и внутренних сил, приложенных к ν-й точке системы.

Теперь вычислим производную от кинетической энергии.

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}\sum_\nu m_\nu \underbrace{v_\nu^2}_{(\overline{\mathbf{v}}_\nu,\,\overline{\mathbf{v}}_\nu)}\right) = \frac{1}{2}\sum_\nu m_\nu \cdot 2\left(\overline{\mathbf{w}}_\nu, \overline{\mathbf{v}}_\nu\right) =$$

$$= \sum_\nu \left(\underbrace{m_\nu \overline{\mathbf{w}}_\nu}_{\overline{\mathbf{F}}_\nu^{(e)} + \overline{\mathbf{F}}_\nu^{(i)}}, \overline{\mathbf{v}}_\nu\right) = \sum_\nu \left(\overline{\mathbf{F}}_\nu^{(e)}, \overline{\mathbf{v}}_\nu\right) + \sum_\nu \left(\overline{\mathbf{F}}_\nu^{(i)}, \overline{\mathbf{v}}_\nu\right).$$

■

Теорема принадлежит И. и Д. Бернулли – швейцарским математикам и механикам.

Звали их так:

Иоганн Бернулли (1667 – 1748); Даниил Бернулли (1700 – 1782), его сын.

Это были крупнейшие учёные своего времени, но их именами не исчерпывается перечень всех представителей семейства Бернулли, известных в истории науки. Не менее крупным учёным был Якоб Бернулли (1654 – 1705), старший брат Иоганна; а всего след в науке оставили 12 представителей этого семейства.

И Иоганн, и Даниил Бернулли плодотворно работали в области математического анализа и механики. Оба они – наряду с Эйлером и Даламбером – считаются основоположниками гидродинамики.

У Иоганна Бернулли есть ещё одна заслуга перед механикой: он был учителем самого Эйлера.

Что касается Даниила, то он в 1725 г. приехал вместе с братом Николаем в Россию. Николай Бернулли (1695 – 1726) умер через восемь месяцев, а Даниил проработал в России восемь лет, после чего вернулся в Швейцарию.

Между прочим, именно братья Бернулли пригласили в Россию Эйлера (с которым подружились ещё на родине, когда тот учился у их отца).

Возвращаясь к теореме об изменении кинетической энергии, отметим, что Иоганн и Даниил Бернулли пришли к ней в серии работ, выполненных в 20-х – 30-х гг. XVIII века. Они начали с частных случаев, а потом постепенно подошли и к общей формулировке.

Сделаем одно замечание по поводу формулировки теоремы об изменении кинетической энергии.

Замечание. При наличии связей в состав $\overline{\mathbf{F}}_\nu^{(e)}$ и $\overline{\mathbf{F}}_\nu^{(i)}$ входят реакции связей. Если связи – идеальные и стационарные, то вклада в сумму мощностей реакции не дают.

В самом деле, идеальность означает, что для любой системы возможных скоростей суммарная мощность реакций связей равна нулю. А в случае стационарных связей действительные скорости принадлежат к числу возможных.

Это – общая закономерность, и её учёт имеет большое значение при решении конкретных задач. Вот – важный частный случай.

В частности, равна нулю мощность реакций внутренних связей в неизменяемой СМТ (и в АТТ).

А этот факт мы уже отмечали; именно, связи в неизменяемой системе материальных точек приводились как один из примеров идеальных стационарных связей.

Поэтому для АТТ теорема принимает вид:

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = N^{(e)} \equiv \left(\overline{\mathbf{R}}, \overline{\mathbf{v}}_B\right) + \left(\overline{\mathbf{L}}_B, \overline{\omega}\right),$$

где $\overline{\mathbf{R}}$ и $\overline{\mathbf{L}}_B$ – главный вектор и главный момент действующих на тело сил, B – текущее положение произвольной телесной точки B^*.

Но вернёмся от данного частного случая к общей ситуации. Нетрудно видеть, что теореме об изменении кинетической энергии можно придать и другую форму.

Запишем теорему об изменении кинетической энергии СМТ в виде

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = N^{(e)} + N^{(i)},$$

где $N^{(e)}$ и $N^{(i)}$ – мощности внешних и внутренних сил, и проинтегрируем:

$$T(t_2) - T(t_1) = A^{(e)} + A^{(i)}.$$

Итак:

Изменение кинетической энергии СМТ за конечное время равно сумме работ внешних и внутренних сил за это время (теорема об изменении кинетической энергии СМТ в *интегральной* форме).

При этом для неизменяемой СМТ (или АТТ):

$$T(t_2) - T(t_1) = A^{(e)}.$$

Получим также простое следствие из теоремы об изменении кинетической энергии.

Следствие. Если на данном отрезке времени $N^{(e)} \equiv 0$ и $N^{(i)} \equiv \equiv 0$, то $T = \text{const}$.

Иными словами, если мощности внешних и внутренних сил тождественно равны нулю, то кинетическая энергия остаётся неизменной.

Действительно, $N^{(e)} = 0$ и $N^{(i)} = 0 \quad \Rightarrow \quad \dfrac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = 0$.

Если последнее равенство на данном отрезке времени выполняется тождественно, то кинетическая энергия будет *сохраняться*, т.е. сохранять своё начальное значение неизменным.

Вывод: в данном случае система уравнений движения имеет первый интеграл

$$T \equiv \frac{1}{2} \sum_{\nu} m_\nu \,(v_{\nu x}^2 + v_{\nu y}^2 + v_{\nu z}^2) = C ,$$

называемый *интегралом кинетической энергии*.

В левой части приведённого соотношения записано явное выражение T через переменные состояния (сейчас их роль играют координаты и компоненты векторов скоростей точек системы). Данная скалярная функция переменных состояния не равна тождественно константе, но остаётся постоянной вдоль любого решения системы уравнений движения.

В конкретных задач вид интеграла кинетической энергии (да и выбор переменных состояния) может быть иным.

Например, уравнения движения АТТ с неподвижной точкой O при отсутствии внешних сил имеют интеграл кинетической энергии, принимающий вид

$$T \equiv \frac{1}{2} \left(\overline{\omega}, \overline{\mathbf{J}}_O \overline{\omega} \right) = C .$$

Впрочем, задач, в которых кинетическая энергия сохраняется, не так много; однако часто сохраняется другая величина, также имеющая размерность энергии. Этот случай мы рассмотрим позднее.

4. Тождества Лагранжа.

Докажем два вспомогательных тождества, которые нам потребуются при выводе уравнений Лагранжа. Для краткости и формулировок, и доказательства воспользуемся $3n$-мерной записью основных соотношений.

Пусть $q_1, \ldots, q_s$ – обобщённые координаты механической системы, моделируемой посредством СМТ из n точек.

В последующих рассуждениях мы не будем различать исходную систему и её модель.

Объединим радиус-векторы и скорости точек СМТ в $3n$-мерные векторы $\overline{\mathbf{r}}$ и $\overline{\mathbf{v}}$: радиус-вектор и скорость изображающей точки.

Данным приёмом мы пользовались уже не раз.

Продифференцируем по q_i соотношение

$$(*) \qquad \overline{\mathbf{r}} = \overline{\mathbf{r}}\,(q_1, \ldots, q_s, t)\,,$$

задающее параметризацию механической системы:

$$\frac{\partial \overline{\mathbf{r}}}{\partial q_i} \equiv \overline{\mathbf{u}}^{(i)} = \overline{\mathbf{u}}^{(i)}(q_1, \ldots, q_s, t)\,.$$

Это – передаточная функция скорости изображающей точки для i-й обобщённой скорости; она – функция тех же переменных, что и $\overline{\mathbf{r}}$.

Теорема. Справедливы тождества:

$$\boxed{\frac{\partial \overline{\mathbf{r}}}{\partial q_i} = \frac{\partial \overline{\mathbf{v}}}{\partial \dot{q}_i}\,, \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial \overline{\mathbf{r}}}{\partial q_i} = \frac{\partial \overline{\mathbf{v}}}{\partial q_i}}\;.$$

Запомнить эти тождества можно так: $\overline{\mathbf{v}}$ – это $\dot{\overline{\mathbf{r}}}$. Поэтому если выражение для передаточной функции трактовать как дробь, то первое тождество утверждает: если под знаками ∂ продифференцировать величины $\overline{\mathbf{r}}$ и q_i по времени, то точки, обозначающие дифференцирование по времени, в числителе и знаменателе сокращаются.

Второе тождество утверждает, что для дифференцирования по времени передаточной функции достаточно продифференцировать стоящую в числителе величину $\overline{\mathbf{r}}$.

■ Докажем сначала справедливость первого из этих тождеств.

1°. Воспользуемся известным выражением вектора $\overline{\mathbf{v}}$ через обобщённые скорости:

$$\overline{\mathbf{v}} = \sum_i \overline{\mathbf{u}}^{(i)} \dot{q}_i + \overline{\mathbf{u}}^{\circ} \equiv \frac{\partial \overline{\mathbf{r}}}{\partial q_1}\dot{q}_1 + \ldots + \frac{\partial \overline{\mathbf{r}}}{\partial q_s}\dot{q}_s + \frac{\partial \overline{\mathbf{r}}}{\partial t}\,.$$

Значит, мы передаточные функции скоростей отдельных точек также объединили в один $3n$-мерный вектор.

Отсюда видно, что $\overline{\mathbf{v}}$ – функция вида

$$(**) \qquad \overline{\mathbf{v}} = \overline{\mathbf{v}}\,(\dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_s, q_1, \ldots, q_s, t)\,.$$

Заметим при этом, что коэффициенты в выражении скорости $\overline{\mathbf{v}}$ через обобщённые скорости, как мы уже отмечали, от обобщённых скоростей не зависят. Поэтому характер зависимости функции $\overline{\mathbf{v}}$ от обобщённых скоростей оказывается линейным.

Так как функция $\overline{\mathbf{v}}$ зависит от $\dot{q}_i$ линейно, то частная производная от $\overline{\mathbf{v}}$ по $\dot{q}_i$ равна коэффициенту при $\dot{q}_i$:

$$\frac{\partial \overline{\mathbf{v}}}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial \overline{\mathbf{r}}}{\partial q_i} .$$

Стало быть, первое из тождеств Лагранжа мы доказали.

2°. $$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial \overline{\mathbf{r}}}{\partial q_i} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,\overline{\mathbf{u}}^{(i)} =$$

$$= \frac{\partial \overline{\mathbf{u}}^{(i)}}{\partial q_1}\dot{q}_1 + \ldots + \frac{\partial \overline{\mathbf{u}}^{(i)}}{\partial q_s}\dot{q}_s + \frac{\partial \overline{\mathbf{u}}^{(i)}}{\partial t} =$$

$$= \frac{\partial^2 \overline{\mathbf{r}}}{\partial q_1\,\partial q_i}\dot{q}_1 + \ldots + \frac{\partial^2 \overline{\mathbf{r}}}{\partial q_s\,\partial q_i}\dot{q}_s + \frac{\partial^2 \overline{\mathbf{r}}}{\partial t\,\partial q_i} .$$

С другой стороны, в силу (**)

$$\frac{\partial \overline{\mathbf{v}}}{\partial q_i} = \frac{\partial^2 \overline{\mathbf{r}}}{\partial q_i\,\partial q_1}\dot{q}_1 + \ldots + \frac{\partial^2 \overline{\mathbf{r}}}{\partial q_s\,\partial q_i}\dot{q}_s + \frac{\partial^2 \overline{\mathbf{r}}}{\partial q_i\,\partial t} .$$

Сопоставим два полученных выражения. Они очень похожи, только порядок дифференцирования в частных производных различен.

Вспомним теперь одно из тех требований, которые предъявляют в аналитической механике к параметризации механической системы.

Учтём, что в силу требований к параметризации функция (*) – дважды непрерывно дифференцируемая функция своих аргументов.

Для таких функций справедлива теорема о независимости частных производных от порядка дифференцирования, так что

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial \overline{\mathbf{r}}}{\partial q_i} = \frac{\partial \overline{\mathbf{v}}}{\partial q_i}$$

Вот мы доказали и второе из тождеств Лагранжа. ■

Замечание. При переходе к обычным векторам из $\mathscr{V}$ каждое из тождеств Лагранжа переходит в n тождеств:

$$\frac{\partial \overline{\mathbf{r}}_\nu}{\partial q_i} = \frac{\partial \overline{\mathbf{v}}_\nu}{\partial \dot{q}_i} , \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial \overline{\mathbf{r}}_\nu}{\partial q_i} = \frac{\partial \overline{\mathbf{v}}_\nu}{\partial q_i} , \qquad \nu = 1, \ldots, n .$$

Иногда бывает удобнее пользоваться именно такой формой записи тождеств Лагранжа.

Теперь перейдём к выводу уравнений Лагранжа 2-го рода.

5. Вывод уравнений Лагранжа 2-го рода.

Выделим сначала тот класс механических систем, уравнения которых можно записать в форме уравнений Лагранжа 2-го рода..

Рассмотрим механическую систему с идеальными, двусторонними и голономными связями. Пусть СМТ из n точек с массами m_ν – модель данной системы.

Начнём с того, что выразим кинетическую энергию системы через скалярное произведение двух $3n$-мерных векторов.

Объединим векторы $\overline{\mathbf{v}}_\nu$ и $m_\nu \overline{\mathbf{v}}_\nu$, $\nu = 1, \ldots, n$, в два $3n$-мерных вектора: $\overline{\mathbf{v}}$ с компонентами $v_{1x}, v_{1y}, v_{1z}, \ldots, v_{nz}$ и $\overline{\mathbf{M}}\,\overline{\mathbf{v}}$ с компонентами $m_1 v_{1x}, m_1 v_{1y}, m_1 v_{1z}, \ldots, m_n v_{nz}$, где $\overline{\mathbf{M}}$ – оператор масс.

Напомним, что с оператором масс (а это – положительно определённый симметричный оператор в $3n$-мерном пространстве) мы впервые встретились, рассматривая получение определяющих соотношений для реакций идеальных связей. Только тогда мы умножали оператор масс на $3n$-мерный вектор ускорения изображающей точки.

Имеем:

$$T = \frac{1}{2} \sum_\nu m_\nu (\overline{\mathbf{v}}_\nu, \overline{\mathbf{v}}_\nu) \equiv \frac{1}{2} \sum_\nu (\overline{\mathbf{v}}_\nu, m_\nu \overline{\mathbf{v}}_\nu) = \frac{1}{2} (\overline{\mathbf{v}}, \overline{\mathbf{M}}\,\overline{\mathbf{v}}) .$$

Подобный приём – замену суммы n скалярных произведений трёхмерных векторов на скалярное произведение $3n$-мерных векторов – мы применяли уже не раз.

Из полученной формулы видно, что кинетическая энергия системы – это квадратичная функция вектора скорости изображающей точки. Значит, она зависит от компонент данного вектора; ни от чего больше она не зависит.

Но мы собираемся работать с аппаратом обобщённых координат. Поэтому нам удобнее будет рассматривать T как функцию других аргументов: обобщённых скоростей, обобщённых координат и времени.

При этом учтём, что матрица оператора масс – это диагональная матрица, на главной диагонали которой стоят массы всех точек системы (причём каждая масса повторяется трижды). Значит, элементы матрицы масс – константы; то же самое можно сказать и о само́м операторе масс.

Поскольку $\overline{\mathbf{M}} = \text{const}$ и

$$\overline{\mathbf{v}} = \overline{\mathbf{v}} (\dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_s, q_1, \ldots, q_s, t) ,$$

будем трактовать T как функцию тех же аргументов:

$$T = T (\dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_s, q_1, \ldots, q_s, t) .$$

При такой трактовке кинетической энергии естественно поставить вопрос о её частных производных по этим аргументам. Начнём с частных производных по обобщённым скоростям.

Пользуясь симметричностью оператора $\overline{\mathbf{M}}$, вычисляем:

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \overline{\mathbf{v}}}{\partial \dot{q}_i}, \overline{\mathbf{M}}\,\overline{\mathbf{v}}\right) + \frac{1}{2}\underbrace{\left(\overline{\mathbf{v}}, \overline{\mathbf{M}}\frac{\partial \overline{\mathbf{v}}}{\partial \dot{q}_i}\right)}_{\left(\overline{\mathbf{M}}\,\overline{\mathbf{v}}, \frac{\partial \overline{\mathbf{v}}}{\partial \dot{q}_i}\right)} = \left(\frac{\partial \overline{\mathbf{v}}}{\partial \dot{q}_i}, \overline{\mathbf{M}}\,\overline{\mathbf{v}}\right);$$

первое тождество Лагранжа даёт:

$$(*) \qquad \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} = \left(\frac{\partial \overline{\mathbf{r}}}{\partial q_i}, \overline{\mathbf{M}}\,\overline{\mathbf{v}}\right).$$

Найдём теперь частные производные от кинетической энергии по обобщённым координатам (а частная производная по t нам не понадобится).

Аналогично, с учётом второго тождества Лагранжа находим:

$$\frac{\partial T}{\partial q_i} = \left(\frac{\partial \overline{\mathbf{v}}}{\partial q_i}, \overline{\mathbf{M}}\,\overline{\mathbf{v}}\right) \equiv \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial \overline{\mathbf{r}}}{\partial q_i}, \overline{\mathbf{M}}\,\overline{\mathbf{v}}\right).$$

На этом наши подготовительные выкладки можно считать завершёнными. Переходим к непосредственному выводу уравнений Лагранжа 2-го рода.

Запишем для рассматриваемой системы уравнения даламберова равновесия в обобщённых координатах:

$$Q_i + Q_i^{\text{ин}} = 0\,, \qquad i = 1, \ldots, s\,,$$

и представим их в виде

$$(**) \qquad -\,Q_i^{\text{ин}} = Q_i\,.$$

В действительности от записанных только что соотношений уравнения Лагранжа 2-го рода отличаются только формой записи.

Имеем:

$$-\,Q_i^{\text{ин}} = -\sum_{\nu}\Big(\underbrace{\overline{\boldsymbol{\Phi}}_\nu}_{-m_\nu \overline{\mathbf{w}}_\nu}, \frac{\partial \overline{\mathbf{r}}_\nu}{\partial q_i}\Big) =$$

$$= \sum_{\nu}\left(\frac{\partial \overline{\mathbf{r}}_\nu}{\partial q_i}, m_\nu \overline{\mathbf{w}}_\nu\right) \equiv \left(\frac{\partial \overline{\mathbf{r}}}{\partial q_i}, \overline{\mathbf{M}}\,\overline{\mathbf{w}}\right).$$

Получилось выражение, очень похожее на выражение для частной производной от кинетической энергии по обобщённой скорости; только там оператор масс умножался уже не на ускорение изображающей точки, а на её скорость.

Но ускорение получается из скорости путём дифференцирования по времени. Поэтому напрашивается преобразование, которое и приведёт нас к цели.

Дифференцируем (∗) по t:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} = \underbrace{\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial \overline{\mathbf{r}}}{\partial q_i}, \overline{\mathbf{M}}\,\overline{\mathbf{v}}\right)}_{\dfrac{\partial T}{\partial q_i}} + \underbrace{\left(\frac{\partial \overline{\mathbf{r}}}{\partial q_i}, \overline{\mathbf{M}}\,\overline{\mathbf{w}}\right)}_{-\,Q_i^{\text{ин}}},$$

так что

$$-\,Q_i^{\text{ин}} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i}\ .$$

Теперь осталось записать вывод.

Вывод: уравнения даламберова равновесия в форме (∗∗) можно иначе записать в виде **уравнений Лагранжа 2-го рода**:

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i}\ , \qquad i = 1, \ldots, s\ .$$

Эти уравнения вместе с их выводом опубликованы Лагранжем в уже упоминавшемся трактате “Аналитическая механика” в 1788 году. Их число равно числу степеней свободы механической системы.

Отметим, что для частных производных от кинетической энергии по обобщённым скоростям имеется специальное название.

Величина $\dfrac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}$ – **обобщённый импульс**, отвечающий обобщённой координате q_i.

Поясним происхождение данного названия.

Пояснение. Пусть для свободной материальной точки M^* массы m, к которой приложена сила $\overline{\mathbf{F}}$, за обобщённые координаты взяты её декартовы координаты x, y, z.

Тогда

$$\overline{\mathbf{v}}_M = \dot{x}\,\overline{\mathbf{i}} + \dot{y}\,\overline{\mathbf{j}} + \dot{z}\,\overline{\mathbf{k}}$$

и

$$T = \frac{1}{2}\,m\,v_M^2 = \frac{1}{2}\,m\,(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)\ ;$$

величины

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}\,, \qquad \frac{\partial T}{\partial \dot{y}} = m\dot{y}\,, \qquad \frac{\partial T}{\partial \dot{z}} = m\dot{z}$$

совпадают с компонентами вектора количества движения $m\overline{\mathbf{v}}_M$ точки M^* (который физики именуют *импульсом*).

Значит, понятие обобщённого импульса есть обобщение понятия импульса материальной точки (точнее, его компонент) на широкий класс механических систем со связями.

Кстати,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = m\ddot{x}\,, \qquad \frac{\partial T}{\partial x} = 0\,,$$

$$Q_x = \left(\overline{\mathbf{F}}\,, \overline{\mathbf{u}}_M^{(x)}\right) = \left(\overline{\mathbf{F}}\,, \frac{\partial \overline{\mathbf{v}}_M}{\partial \dot{x}}\right) = \left(\overline{\mathbf{F}}\,, \overline{\mathbf{i}}\right) = F_x\,.$$

Сейчас мы вычислили отдельные слагаемые в том из уравнений Лагранжа, которое отвечает обобщённой координате x.

Вычисления для y и z аналогичны, и уравнения Лагранжа в нашем примере таковы:

$$m\ddot{x} = F_x\,, \qquad m\ddot{y} = F_y\,, \qquad m\ddot{z} = F_z\,.$$

Иными словами, сейчас уравнения Лагранжа 2-го рода совпадают с уравнениями движения свободной материальной точки (чего и следовало ожидать).

Но вернёмся к общему случаю.

При выводе уравнений Лагранжа 2-го рода мы видели, что они в совокупности эквивалентны общему уравнению динамики, которое служит математическим выражением принципа Даламбера – Лагранжа.

Отсюда можно сделать такой вывод:

Действительное движение механической системы выделяется из всех кинематически осуществимых с теми же начальными условиями тем, что оно в любой момент времени удовлетворяет уравнениям Лагранжа.

Таким образом, уравнения Лагранжа действительно имеют право называться уравнениями движения механической системы.

В заключение хотелось бы напомнить, что общее уравнение динамики справедливо для любых систем с идеальными и двусторонними связями, а уравнения Лагранжа применимы, если все эти связи ещё и голономны. В то же время область применения лагранжева формализма не ограничена чистой механикой; он успешно используется [23,28] для составления дифференциальных уравнений *электромеханических* и *термомеханических* систем.

Получим теперь для кинетической энергии явное выражение через обобщённые скорости и обобщённые координаты.

6. Кинетическая энергия в обобщённых скоростях и координатах.

Покажем, что функция

$$T = T(\dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_s, q_1, \ldots, q_s, t)$$

по отношению к обобщённым скоростям есть многочлен 2-й степени.

Речь идёт о многочлене 2-й степени от s переменных; такой многочлен содержит квадратичную часть, линейную часть и слагаемое, не зависящее от данных переменных.

Иначе говоря,

$$(*) \qquad \boxed{T = T_2 + T_1 + T_0},$$

где:

$T_2 = \dfrac{1}{2}\sum\limits_{i,k} a_{ik}\,\dot{q}_i\,\dot{q}_k$ – квадратичная функция обобщённых скоростей;

$T_1 = \sum\limits_{i} b_i\,\dot{q}_i$ – линейная функция обобщённых скоростей;

T_0 – функция, не зависящая от обобщённых скоростей.

При этом T_0 и коэффициенты a_{ik}, b_i – функции обобщённых координат $q_1, \ldots, q_s$ и времени t.

Для обоснования разложения $(*)$ учтём, что скорость изображающей точки линейно зависит от обобщённых скоростей.

В самом деле, подставляя в формулу

$$T = \frac{1}{2}(\overline{\mathbf{v}}, \overline{\mathbf{M}}\,\overline{\mathbf{v}})$$

из п.2 представление $3n$-мерного вектора $\overline{\mathbf{v}}$ скорости изображающей точки через обобщённые скорости

$$\overline{\mathbf{v}} = \sum_i \overline{\mathbf{u}}^{(i)}\dot{q}_i + \overline{\mathbf{u}}^{\circ} \equiv \overline{\mathbf{V}} + \overline{\mathbf{u}}^{\circ},$$

в силу симметричности оператора масс $\overline{\mathbf{M}}$ получаем:

$$T = \frac{1}{2}(\overline{\mathbf{V}}, \overline{\mathbf{M}}\,\overline{\mathbf{V}}) + (\overline{\mathbf{V}}, \overline{\mathbf{M}}\,\overline{\mathbf{u}}^{\circ}) + \frac{1}{2}(\overline{\mathbf{u}}^{\circ}, \overline{\mathbf{M}}\,\overline{\mathbf{u}}^{\circ}) \equiv T_2 + T_1 + T_0 .$$

Симметричностью оператора масс мы воспользовались при раскрытии скобок в исходном скалярном произведении (это позволило нам без изменения переносить оператор масс с одного сомножителя скалярного произведения на другой).

Следовательно, кинетическая энергия действительно представляется суммой трёх слагаемых.

При этом

$$T_0 = \frac{1}{2}\sum_{\nu}(\overline{\mathbf{u}}^{\circ}_{\nu}, m_{\nu}\overline{\mathbf{u}}^{\circ}_{\nu}) = \frac{1}{2}\sum_{\nu} m_{\nu}\left(\frac{\partial\overline{\mathbf{r}}_{\nu}}{\partial t}, \frac{\partial\overline{\mathbf{r}}_{\nu}}{\partial t}\right);$$

$$T_1 = \Big(\sum_i \bar{\mathbf{u}}^{(i)} \dot{q}_i \,,\ \overline{\mathbf{M}}\, \bar{\mathbf{u}}^{\circ} \Big) \equiv \sum_i b_i \dot{q}_i \,,$$

где $b_i = \Big(\bar{\mathbf{u}}^{(i)}, \overline{\mathbf{M}}\, \bar{\mathbf{u}}^{\circ} \Big) = \sum_\nu m_\nu \Big(\dfrac{\partial \bar{\mathbf{r}}_\nu}{\partial q_i}, \dfrac{\partial \bar{\mathbf{r}}_\nu}{\partial t} \Big)$;

$$T_2 = \frac{1}{2} \Big(\sum_i \bar{\mathbf{u}}^{(i)} \dot{q}_i \,,\ \overline{\mathbf{M}} \sum_k \bar{\mathbf{u}}^{(k)} \dot{q}_k \Big) \equiv \frac{1}{2} \sum_{i,k} a_{ik} \dot{q}_i \dot{q}_k \,,$$

где $a_{ik} = \Big(\bar{\mathbf{u}}^{(i)}, \overline{\mathbf{M}}\, \bar{\mathbf{u}}^{(k)} \Big) = \sum_\nu m_\nu \Big(\dfrac{\partial \bar{\mathbf{r}}_\nu}{\partial q_i}, \dfrac{\partial \bar{\mathbf{r}}_\nu}{\partial q_k} \Big)$.

Заметим, что $a_{ik} = a_{ki}$ (свойство симметрии *кинетических коэффициентов*).

Именно так называются коэффициенты a_{ik}.

Данный вывод сразу следует из явного выражения для этих коэффициентов.

Таким образом, разложение $(*)$ полностью обосновано.

Рассмотрим частный случай, когда вид полученного разложения упрощается.

Если связи *стационарны*, то можно выбрать такую параметризацию механической системы, что

$$\bar{\mathbf{r}} = \bar{\mathbf{r}}\,(q_1 , \dots , q_s) \,.$$

В отличие от общего случая, здесь среди аргументов данной зависимости отсутствует время t.

Тогда $\bar{\mathbf{u}}^{\circ} \equiv \partial \bar{\mathbf{r}} / \partial t \equiv 0$, а поэтому: $b_i \equiv 0$, $T_1 \equiv 0$, $T_0 \equiv 0$.

Итак, для системы со стационарными связями кинетическая энергия является квадратичной функцией обобщённых скоростей:

$$\boxed{T = T_2} \,.$$

При этом кинетические коэффициенты a_{ik} зависят только от обобщённых координат, а от времени не зависят.

Таким образом, для случаев стационарных и нестационарных связей мы получили явный вид кинетической энергии механической системы. Используем это для выяснения структуры уравнений Лагранжа.

7. Структура уравнений Лагранжа.

Запишем для СМТ с идеальными, двусторонними и голономными связями уравнения Лагранжа:

$$(x, Ax) = a_{ii} > 0 .$$

Обсудим теперь порядок составления уравнений Лагранжа, используемый при решении практических задач.

8. Методика составления уравнений Лагранжа.

Сейчас мы ограничимся соответствующим алгоритмом для случая, когда число обобщённых координат равно единице.

Предположим, что механическая система, для которой требуется составить уравнения Лагранжа, имеет одну степень свободы.

Следовательно, текущую конфигурацию данной механической системы можно охарактеризовать одной обобщённой координатой q.

Существуют различные методики составления уравнений Лагранжа – в основном сходные, но различающиеся в деталях. Здесь предлагается один из вариантов алгоритма, по которому можно составлять уравнения Лагранжа.

Итак:

1°. Составить выражение для T, указав вид движения каждого тела и выразив коэффициенты через исходные данные.

2°. Составить выражение для Q и раскрыть скалярные произведения.

3°. Выбрать обобщённую координату q и выяснить кинематический смысл $\dot{q}$.

4°. Выразить линейные и угловые скорости, входящие в выражения для T и Q, через $\dot{q}$.

5°. Выразить T как функцию $\dot{q}$ и q и представить её в стандартной форме, вводя для коэффициентов буквенные обозначения.

6°. Выразить Q как функцию $\dot{q}$ и q.

7°. Вычислить производные: $\dfrac{\partial T}{\partial \dot{q}}$, $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\dfrac{\partial T}{\partial \dot{q}}$, $\dfrac{\partial T}{\partial q}$.

8°. Записать уравнения Лагранжа:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial T}{\partial q} = Q .$$

По поводу терминологии: здесь мы говорим об “уравнениях” (во множественном числе), а пишем лишь одно уравнение. Это – вполне разумно, поскольку в общем случае уравнений Лагранжа будет столько, сколько степеней свободы. Кроме того, мы это дифференциальное уравнение 2-го порядка всегда можем записать в виде двух дифференциальных уравнений 1-го порядка.

При решении конкретных задач рекомендуется явно указывать в тексте решения пункты алгоритма. Причина такой рекомендации – простая: выкладки при составлении уравнений Лагранжа – достаточно объёмные, и студент должен как можно скорее усвоить рациональную последовательность действий, а потом ей следовать (уже не раздумывая на каждом шаге, что же делать сейчас...). Успешное решение задач домашних заданий и контрольных работ по данной теме возможно только при достижении необходимой степени автоматизма.

Немного прокомментируем пункт 2° приведённого алгоритма.

В § 16 мы уже обсуждали различные способы вычисления обобщённых сил, но в случае систем с одной степенью свободы обозначения упрощаются, поскольку индекс i (т.е. номер обобщённой координаты) указывать незачем. Следуя тому способу, который получил у нас номер 3 и основан непосредственно на определении обобщённой силы, получаем такое правило:

На шаге 2° алгоритма обобщённая сила Q вычисляется по формуле

$$\boxed{Q = \sum_k Q^{(k)}} \; ;$$

суммирование выполняется для всех *активных* сил и моментов.

Иными словами, сейчас предполагается, что все активные силы (и моменты) пронумерованы, и каждой из них соответствует своё слагаемое в данной формуле. Реакции связей не учитывают, так как они – в силу предположения об идеальности связей – вклада в Q не дадут.

На практике, впрочем, нумерации не делают, а сразу записывают сумму в развёрнутом виде.

Итак, нам достаточно обсудить только вычисление отдельных слагаемых в этой сумме. Мы будем одновременно рассматривать две ситуации: ситуацию, когда данное слагаемое отвечает силе, и ситуацию, когда оно отвечает моменту пары сил.

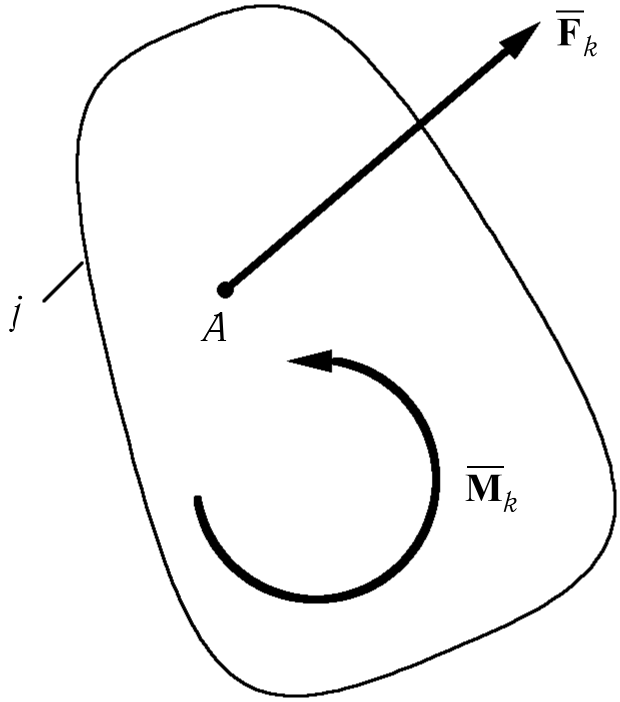
Рисунок, приведённый ниже, отвечает обеим ситуациям одновременно: к телу с номером j приложена либо сила $\overline{\mathbf{F}}_k$ с точкой приложения A, либо пара сил с моментом $\overline{\mathbf{M}}_k$.

Имеем:

$$(*) \qquad Q^{(k)} = \left(\overline{\mathbf{F}}_k, \overline{\mathbf{u}}_A\right) \quad \text{или} \quad Q^{(k)} = \left(\overline{\mathbf{M}}_k, \overline{\mathbf{u}}_j\right).$$

Здесь: $\overline{\mathbf{u}}_A$ – передаточная функция линейной скорости точки A; $\overline{\mathbf{u}}_j$ – передаточная функция угловой скорости тела j.

Таким образом, если k-е слагаемое отвечает силе, то эту силу надо скалярно умножить на передаточную функцию линейной скорости точки приложения данной силы; если же k-е слагаемое отвечает моменту, то надо умножить этот момент на передаточную функцию угловой скорости того тела, к которому момент приложен.



Каждая из входящих в (∗) передаточных функций, как мы уже отмечали, имеет смысл *коэффициента* в выражении соответствующей скорости через обобщённую скорость:

$$\overline{\mathbf{v}}_A^{\text{в}} = \overline{\mathbf{u}}_A \dot{q}^{\text{в}} \quad \text{или} \quad \overline{\omega}_j^{\text{в}} = \overline{\mathbf{u}}_j \dot{q}^{\text{в}} .$$

Эти соотношения записаны для возможных скоростей; но те же самые коэффициенты фигурируют и в выражениях для действительных скоростей.

Для действительных скоростей:

$$\overline{\mathbf{v}}_A = \overline{\mathbf{u}}_A \dot{q} + \ldots , \quad \text{или} \quad \overline{\omega}_j = \overline{\mathbf{u}}_j \dot{q} + \ldots ;$$

опущенные слагаемые не зависят от $\dot{q}$ и отсутствуют, когда связи стационарны.

Таким образом, при стационарных связях мы можем в ходе вычислений вообще не различать действительные и возможные скорости.

Конкретные выражения линейных и угловых скоростей через обобщённую получаются при выполнении пункта 4° алгоритма; одновременно в нашем распоряжении оказываются и все нужные коэффициенты (т.е. передаточные функции).

Как вычислять скалярные произведения в (∗)? Удобнее всего это делать путём перехода к проекциям.

В задачах на плоское движение:

$$\left(\overline{\mathbf{F}}_k , \overline{\mathbf{u}}_A\right) = F_{kx}\, u_{Ax} + F_{ky}\, u_{Ay} , \qquad \left(\overline{\mathbf{M}}_k , \overline{\mathbf{u}}_j\right) = M_{kz}\, u_{jz} .$$

Именно переход к такой форме записи мы и называли в пункте 2° алгоритма “раскрытием скалярных произведений”.

При этом проекции сил и моментов вычисляют в явном виде, а проекции передаточных функций оставляют в буквенной записи (их конкретные выражения на этом шаге ещё неизвестны). Получению явного выражения обобщённой силы Q через обобщённую скорость и обобщённую координату посвящён пункт 6° алгоритма.

Несколько слов об ином способе вычисления обобщённой силы, при котором предварительно вычисляют возможную мощность активных сил.

Замечание. Иной способ: в п.2° вычислить $N^{\text{в}}$ по формуле

$$N^{\text{в}} = \sum_k N_k^{\text{в}},$$

где

$$N_k^{\text{в}} = (\overline{\mathbf{F}}_k, \overline{\mathbf{v}}_A) \quad \text{или} \quad N_k^{\text{в}} = M_{kz}\,\omega_{jz},$$

а в п.6° вычислить Q по формуле

$$Q = \frac{N^{\text{в}}}{\dot{q}^{\text{в}}}.$$

Разумеется, при таком способе вычисления Q все выкладки оказываются *совершенно аналогичными* – с точностью до обозначений (только в пункте 6° алгоритма появляется дополнительная операция деления).

Для случая, когда число обобщённых координат больше единицы, в приведённый алгоритм следует внести небольшие изменения. Именно:

Замечание. Если число степеней свободы больше единицы, то в пунктах 3°– 8° алгоритма следует вместо q, $\dot{q}$ и Q писать q_i, $\dot{q}_i$ и Q_i.

При этом, разумеется, в пунктах 3° и 6° следует писать уже "обобщённые координаты" и "функции".

Однако в пункты 1° и 2° вносить какие-либо изменения нецелесообразно. Здесь разумно по-прежнему писать Q, $\overline{\mathbf{u}}_A$ и т.п.

При этом вычисление Q_i на шаге 6° сводится к подстановке в общую формулу для Q, полученную на шаге 2°, конкретных выражений для передаточных функций, отвечающих обобщённой координате q_i.

Рассмотрим теперь конкретную задачу, где в качестве механической системы с одной степенью свободы выступает машина с кулисным приводом. Для этой системы требуется составить уравнения Лагранжа и выполнить их численное интегрирование при заданных начальных условиях.

9. О моделировании динамики машины с кулисным приводом.

В учебном пособии И.В.Новожилова и М.Ф.Зацепина "Типовые расчёты по теоретической механике на базе ЭВМ" [25] представлены (расчёт Д-5) задачи, посвящённые исследованию динамики машины с кулисным приводом. Цель выполнения данного задания, как отмечают авторы пособия, состоит в приобретении опыта исследования динамики машин, включая составление уравнений движения машины в форме уравнений Лагранжа 2-го рода и их численное интегрирование при помощи компьютера.

Последнюю операцию удобно выполнять с помощью моделирующей программы **dk**, работа с которой рассмотрена в пособии [18].

Обсуждение задания по динамике машины с кулисным приводом мы начнём с замечаний терминологического характера.

Привод – устройство для приведения в действие машин и механизмов; состоит из двигателя и передаточного механизма.

Передаточный механизм служит для передачи движения от двигателя к другим частям машины.

Кулиса – звено плоского механизма, несущее на себе *подвижные направляющие* (вдоль которых может двигаться другое подвижное звено).

В каждом из вариантов обсуждаемого задания в состав передаточного механизма входит звено, форма которого напоминает букву Т. В перекладине данного звена имеется *прорезь*, боковые стороны которой и являются теми подвижными направляющими, о которых говорилось в определении кулисы.

В данной прорези движется *палец* маховика – маленький цилиндр, жёстко прикреплённый к маховику.

Напомним, что маховик – это колесо с массивным ободом, устанавливаемое на валу машины для уменьшения неравномерности её движения.

Во всех вариантах задания маховик имеет номер *1*, а кулиса – *2*; в составе машины имеются и другие звенья.

Переходим к рассмотрению основных этапов исследования.

Требуется:

1°. Составить уравнения движения машины в форме уравнений Лагранжа 2-го рода, взяв за обобщённую координату угол φ_1 поворота маховика *1*.

2°. Записать уравнения движения в форме Коши.

3°. При заданных начальных условиях численно проинтегрировать уравнения движения на отрезке $[\,0,\tau\,]$.

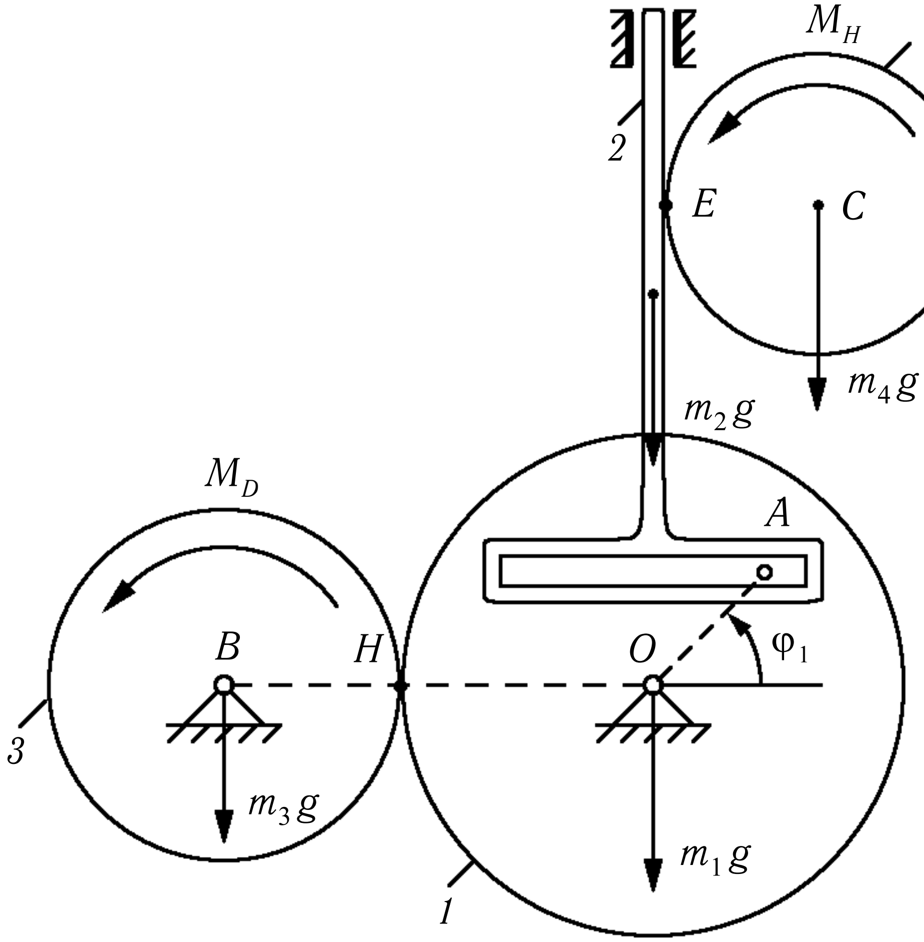
4°. Построить графики $\varphi_1(t)$, $\omega_{1z}(t)$, $\varepsilon_{1z}(t)$.

5°. Для момента времени, когда модуль ε_{1z} максимален, найти одну из реакций связей.

Какую именно – зависит от конкретного варианта.

Основные выкладки выполняются на этапе 1° исследования. На нём и сосредоточим сейчас своё внимание.

Именно, перейдём к разбору примера расчётного задания и рассмотрим конкретную кинематическую схему машины с кулисным приводом.



Здесь к зубчатому колесу *3* (которое является однородным диском и находится в зацеплении с маховиком *1*) приложен от двигателя вращающий момент $\overline{\mathbf{M}}_D$. Вращательное движение маховика преобразуется в поступательное движение кулисы *2*, а последняя приводит в движение однородный диск *4* (в точках контакта этого диска с кулисой и стенкой проскальзывание отсутствует). К диску *4* приложен момент нагрузки $\overline{\mathbf{M}}_H$.

Постановка задания предусматривает, что проекции вращающего момента $\overline{\mathbf{M}}_D$ и момента нагрузки $\overline{\mathbf{M}}_H$ на ось z определяются следующими выражениями:

$$M_{Dz} = M_0 - k\,\omega_{iz}\,, \qquad M_{Hz} = -\mu_2\omega_{4z}\,;$$

i – номер тела, к которому приложен момент $\overline{\mathbf{M}}_D$.

В нашем примере это – звено *3*.

Замечание. В некоторых вариантах вместо момента $\overline{\mathbf{M}}_H$ задана сила $\overline{\mathbf{F}}_H$:

$$F_{Hx} = -\mu_1 v_{Dx} \quad \text{или} \quad F_{Hy} = -\mu_1 v_{Dy}\,,$$

где D – некоторая точка тела *4*.

В таких вариантах звено *4* совершает поступательное движение вдоль оси x или оси y. Иногда, впрочем, эта точка обозначена иначе (или никак не обозначена).

Заметим ещё, что стрелки, изображающие моменты $\overline{\mathbf{M}}_D$ или $\overline{\mathbf{M}}_H$, ориентированы на рисунке совершенно произвольно. Они показывают только, к какому телу приложен соответствующий момент; проекции же этих моментов на ось z полностью определяются записанными выше формулами.

Следующие параметры предполагаются известными:

– расстояние $|OA| = r_1$;
– радиусы дисков R_1, R_3, R_4;
– момент инерции I_1 маховика *1* относительно оси Oz;
– массы звеньев m_2, m_3, m_4;
– константы M_0, k, μ_2;
– время моделирования τ;
– начальное значение $\varphi_1(0)$ угла поворота маховика.

Начальное значение угловой скорости маховика задаётся формулой $\omega_{1z}(0) = 2\pi/\tau$.

В конце пункта мы приведём результаты моделирования динамики машины, полученные при следующих значениях параметров:

Дано: $OA = r_1 = 0{,}06$ м; $R_1 = 0{,}36$ м; $R_3 = 0{,}18$ м; $R_4 = 0{,}14$ м; $I_1 = 1{,}4$ кг$\cdot$м^2; $m_2 = 24$ кг; $m_3 = 9{,}26$ кг; $m_4 = 16$ кг; $M_0 = -63$ Н$\cdot$м; $k = 1{,}028$ Н$\cdot$м$\cdot$с; $\mu_2 = 55{,}3$ Н$\cdot$м$\cdot$с; $\tau = 0{,}2688$ с; $\omega_{1z}(0) = 23{,}375$ с$^{-1}$; $\varphi_1(0) = 1{,}6$ рад.

Приступаем к составлению уравнений движения машины, используя известный нам алгоритм из восьми пунктов.

$$1^\circ.\quad T = T_1^{\text{вр}} + T_2^{\text{пост}} + T_3^{\text{вр}} + T_4^{\text{общ}} = \frac{1}{2} I_1 \omega_{1z}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_E^2 + \frac{1}{2}\frac{m_3 R_3^2}{2}\omega_{3z}^2 + \frac{1}{2} m_4 v_C^2 + \frac{1}{2}\frac{m_4 R_4^2}{2}\omega_{4z}^2 .$$

Итак, мы составили выражение для T, указав вид движения каждого тела и выразив коэффициенты через исходные данные.

$$2^\circ.\quad Q = (\overline{\mathbf{M}}_D, \overline{\mathbf{u}}_3) + (\overline{\mathbf{M}}_H, \overline{\mathbf{u}}_4) + (m_1\overline{\mathbf{g}}, \cancelto{0}{\overline{\mathbf{u}}_O}) + (m_2\overline{\mathbf{g}}, \overline{\mathbf{u}}_E) + (m_3\overline{\mathbf{g}}, \cancelto{0}{\overline{\mathbf{u}}_B}) + (m_4\overline{\mathbf{g}}, \overline{\mathbf{u}}_C) =$$

$$= (M_0 - k\omega_{3z})\,u_{3z} - \mu_2\omega_{4z}u_{4z} - m_2 g\,u_{Ey} - m_4 g\,u_{Cy} .$$

Таким образом, мы составили выражение для Q и раскрыли скалярные произведения.

Подчеркнём, что к концу пункта 2° буквы M_{Dz}, M_{Hz} (или F_{Hx}, или F_{Hy}) уже больше не должны фигурировать в формулах.

3°. $q = \varphi_1$, $\dot{q} = \dot{\varphi}_1 = \omega_{1z}$.

Здесь мы не только “выбрали” обобщённую координату q (её выбор был предписан условием задания), но и выяснили кинематический смысл обобщённой скорости $\dot{q}$. Действительно, обобщённая координата есть угол поворота маховика *1*; тогда её производная будет равняться проекции угловой скорости маховика на ось z.

Теперь надо выразить все линейные и угловые скорости, входящие (либо непосредственно, либо через свои передаточные функции) в формулы из пунктов 1° и 2°, через обобщённую скорость.

4°. $\omega_{1z} = \dot{\varphi}_1$.

Итак, одна из скоростей в точности равна обобщённой скорости. Остальные линейные и угловые скорости выражаются через неё в ходе решения кинематической задачи. Их удобно находить методом кинематических графов.

Составим первый из этих графов.

$$B \xrightarrow[0^\circ]{3} H \xrightarrow[0^\circ]{1} O .$$

$$\overset{0}{\cancel{v_{Oy}}} = \overset{0}{\cancel{v_{By}}} + \omega_{3z}R_3\cos 0^\circ + \omega_{1z}R_1\cos 0^\circ .$$

$$\omega_{3z} = \underbrace{\boxed{-\frac{R_1}{R_3}}}_{u_{3z}}\,\dot{\varphi}_1\,; \qquad u_{3z} = -\frac{R_1}{R_3} .$$

Из этих формул видно, что для нахождения передаточной функции достаточно обвести замкнутым контуром коэффициент при обобщённой скорости. Стоит ли Вам отдельно выписывать выражение для u_{3z}, или ограничиться знаком u_{3z} рядом с контуром – решайте сами.

Выбираем следующий граф:

$$O \xrightarrow[\varphi_1]{1} A .$$

$$v_{Ay} = \overset{0}{\cancel{v_{Oy}}} + \omega_{1z}r_1\cos\varphi_1 .$$

А чтобы продвинуться дальше, рассуждаем так:

Так как перемещение кулисы *2* вдоль оси y равно перемещению точки A вдоль этой оси, то

$$V_{Ey} = V_{Ay} = \underbrace{\boxed{r_1 \cos\varphi_1}}_{u_{Ey}} \dot{\varphi}_1 .$$

Заметим, что перемещение точки A вдоль оси x никак не сказывается на движении кулисы: кулиса движется только вдоль оси y, совершая поступательное движение.

Следующий граф даст нам угловую скорость тела *4*:

$$E \xrightarrow[0^\circ]{4} K .$$

$$\cancelto{0}{V_{Ky}} = V_{Ey} + \omega_{4z} \cdot 2R_4 \cos 0^\circ .$$

$$\omega_{4z} = -\frac{V_{Ey}}{2R_4} = \underbrace{\boxed{-\frac{r_1}{2R_4}\cos\varphi_1}}_{u_{4z}} \dot{\varphi}_1 .$$

Наконец, последний граф даст нам скорость точки C.

$$K \xrightarrow[180^\circ]{4} C .$$

$$V_{Cy} = \cancelto{0}{V_{Ky}} + \omega_{4z} R_4 \cos 180^\circ = -\omega_{4z} R_4 = \underbrace{\boxed{\frac{r_1}{2}\cos\varphi_1}}_{u_{Cy}} \dot{\varphi}_1 .$$

Переходим теперь к пункту 5° алгоритма, в котором надо выразить кинетическую энергию как функцию $\dot{q}$ и q.

$$5^\circ. \quad T = \frac{1}{2} I_1 \dot{\varphi}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 r_1^2 \cos^2\varphi_1 \dot{\varphi}_1^2 + \frac{1}{2}\frac{m_3 R_1^2}{2}\dot{\varphi}_1^2 +$$

$$+ \frac{1}{2}\frac{m_4 r_1^2}{4}\cos^2\varphi_1 \dot{\varphi}_1^2 + \frac{1}{2}\frac{m_4 r_1^2}{8}\cos^2\varphi_1 \dot{\varphi}_1^2 =$$

$$= \frac{1}{2}\left(A + B\cos^2\varphi_1\right)\dot{\varphi}_1^2 ,$$

где

$$A = I_1 + \frac{m_3 R_1^2}{2}, \qquad B = \left(m_2 + \frac{3m_4}{8}\right) r_1^2 .$$

Замечание. В любой задаче с одной степенью свободы при стационарных связях выражение для T можно записать в *стандартной форме*:

$$T = \frac{1}{2}(\ldots)\,\dot{q}^2 ;$$

выражение в скобках есть *приведённая масса* (если q – линейная координата) или *приведённый момент инерции* (если q – угол).

Случаи иного выбора обобщённой координаты встречаются редко.

Это следует из полученной в п.7 формулы

$$T \equiv T_2 = \frac{1}{2}\, a(q)\, \dot{q}^2 .$$

В нашем примере выражение в скобках является именно приведённым моментом инерции. Действительно, все слагаемые в этом выражении имеют размерность момента инерции.

Для контроля выкладок полезно помнить, что размерности всех слагаемых должны быть именно такими.

Буквенные обозначения для коэффициентов (т.е. константы A и B) мы ввели, в частности, для того, чтобы упростить выкладки в пункте 7°. Рекомендуется вводить при составлении уравнений Лагранжа такие константы *всегда*, и уже в ответе заменять их явными выражениями.

Но последнее замечание относится к решению домашних заданий и задач контрольной работы. В данном же расчётном задании константы A и B используются и на этапе ввода формул в моделирующую программу.

Заметим, что во всех вариантах данного расчётного задания выражение для T будет иметь указанную форму (только в вариантах с горизонтальным движением кулисы $\cos^2\varphi_1$ заменится на $\sin^2\varphi_1$).

Выполним теперь необходимые выкладки для обобщённой силы Q, которую надо тоже выразить как функцию $\dot{q}$ и q.

$$
\begin{aligned}
6^\circ.\quad Q \;&=\; \left(M_0 - k\left(-\frac{R_1}{R_3}\,\dot{\varphi}_1 \right)\right)\cdot\left(-\frac{R_1}{R_3} \right) - \\
&- \mu_2\cdot\left(-\frac{r_1}{2R_4}\cos\varphi_1\,\dot{\varphi}_1 \right)\cdot\left(-\frac{r_1}{2R_4}\cos\varphi_1 \right) - \\
&- m_2 g\, r_1\cos\varphi_1 - m_4 g\,\frac{r_1}{2}\cos\varphi_1 \;= \\
&= -\,(M_0 + k R_1\dot{\varphi}_1/R_3)\, R_1/R_3 - \mu_2\frac{r_1^2}{4R_4^2}\cos^2\varphi_1\,\dot{\varphi}_1 - \\
&- (m_2 + m_4/2)\, g\, r_1\cos\varphi_1 .
\end{aligned}
$$

Наличие в окончательном выражении для Q слагаемых, зависящих от $\dot{\varphi}_1$, вызвано только тем, что моменты $\overline{\mathbf{M}}_D$ и $\overline{\mathbf{M}}_H$ зависят от угловых скоростей.

Никакой “стандартной формы” для обобщённой силы Q не существует. Разумеется, имеет смысл по возможности упростить полученное выражение (что мы и сделали).

Как уже отмечалось ранее, в том случае, когда обобщённой координатой является угол, размерность обобщённой силы совпадает с размерностью момента силы. Легко проверить, что для всех слагаемых в полученном нами выражении это выполнено.

7°. $$\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_1} = (A + B\cos^2\varphi_1)\,\dot{\varphi}_1 .$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_1} = (A + B\cos^2\varphi_1)\,\ddot{\varphi}_1 - (B \cdot 2\cos\varphi_1 \sin\varphi_2)\,\dot{\varphi}_1 = $$
$$= (A + B\cos^2\varphi_1)\,\ddot{\varphi}_1 - B\sin 2\varphi_1\,\dot{\varphi}_1^2 .$$

$$\frac{\partial T}{\partial \varphi_1} = \frac{1}{2}(-B \cdot 2\cos\varphi_1\sin\varphi_1)\,\dot{\varphi}_1^2 = -\frac{B}{2}\sin 2\varphi_1\,\dot{\varphi}_1^2 .$$

Отметим, что нам пришлось дифференцировать $\cos\varphi_1$ и по φ_1, и по времени. Подобные действия часто приходится выполнять при составлении уравнений Лагранжа, так что отметим:

Мы учли, что

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varphi_1}\cos\varphi_1 = -\sin\varphi_1 , \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\cos\varphi_1 = -\sin\varphi_1\,\dot{\varphi}_1 .$$

Во втором случае была использована теорема о дифференцировании сложной функции.

Рекомендуется обратить внимание на эти два равенства, поскольку следует чётко различать два данных случая: дифференцирование по φ_1 и дифференцирование по t. Типичная ошибка начинающих: потерять при дифференцировании множитель $\dot{q}$ или, наоборот, записать его там, где он не нужен.

Замечание. Третья по счёту производная равна *половине* слагаемого с $\dot{q}^2$ в выражении для второй по счёту производной.

Можно показать, что так будет в *любой* задаче с одной степенью свободы при стационарных связях. Это обстоятельство также полезно учитывать при контроле правильности выкладок.

Представьте себе: насколько громоздкими стали бы полученные выражения, если бы мы не ввели констант A и B!

8°. Запишем уравнения Лагранжа, приводя подобные члены:

$$(A + B\cos^2\varphi_1)\,\ddot{\varphi}_1 - \frac{B}{2}\sin 2\varphi_1\,\dot{\varphi}_1^2 = Q .$$

Если бы мы решали задачу контрольной работы, то осталось бы записать ответ, подставив в полученное уравнение явные выражения для A, B и Q. Но в расчётном задании составление уравнений движения машины – это лишь первый этап исследования её динамики.

На втором этапе исследования динамики машины, как отмечалось выше, уравнения движения машины записываются в форме Коши.

Уравнения движения в форме Коши:

$$(*) \qquad \begin{cases} \dot{\varphi}_1 = \omega_{1z} \,, \\ \dot{\omega}_{1z} = \varepsilon_{1z}(\varphi_1, \omega_{1z}) \,, \end{cases}$$

где

$$\varepsilon_{1z} \equiv \ddot{\varphi}_1 = \frac{Q + (B/2)\sin 2\varphi_1 \dot{\varphi}_1^2}{A + B\cos^2\varphi_1} \,.$$

Третий этап исследования – это численное интегрирование уравнений движения машины. Вновь можно воспользоваться, скажем, методом Дормана – Принса (он используется в моделирующей программе **dk**).

Путём численного интегрирования уравнений (*) при заданных $\varphi_1(0)$, $\omega_{1z}(0)$ на отрезке $[0, \tau]$ получаем зависимости $\varphi_1 = \varphi_1(t)$, $\omega_{1z} = \omega_{1z}(t)$, $\varepsilon_{1z} = \varepsilon_{1z}(t)$.

Предполагается, что данные зависимости будут получены как в табличной, так и в графической формах. Программа **dk** предусматривает обе эти возможности.

Работа с данной программой начинается с ввода номера варианта и исходных численные данных (это делается при помощи меню для ввода параметров). Затем надлежит задать явный вид выражения для ε_{1z}, и для этого используют меню для ввода формул; предусматривается, что в данном меню нужно набрать правые части *семи* расчётных формул.

О каких формулах идёт речь? Безусловно, нам потребуются формула для ε_{1z} и формулы для констант A и B. Далее, необходимо ввести выражение для обобщённой силы Q; но оно часто оказывается весьма громоздким и может не поместиться в строке ввода.

С учётом этого было принято решение представить Q в виде суммы трёх слагаемых; каждое из этих слагаемых отвечает тому вкладу в Q, который дают соответственно двигатель, нагрузка и силы тяжести. Указанным слагаемым отвечают отдельные строки в меню.

Запишем все семь расчётных формул для нашего примера. Порядок следования этих формул – один и тот же для всех вариантов.

$$\mathbf{Q_д = -(M_0{+}kR_1\omega_{1z}/R_3)R_1/R_3}$$

$$\mathbf{Q_н = -\mu_2 r_1 r_1 \cos\varphi_1 \cos\varphi_1 \omega_{1z}/4R_4R_4}$$

$$\mathbf{Q_т = -(m_2{+}m_4/2)g r_1 \cos\varphi_1}$$

$$\mathbf{Q = Q_д{+}Q_н{+}Q_т}$$

$$\mathbf{A = I_1{+}m_3R_1R_1/2}$$

$$\mathbf{B = (m_2{+}\,3m_4/8)r_1r_1}$$

$$\mathbf{\varepsilon_{1z} = (Q+(B/2)\sin 2\varphi_1\omega_{1z}\omega_{1z})/(A+B\cos\varphi_1\cos\varphi_1)}$$

Обратите внимание, что в расчётных формулах пишут ω_{1z}, а не $\dot{\varphi}_1$.

Рекомендуется ещё до начала работы с программой **dk** выписать все семь расчётных формул в соответствии с принятыми правилами записи выражений. Заметьте, что реально 4-ю формулу вводить не приходится: она уже определена в само́й программе, и любые попытки её изменить блокируются.

По завершении ввода формул программа **dk** выполняет численное интегрирование уравнений движения машины.

Четвёртый этап исследования – построение графиков – в особом обсуждении не нуждается. Заметим только, что начальное значение угловой скорости маховика выбиралось так, чтобы движение машины было близким к периодическому, а время τ примерно соответствовало времени полного оборота маховика.

Поэтому начальное и конечное значения переменной ω_{1z} должны мало отличаться друг от друга. Это же относится и к переменной ε_{1z}; а угол φ_1 должен за время τ увеличиться на величину, близкую к 2π.

Если в полученных результатах зависимость ω_{1z} от времени резко отличается от периодической, то это означает наличие ошибки. Чаще всего это бывает, когда сделана ошибка при вычислении $Q_\text{н}$ или $Q_\text{д}$ (наприпример, где-то был потерян знак "минус"). Нужно проверить также, верно ли найдено значение $\omega_{1z}(0)$.

Приведём график зависимости $\omega_{1z} = \omega_{1z}(t)$, построенный для используемых нами исходных данных при помощи программы **dk**. Видно, что эта зависимость удовлетворяет сформулированному требованию.

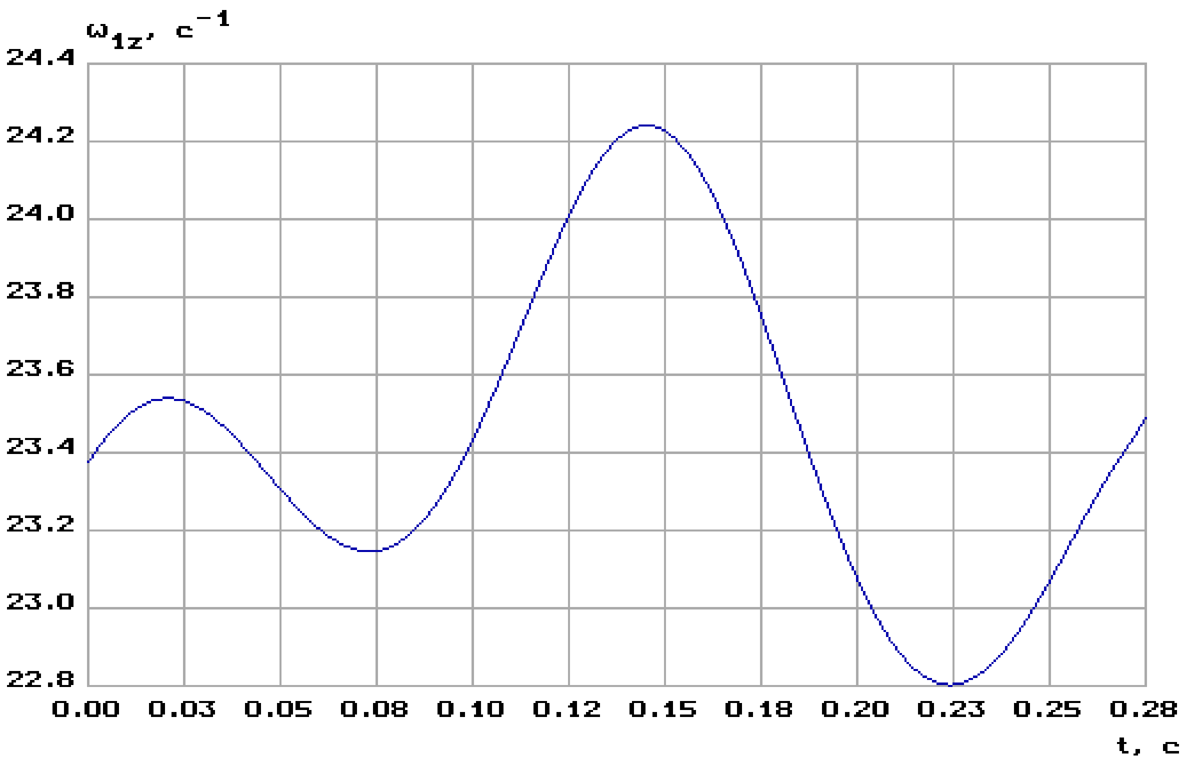


График зависимости $\omega_{1z}(t)$. Вариант 25

Перейдём к пятому этапу исследования – к нахождению одной из реакций связей. С учётом постановки расчётного задания наши действия на данном этапе начинаются вот с чего.

Выделим в таблице результатов строку, для которой модуль ε_{1z} максимален.

После этого мы будем иметь дело с конкретным моментом времени, для которого известны текущие значения угла φ_1, угловой скорости ω_{1z} и углового ускорения ε_{1z}.

Приведём таблицу результатов моделирования, полученную для рассматриваемого примера при помощи программы **dk**.

Численные результаты моделирования.
Вариант 25. Пушков Л.О., гр. С-12-03

t	φ_1	ω_{1z}	ε_{1z}
0.0	1.600	23.38	14.33
0.022	2.126	23.54	-2.10
0.045	2.652	23.37	-11.58
0.067	3.173	23.16	-3.48
0.090	3.692	23.26	14.22
0.112	4.217	23.71	24.33
0.134	4.753	24.17	11.59
0.157	5.295	24.16	-15.38
0.179	5.832	23.63	-28.93
0.202	6.355	23.04	-19.76
0.224	6.868	22.80	1.02
0.246	7.380	23.01	16.73
0.269	7.899	23.39	13.93

Таким образом:

В данном примере угловое ускорение маховика максимально по модулю при $t = 0{,}179$ с. В этот момент времени $\varphi_1 = 5{,}832$ рад, $\omega_{1z} = 23{,}63$ с$^{-1}$, $\varepsilon_{1z} = -\,28{,}93$ с$^{-2}$.

Используя данные значения, нужно найти какую-либо из реакций связей. В различных вариантах расчётного задания это могут быть либо окружное усилие в точке K, либо разность сил натяжения ведущей и ведомой ветвей ременной передачи, либо усилие в стержне CD.

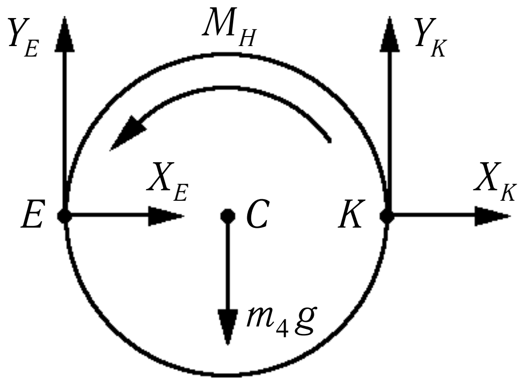
В рассматриваемом нами примере ни ременной передачи, ни стержня CD нет. Значит:

Найдём окружное усилие в точке K.

Что такое “окружное усилие”? Это – та составляющая реакции связей в данной точке, которая направлена по касательной к окружности. В нашем примере роль этой окружности играет обод диска *4*.

Воспользуемся дифференциальными уравнениями плоского движения абсолютно твёрдого тела. Нам потребуются не все такие уравнения, а только минимально необходимое их число (в большинстве вариантов достаточно будет взять только одно уравнение, но в нашем примере будут нужны два уравнения).

Освободим тело *4* от связей:



Обе связи – в точках E и K – соответствуют случаю качения без проскальзывания. Поэтому реакция связи в каждой из этих точек представляется двумя составляющими. Силы X_E и X_K отвечают нормальным реакциям, а силы Y_E и Y_K – силам сцепления.

Искомая величина (окружное усилие в точке K) – это реакция Y_K; её значение нам и требуется найти.

Нетрудно сообразить, что среди уравнений плоского движения такого уравнения, в которое входила бы только сила Y_K, найти нельзя: и в в уравнение моментов сил относительно центра масс, и в уравнение проекций сил на ось y войдут одновременно и сила Y_K, и сила Y_E.

Однако в совокупности два этих уравнения дадут нам систему с двумя неизвестными, которую можно решить.

Имеем:

$$y: \quad m_4 \dot{v}_{Cy} = Y_E + Y_K - m_4 g \,,$$

$$M_C: \quad \frac{m_4 R_4^2}{2} \dot{\omega}_{4z} = M_{Hz} - Y_E R_4 + Y_K R_4 \,.$$

Значение Y_E нас вовсе не интересует, поэтому исключим эту неизвестную величину.

Сложим оба уравнения, поделив второе на R_4:

$$m_4 \dot{v}_{Cy} + \frac{m_4 R_4}{2} \dot{\omega}_{4z} = 2 Y_K - m_4 g + \frac{M_{Hz}}{R_4} \,.$$

Отсюда

$$Y_K = \frac{1}{2} \left(m_4 \dot{v}_{Cy} + \frac{m_4 R_4}{2} \dot{\omega}_{4z} + m_4 g - \frac{M_{Hz}}{R_4} \right) .$$

Осталось выразить слагаемые в правой части через известные величины. Для этого вспомним, что при составлении уравнений Лагранжа мы в пункте 4° алгоритма выяснили, как связаны v_{Cy} и ω_{4z} друг с другом.

Так как $v_{Cy} = -\omega_{4z} R_4$, то

$$m_4 \dot{v}_{Cy} + \frac{m_4 R_4}{2} \dot{\omega}_{4z} = -\frac{m_4 R_4}{2} \dot{\omega}_{4z} \,.$$

Далее, в том же пункте 4° алгоритма мы нашли выражение ω_{4z} через обобщённую скорость.

Имеем:

$$\omega_{4z} = -\frac{r_1}{2R_4}\cos\varphi_1\,\omega_{1z}\,.$$

Дифференцируем по t:

$$\dot{\omega}_{4z} = \frac{r_1}{2R_4}\left(-\cos\varphi_1\,\varepsilon_{1z} + \sin\varphi_1\,\omega_{1z}^2\right).$$

При вычислении второго слагаемого мы вновь воспользовались теоремой о дифференцировании сложной функции.

Поэтому

$$-\frac{m_4 R_4}{2}\,\dot{\omega}_{4z} = \frac{m_4 r_1}{4}\left(\cos\varphi_1\,\varepsilon_{1z} - \sin\varphi_1\,\omega_{1z}^2\right).$$

Далее,

$$-\frac{M_{Hz}}{R_4} = \frac{\mu_2\,\omega_{4z}}{R_4} = -\frac{\mu_2 r_1}{2R_4^2}\cos\varphi_1\,\omega_{1z}\,.$$

Итак,

$$Y_K = \frac{m_4 r_1}{8}\left(\cos\varphi_1\,\varepsilon_{1z} - \sin\varphi_1\,\omega_{1z}^2\right) + \\ + \frac{m_4 g}{4} - \frac{\mu_2 r_1}{4R_4^2}\cos\varphi_1\,\omega_{1z}\,.$$

Что нам осталось?

Осталось подставить в полученную формулу текущие значения φ_1, ω_{1z}, ε_{1z} и значения коэффициентов.

В результате будет получено значение окружного усилия в точке K.

В нашем примере имеем: $Y_K = -834{,}65$ Н.

А сейчас мы займёмся важным частным классом механических систем – системами с потенциальными силами.

§ 19. Механические системы с потенциальными силами.

1. Потенциальная энергия материальной точки.

Начнём с определения силового поля. Речь идёт о таком векторном поле, значением которого в каждой точке является вектор силы.

С понятием векторного поля мы уже встречались в статике (именно, вводя понятие силового винта, мы рассматривали поле, образуемое главными моментами системы сил).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

Учебники по механике для технических вузов

1. *Бутенин Н.В., Лунц Я.Л., Меркин Д.Р.* Курс теоретической механики: учебник. СПб.: Лань, 2009. 736 с.
2. Курс теоретической механики / В.И.Дронг, В.В.Дубинин, М.М.Ильин и др. Под ред. К.С.Колесникова. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э.Баумана, 2005. 736 с.
3. *Озол О.Г.* Теория механизмов и машин. М.: Наука, 1984. 432 с.
4. *Тарг С.М.* Краткий курс теоретической механики: Учебник для втузов. М.: Высш. шк., 2010. 416 с.
5. Теория механизмов и машин / К.В.Фролов, С.А.Попов, А.К.Мусатов и др. М.: Высш. шк., 1987. 496 с.

Учебники по механике для классических университетов

6. *Айзерман М.А.* Классическая механика. М.: Наука, 1974. 368 с.
7. *Арнольд В.И.* Математические методы классической механики. М.: Наука, 1989. 472 с.
8. *Голубев Ю.Ф.* Основы теоретической механики: Учебник. М.: Изд-во Моск. ун-та, 2000. 719 с.
9. *Журавлёв В.Ф.* Основы теоретической механики: Учебник. М.: Физматлит, 2008. 304 с.
10. *Лойцянский Л.Г., Лурье А.И.* Курс теоретической механики. Т.II. Динамика. М.: Наука, 1983. 640 с.
11. *Лурье А.И.* Аналитическая механика. М.: Физматлит, 1961. 824 с.
12. *Маркеев А.П.* Теоретическая механика: Учеб. пособие для университетов. М.: ЧеРо, 1999. 572 с.
13. *Татаринов Я.В.* Лекции по классической динамике. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1984. 296 с.
14. *Трусделл К.* Первоначальный курс рациональной механики сплошных сред. М.: Мир, 1975. 592 с.

Задачники и методические пособия по механике

15. Динамика материальной точки / А.М.Александров, М.Ф.Зацепин, Ю.Г.Мартыненко, В.В.Филиппов. М.: Моск. энерг. ин-т, 1993. 19 с.
16. *Кирсанов М.Н.* Задачи по теоретической механике с решениями в Maple 11. М.: Физматлит, 2010. 263 с.
17. *Кирсанов М.Н.* Решебник. Теоретическая механика. М.: Физматлит, 2008. 384 с.
18. *Корецкий А.В., Кузнецов А.А., Осадченко Н.В.* Решение задач динамики на персональном компьютере: методическое пособие. М.: Изд-во МЭИ, 2006. 68 с.
19. *Корецкий А.В., Осадченко Н.В.* Компьютерное моделирование кинематики манипуляционных роботов: методическое пособие. М.: Изд-во МЭИ, 2000. 48 с.
20. *Корецкий А.В., Осадченко Н.В.* Решение задач кинематики на персональном компьютере: методическое пособие. М.: Изд-во МЭИ, 2004. 48 с.

21. *Корецкий А.В., Осадченко Н.В.* Решение задач статики на персональном компьютере: методическое пособие. М.: Изд-во МЭИ, 2003. 64 с.

22. *Корецкий А.В., Осадченко Н.В., Устинов В.Ф.* Методические указания по работе студентов с обучающими программами по динамике. М.: Изд-во МЭИ, 1996. 58 с.

23. *Мартыненко Ю.Г.* Аналитическая динамика электромеханических систем. М.: МЭИ, 1984. 64 с.

24. *Мещерский И.В.* Сборник задач по теоретической механике: Учебное пособие. СПб.: Лань, 2010. 448 с.

25. *Новожилов И.В., Зацепин М.Ф.* Типовые расчёты по теоретической механике на базе ЭВМ. М.: Высш. шк., 1986. 136 с.

26. Сборник задач по теоретической механике: Учебное пособие / В.В.Дубинин, М.М.Ильин, К.С.Колесников и др. Под ред. К.С.Колесникова. СПб.: Лань, 2008. 448 с.

Научно-методические статьи по механике

27. *Зацепин М.Ф., Новожилов И.В.* Уравнения движения механических систем в избыточном наборе переменных // Сб. научно-метод. статей по теоретической механике. Вып. 18. М.: Высш. шк., 1987. С. 62 – 66.

28. *Осадченко Н.В.* Лагранжев формализм в динамике термомеханических систем // Сб. научно-метод. статей по теоретической механике. Вып. 20. М.: Изд-во МПИ, 1990. С. 43 – 51.

29. *Осадченко Н.В.* Метод винтов в вычислительной механике // Проблемы механики управляемых систем, машин и механизмов. Межвузовский тематический сб. № 77. М.: Моск. энерг. ин-т, 1985. С. 61 – 68.

30. *Слободянский М.Г.* Построение и изложение в курсе теоретической механики раздела “Статика твёрдого тела” // Теоретическая механика во втузах: Сб. статей. М.: Высш. шк., 1971. С. 156 – 170.

31. *Appleby P.G.* Inertial Frames in Classical Space-Time // Archive for Rational Mechanics and Analysis. 1978. Vol. 67, No. 4. P. 337 – 350.

32. *Carlson D.E.* A Mathematical Theory of Physical Units, Dimensions and Measures // Archive for Rational Mechanics and Analysis. 1979. Vol. 70, No. 4. P. 289 – 305.

33. *Noll W.* Space-Time Structures in Classical Mechanics // Delaware Seminar in the Foundations of Physics. Berlin – Heidelberg – New York: Springer – Verlag, 1967. P. 28 – 34.

34. *Rychlewski J.* Mathematical Foundations of the Theory of Dimensions, Analogies and Similarity // Trends in Applications of Pure Mathematics to Mechanics. L. e.a.: Pitman Publishing, 1976. P. 333 – 364.

35. *Toupin R.A.* World Invariant Kinematics // Archive for Rational Mechanics and Analysis. 1958. Vol. 1, No. 3. P. 181 – 211.

Монографическая и научно-популярная литература по механике

36. *Арнольд В.И., Козлов В.В., Нейштадт А.И.* Математические аспекты классической и небесной механики // Совр. проблемы математики. Фундаментальные направления. Т.3. М.: ВИНИТИ АН СССР, 1985. С. 5 – 304.

37. *Бурдаков С.Ф., Дьяченко В.А., Тимофеев А.Н.* Проектирование манипуляторов промышленных роботов и роботизированных комплексов. М.: Высш. шк., 1986. 264 с.

38. *Гулиа Н.В.* Инерция. М.: Наука, 1982. 152 с.

39. *Диментберг Ф.М.* Теория винтов и её приложения. М.: Наука, 1978. 328 с.

40. *Ишлинский А.Ю.* Ориентация, гироскопы и инерциальная навигация. М.: Наука, 1976. 670 с.

41. *Новожилов И.В.* Фракционный анализ. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1991. 190 с.

42. *Попов Е.П., Верещагин А.Ф., Зенкевич С.Л.* Манипуляционные роботы: динамика и алгоритмы. М.: Наука, 1978. 400 с.

43. *Седов Л.И.* Методы подобия и размерности в механике. М.: Наука, 1977. 440 с.

44. Теоретическая механика. Вывод и анализ уравнений движения на ЭВМ: Ч.I. / В.Г.Веретенников, И.И.Карпов, А.П.Маркеев и др. М.: Высш. шк., 1990. 174 с.

Литература по истории механики

45. *Веселовский И.Н.* Очерки по истории теоретической механики. М.: Высш. шк., 1974. 287 с.

46. *Моисеев Н.Д.* Очерки истории развития механики. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1961.

47. *Рожанская М.М.* Механика на средневековом Востоке. М.: Наука, 1976. 324 с.

48. *Тюлина И.А.* История и методология механики. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1979. 282 с.

Учебники и монографии по математике

49. *Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М.* Численные методы. М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2003. 632 с.

50. *Болтянский В.Г.* Оптимальное управление дискретными системами. М.: Наука, 1973. 448 с.

51. *Бурбаки Н.* Алгебра. Алгебраические структуры. Линейная и полилинейная алгебра. М.: Физматгиз, 1962. 516 с.

52. *Вержбицкий В.М.* Основы численных методов. М.: Высш. шк., 2002. 840 с.

53. *Гантмахер Ф.Р.* Теория матриц. М.: Наука, 1988. 552 с.

54. *Дубровин Б.А., Новиков С.П., Фоменко А.Т.* Современная геометрия. Методы и приложения. М.: Наука, 1986. 760 с.

55. *Зимина О.В.* Линейная алгебра и аналитическая геометрия: Учебный комплекс: Учебное пособие для студентов вузов, изучающих высшую математику / Под ред. А.И.Кириллова. М.: Изд-во МЭИ, 2000. 328 с.

56. *Кострикин А.И., Манин Ю.И.* Линейная алгебра и геометрия. М.: Наука, 1986. 304 с.

57. *Хайрер Э., Нёрсетт С., Ваннер Г.* Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Нежёсткие задачи. М.: Мир, 1990. 512 с.

ИМЕННОЙ УКАЗАТЕЛЬ

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

Сокращения:

АТТ – абсолютно твёрдое тело
МЦС – мгновенный центр скоростей
МЦУ – мгновенный центр ускорений
СМТ – система материальных точек
СО – система отсчёта
у.н.СО – условно неподвижная СО

ОГЛАВЛЕНИЕ

ОСАДЧЕНКО Николай Владимирович

КУРС ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ

Редактор *И.И.Иванова*
Оригинал-макет: *Автор*
Оформление переплёта *П.П.Петрова*

Подписано в печать 08.08.14. Формат 60 × 90/16. Бумага офсетная.
Печать офсетная. Усл. печ. л. 49,87. Уч.-изд. л. 49,87. Тираж 2000 экз.
Заказ № 342

Издательство «Юрайт»
ООО «Юрайт»
111123, Москва, ул. Плеханова, 4А
E-mail: Red@Urait.ru

Отпечатано в ООО «Чебоксарская типография № 1»
428019, г.Чебоксары, пр. И.Яковлева, 15