 Экспериментально показано, что введение в состав пенобетона полимеров, имеющих аморфное строение, способствует повышению деформативных и энергопоглощающих свойств пенобетона.

В ходе исследования, описанного в статье, получена эмпирическая взаимосвязь между коэффициентом рассеивания энергии, характеризующим энергопоглощающие свойства пенобетона, и величиной кристалло-аморфного соотношения, отражающего степень аморфности его структуры. Предложена конструкция дорожной насыпи с использованием пенобетона.

#### Литература

1. Применение монолитного полимерцементного пенобетона при устройстве дорожного полотна / А. М. Сычева [и др.] // Путь и путевое хозяйство. – 2018. – № 6. – С. 32–34.

2. Сурин Д. В., Стахно Р. Е. Оптимальное проектирование и оперативный расчет специальных фортификационных сооружений министерства обороны: учеб. пособие. – СПб., 2008.

3. Методика расчета величины кристалло-аморфного соотношения каменной прослойки ячеистого бетона с целью оценки его теплозащитных свойств и применения в дорожных конструкциях / А. М. Сычева [и др.] // Транспортное строительство. – 2018. – № 12. – С. 24–27.

4. Информационное значение инженерно-химических параметров некоторых веществ и процессов для использования их в интересах устойчивого развития общества: учеб. пособие / Л. Б. Сватовская [и др.]. – СПб.: ПГУПС, 2013.

5. Альтами МЕТ 6С. Металлографический микроскоп для исследований в отраженном свете по методу светлого поля и поляризации. Руководство по эксплуатации. – СПб., 2016.

#### Для связи с авторами:

Анастасия Максимовна Сычева, 8-921-857-22-17,  
amsychova@yandex.ru

## Спектр собственных частот колебаний внешне статически неопределимой фермы

КИРСАНОВ М.Н., д-р физ.-мат. наук, проф., ТИНЬКОВ Д.В., асп., НИУ МЭИ, Москва

#### Аннотация

Приводится алгоритм вывода формул для расчета частот собственных колебаний плоской балочной фермы с крестообразной решеткой на двух неподвижных шарнирных опорах. Алгоритм основан на индукционном выводе коэффициентов матрицы податливости при произвольном числе панелей фермы. В решении использованы операторы системы компьютерной математики Maple для определения усилий в стержнях и составления и решения рекуррентных уравнений.

#### Ключевые слова

Индукция, ферма, частота колебаний, число панелей, Maple

#### Abstract

The paper presents an algorithm for derivation of formulas for calculating the natural oscillation frequencies of a flat beam truss with a cross-shaped lattice on two fixed hinge supports. The algorithm is based on the induction derivation of the compliance matrix coefficients for an arbitrary number of truss panels. The solution uses the Maple computer math system operators to determine the forces in the rods and to compose and solve recurrent equations.

#### Keywords

Induction, Maple, oscillation frequency, number of panels, truss

#### Постановка задачи

Анализ частотных характеристик строительных конструкций – традиционная задача инженеров-проектировщиков. Как правило, эта задача решается численно методом конечных элементов или каким-либо другим численным способом для конкретных конструкций с заданными геометрическими и физическими характеристиками [1, 2]. В [3] задача о колебании груза в узле балочной фермы с треугольной решеткой без учета массы самой фермы решена в аналитической форме для произвольного числа панелей. Формула для частоты колебаний получена обобщением ряда решений, найденных в системе компьютерной математики Maple для ферм с различным числом панелей. Жесткость фермы определялась по формуле Максвелла – Мора. Значительно сложнее в аналитической форме решить задачу со многими степенями свободы, когда грузы расположены по всем узлам нижнего пояса фермы.

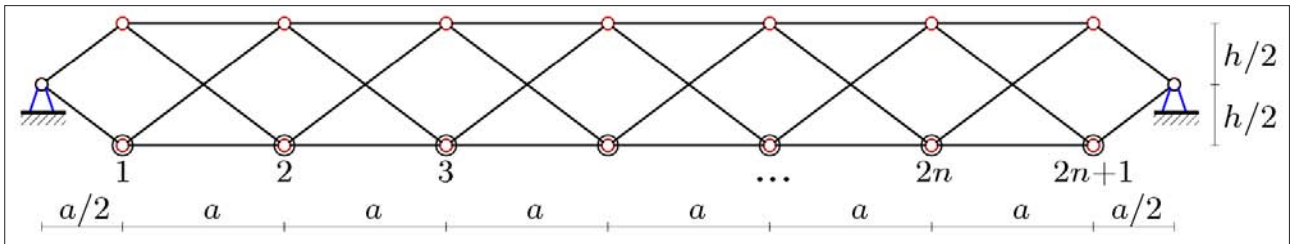


Рис. 1. Ферма,  $n = 3$

Рассмотрим ферму с крестообразной решеткой и двумя неподвижными шарнирными опорами (рис. 1). В [4] для этой фермы методом индукции найдена аналитическая зависимость ее прогиба под равномерной нагрузкой от числа панелей. При этом выяснено, что при нечетном числе панелей в пролете эта ферма становится мгновенно геометрически изменяемой, найдена соответствующая схема виртуальных скоростей узлов. Обозначим за  $n$  число панелей в половине пролета.

В ферме  $n_s = 8n + 8$  стержней, включая четыре жесткие стержня, моделирующие опоры. Массы расположены в узлах нижнего пояса, горизонтальными колебаниями пренебрегаем, число степеней свободы системы в такой постановке равно  $2n + 1$ .

**Расчет**

Уравнение колебаний масс имеет вид

$$[M_n]\ddot{Y} + [D_n]\dot{Y} = 0, \tag{1}$$

где  $\bar{Y}$  – вектор вертикальных перемещений шарниров длиной  $2n + 1$ ;  $\ddot{Y}$  – вектор ускорений;  $[D_n]$  – матрица жесткости;  $[M_n]$  – диагональная матрица инерции в предположении, что массы  $m$  грузов одинаковые. Матрицы податливости  $[B_n]$ , обратные к матрице жесткости, определяются по формуле Максвелла – Мора:

$$b_{i,j} = \sum_{v=1}^{n_s-4} S_v^{(i)} S_v^{(j)} l_v / (EF). \tag{2}$$

Здесь  $S_v^{(i)}$  – усилие от действия единичной силы в узле  $i$  в стержне с номером  $v$ ;  $l_v$  – длина стержня;  $EF$  – жесткость стержня. Площади сечений стержней одинаковые. Суммирование ведется по всем стержням фермы, кроме четырех опорных.

Умножая (1) слева на  $[B_n]$ , сводим задачу к определению собственных чисел матрицы

$[B_n]\bar{Y} = \lambda\bar{Y}$ , где  $\lambda = 1/(m\omega^2)$  – собственное число;  $\omega$  – собственная частота колебаний системы грузов. Основная часть расчета спектра частот – определение аналитических выражений для элементов матрицы  $[B_n]$ .

Расчет ряда ферм показывает, что общий вид матрицы можно представить суммой двух матриц

$$[B_n] = ([A_n]a^3 / 3 + [C_n]c^3) / (8(2n + 1)EFh^2),$$

где  $c = \sqrt{a^2 + h^2}$ .

Вывод формул для каждой из них при произвольном числе панелей выполняется в три этапа. Рассмотрим вывод матрицы  $[A_n]$ . Сначала при некотором фиксированном числе панелей, например,  $n = 2$ , по формуле (2), в которой усилия в стержнях находятся методом вырезания узлов по программе в системе Maple [3, 4], получается бисимметричная матрица

$$A_2 = 8 \begin{bmatrix} 24 & 6 & 30 & 9 & 6 \\ & 6 & 75 & 45 & 60 & 9 \\ 30 & 45 & 90 & 45 & 30 \\ & 9 & 60 & 45 & 75 & 6 \\ 6 & 9 & 30 & 6 & 24 \end{bmatrix}.$$

Методом индукции с помощью операторов `rgf_findrecur` и `rsolve` системы Maple определяем общие члены последовательностей элементов строк, рассматривая только первые  $n + 1$  строки правого треугольника матрицы:

$$\begin{aligned} a_{1,i} &= 4i^3 - 66i^2 + (266 + 30(-1)^i)i - 165(-1)^i - 147; \\ a_{2,i+1} &= 12i^3 - 162i^2 + (462 + 30(-1)^i)i - 195(-1)^i + 123; \\ a_{3,i+2} &= 20i^3 - 210i^2 + (370 + 30(-1)^i)i - 165(-1)^i + 405; \\ &\dots \end{aligned}$$

Для обобщения этих выражений по строкам (второй этап, индукция по строкам  $j$ ), записываем их общий вид:

$$a_{j,i+j-1} = \alpha_3 i^3 - \alpha_2 i^2 + (\alpha_{1,1} + \alpha_{1,2}(-1)^i)i - \alpha_{0,2}(-1)^i + \alpha_{0,1}. \quad (3)$$

Находим общие члены последовательностей коэффициентов при степенях  $i$ :

$$\begin{aligned} \alpha_3 &= 8j - 4, \quad \alpha_2 = -24j^2 + 168j - 78; \\ \alpha_{1,1} &= 32j^3 - 336j^2 + 980j - 410, \quad \alpha_{1,2} = 30, \\ \alpha_{0,1} &= 16j^4 - 224j^3 + 980j^2 - 1372j + 468 + 15(-1)^j, \\ \alpha_{0,2} &= 180 + 15(-1)^j. \end{aligned}$$

Последний этап — обобщение по числу панелей  $n$ . При  $n = 3$  выражение (3) имеет коэффициенты:

$$\begin{aligned} \alpha_3 &= 8j - 4, \quad \alpha_2 = -24j^2 + 216j - 102, \\ \alpha_{1,1} &= 32j^3 - 432j^2 + 1556j - 674, \quad \alpha_{1,2} = 42, \\ \alpha_{0,1} &= 16j^4 - 288j^3 + 1556j^2 - 2340j + 816 + 21(-1)^j, \\ \alpha_{0,2} &= 336 + 21(-1)^j. \end{aligned}$$

При  $n = 4$ :

$$\begin{aligned} \alpha_3 &= 8j - 4, \quad \alpha_2 = -24j^2 + 264j - 126, \\ \alpha_{1,1} &= 32j^3 - 528j^2 + 2260j - 1002, \quad \alpha_{1,2} = 54, \\ \alpha_{0,1} &= 16j^4 - 352j^3 + 2260j^2 - 3564j + 1260 + 27(-1)^j, \\ \alpha_{0,2} &= 540 + 27(-1)^j. \end{aligned}$$

Обобщая коэффициенты этих выражений, получим:

$$\begin{aligned} \alpha_3 &= 8j - 4, \quad \alpha_2 = 2(-12j^2 + (24n + 36)j - 12n - 15), \\ \alpha_{1,1} &= 2(16j^3 - \gamma_2 j^2 + \gamma_1 j - \gamma_0), \\ \gamma_2 &= 48n + 72, \quad \gamma_1 = 2(16n^2 + 64n + 53), \\ \gamma_0 &= 16n^2 + 52n + 37, \quad \alpha_{1,2} = 12n + 6, \\ \alpha_{0,1} &= 16j^4 - \beta_3 j^3 + \beta_2 j^2 - \beta_1 j + \beta_{0,1} + \beta_{0,2}(-1)^j, \\ \beta_3 &= 64n + 96, \quad \beta_2 = 4(16n^2 + 64n + 53), \quad R - \text{M} \text{r} \\ \beta_1 &= 4(32n^2 + 82n + 51), \\ \beta_{0,1} &= 12(4n^2 + 9n + 5), \quad \beta_{0,2} = 6n + 3, \\ \alpha_{0,2} &= \varphi_0 + \beta_{0,2}(-1)^j, \quad \varphi_0 = 12(2n^2 + 3n + 1). \end{aligned}$$

Не все приведенные выше коэффициенты были получены из коротких последовательностей при  $n = 2, 3, 4$ . Для того чтобы операторы **rgf\_**

**findrecur** и **rsolve** смогли выявить рекуррентные уравнения, необходимые для решения задачи, и выдать достоверный результат, потребовалось исследовать фермы при  $n > 10$ . Проверка полученных решений произведена при разных значениях  $n$  численно.

Остальные элементы матрицы (элементы  $n$  нижних строк правого треугольника и все элементы левого треугольника) получаются отражением относительно главной диагонали  $a_{i,j} = a_{j,i}$ ,  $j = 1, \dots, 2n+1$ ,  $i = j+1, \dots, 2n+1$  и побочной  $a_{i,2n+2-j} = a_{2n+2-i,j}$ ,  $j = 1, \dots, 2n+1$ ,  $i = j+1, \dots, 2n+1$ .

Решение для элементов матрицы  $[C_n]$  находится несколько проще. Эта матрица в силу симметрии фермы также бисимметричная. Приведем окончательные формулы, опуская промежуточные выкладки. Как и для матрицы  $[A_n]$ , это решение получается в три этапа и справедливо для верхних  $n + 1$  строк правого треугольника матрицы:

$$\begin{aligned} c_{j,i+j-1} &= (q_1(-1)^i - 4j + 2)i - q_0(-1)^i + 4(2n+3)j - 4j^2 - 4n - 5; \\ q_1 &= 4n + 2, \quad q_0 = 4n^2 + 8n + 3. \end{aligned}$$

Частоты колебаний выражаются через собственные числа матрицы  $[B_n] \omega_k = \sqrt{1/(\lambda_k m)}$ .

### Анализ

Рассмотрим пример. Ферма имеет длину панели  $a = 3$  м, высоту  $h = 4$  м, продольную жесткость стержней  $EF = 2,0 \cdot 10^4$  кН. В узлах нижнего пояса расположены массы  $m = 200$  кг. Вычисляя собственные числа матрицы с помощью оператора **Eigenvalues** системы Maple для фермы с  $n$  панелями, получаем  $2n + 1$  собственных чисел и столько же частот спектра колебаний. Частоты колебаний  $\omega_k$  каждой фермы ( $n = 2, 3, 4, \dots, 15$ ) отметим точками на отдельной кривой (рис. 2). Здесь  $k$  – номер частоты в спектре. Число собственных частот зависит от числа панелей,  $k = 5, \dots, 2n+1$ . Число точек, соответствующих частотам, на кривой, построенной для фермы с  $n$  панелями, равно  $2n + 1$ .

Особенности полученных решений сразу же бросаются в глаза. Прежде всего видна верхняя грань высших частот колебаний. Эта граница с увеличением  $n$  немного падает, оставаясь при этом ярко выраженной. Более важным являет-

ся наблюдаемое сгущение низших частот, наиболее интересных для расчетчиков. Любопытны также «ступеньки», появляющиеся на кривых с большим числом  $n$ , означающие совпадение частот, или внутренний резонанс системы (кривая при  $n = 15, k = 16, 17$  и т.д.).

Заметим также, что полученное решение лишь частично аналитическое. Заключительный этап решения – расчет собственных чисел матрицы – выполняется численно. Однако наиболее важная и в целом трудоемкая часть расчета по организации матрицы податливости доведена до конечных аналитических выражений, справедливых при любом, в том числе весьма большом числе панелей. Это существенно сокращает время расчетов, повышает точность и надежность результатов.

Отметим также и чисто практические трудности, которые связаны с самой конструкцией фермы, преодоленные в процессе решения задачи. Решетка фермы не позволяет рассчитать усилия в стержнях традиционными способами – последовательным вырезанием узлов и методом сечений. Здесь оказалось весьма полезным использовать аналитические методы расчета усилий с применением метода индукции и системы Maple.

Для внешне статически неопределимой распорной фермы приведен трехэтапный алгоритм вывода элементов матрицы податливости, определяющей собственные частоты конструкции. Численная реализация результатов показала некоторые особенности распределения частот в спектре. Приведенный алгоритм можно использовать для других ферм, имеющих регулярную структуру.

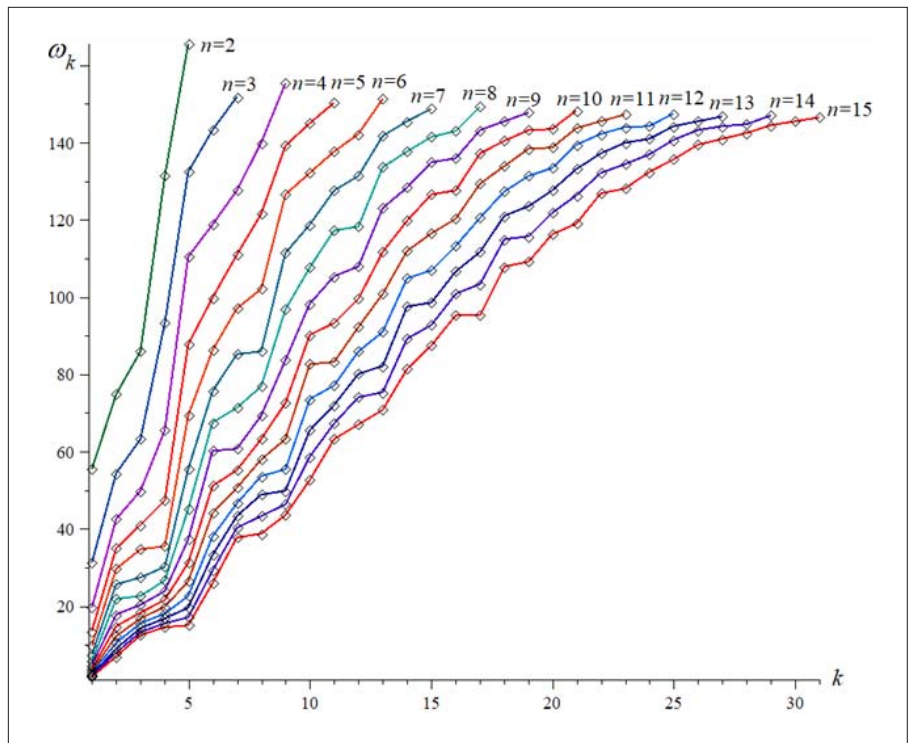


Рис. 2. Частоты колебаний (рад/с) при разном числе панелей фермы в половине пролета

#### Литература

1. Артёмов В. Е., Мудрая И. Г. Гармонический анализ изгибных колебаний неразрезных пролетных строений мостов // Наука и прогресс транспорта. Вестник Днепропетровского национального университета железнодорожного транспорта. – 2010. – № 31. – С. 157–160.
2. Уфимцев Е. М. Определение усилий в стержнях фермы в процессе колебаний // Вестник ЮУрГУ. Серия «Строительство и архитектура». – Челябинск: Издательский центр ЮУрГУ, 2011. – Вып. 13. – № 35. – С. 11–15.
3. Кирсанов М. Н., Тиньков Д. В. Формулы для частоты колебания груза в произвольном узле балочной фермы // Транспортное строительство. – 2018. – № 12. – С. 21–23.
4. Кирсанов М. Н. Скрытая особенность и асимптотические свойства одной плоской балочной фермы // Строительная механика и расчет сооружений. – 2014. – № 4 (255). – С. 9–13.

Для связи с авторами:

Михаил Николаевич Кирсанов, 8 (495) 362-73-14, c216@Ya.ru,

Дмитрий Владимирович Тиньков, 8-926-171-54-92, dvtinkov@yandex.ru