

ФОРМУЛА ЗАВИСИМОСТИ ПРОГИБА НЕСИММЕТРИЧНО НАГРУЖЕННОЙ ПЛОСКОЙ ФЕРМЫ С УСИЛЕННЫМИ РАСКОСАМИ ОТ ЧИСЛА ПАНЕЛЕЙ

Г. Н. Ткачук¹

Национальный исследовательский университет "МЭИ"
Россия, г. Москва

¹Студент, тел.: +7(495)362-73-14; e-mail: geoyukos@yandex.ru

Статически определимая балочная ферма с восходящими раскосами и параллельными поясами усилена дополнительными раскосами. На половине верхнего пояса ферма нагружена равномерно распределенными по узлам силами. Прогиб фермы рассчитывается по формуле Максвелла-Мора. Усилия в стержнях в аналитическом виде находятся методом вырезания узлов по программе символьных преобразований Maple. По данным решения серии задач с различным последовательно увеличивающимся числом панелей получается последовательность коэффициентов искомой формулы. Общий член последовательности коэффициентов определяется с помощью решения линейного однородного рекуррентного уравнения.

Ключевые слова: ферма, прогиб, индукция, Maple

Фермы обычно рассчитываются на деформации, прочность и устойчивость, как правило, в специализированных компьютерных программах, основанных на методе конечных элементов или других численных методах. Эти программы могут рассчитывать сложные конструкции, статически неопределимые и пространственные. Аналитические же расчеты, несмотря на распространение систем символьных преобразований (Reduce, Maple, Maxima, Derive и др.), встречаются значительно реже, особенно те, которые дают решение в виде компактной формулы. В [1] приведены аналитические решения для прогиба плоских ферм под действием распределенной и сосредоточенной симметричной нагрузки. В настоящей работе ставится задача рассчитать шпренгельную ферму на несимметричную нагрузку. Известно, что такая нагрузка может быть более опасной для конструкции, чем эквивалентная ей симметричная.

Рассмотрим ферму с усиленными восходящими раскосами (рис. 1), равномерно нагруженную по половине верхнего пояса. В каждую панель фермы добавлены две дополнительные вертикальные стойки и два раскоса. В ферме с n панелями в половине пролета содержится $N=24n+4$ стержня вместе с тремя стержнями, моделирующими опоры. Расчет усилий произведем по программе [1] методом вырезания узлов.

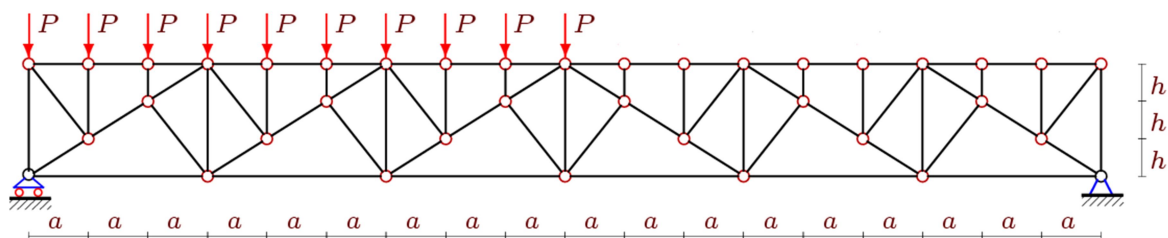


Рис. 1. Ферма под действием равномерной нагрузки, $n=3$

Эта программа использовалась в расчетах ряда арокных [2-13] и ферм пространственного типа [14-23]. Статически определимые решетчатые фермы рассчитывались в аналитической форме в [24-29]. Решение для деформации плоской фермы башенного типа получено в [30]. Выражения для прогиба шпренгельных ферм методом индукции найдены в работах [31-34]. Фермы, допускающие при определенном числе панелей кинематическую изменяемость, рассмотрены в [35-37].

Все шарниры и стержни нумеруются (рис. 2). Сначала нумеруются стержни поясов (слева направо), затем стержни решетки. В программу вводятся координаты узлов. Приведем фрагмент программы, написанной на языке системы Maple:

```
>for i to 2*n+1 do x[i]:=3*a*(i-1): y[i]:=0: end:
>for i to n do
> x[i+2*n+1]:=3*i*a-2*a: y[i+2*n+1]:=h:
> x[i+3*n+1]:=3*i*a+3*a*n-a: y[i+3*n+1]:=h:
> x[i+4*n+1]:=3*i*a-a: y[i+4*n+1]:=2*h:
> x[i+5*n+1]:=3*i*a+3*a*n-2*a:y[i+5*n+1]:=2*h:
> end:
>for i to 6*n+1 do x[i+6*n+1]:=i*a-a:y[i+6*n+1]:=3*h: end:
```

В результате расчетов получено выражение для прогиба фермы, не зависящее по форме от числа панелей:

$$EP\Delta = (Aa^3 + Bc^3 + Ch^3) / (2h^2),$$

где $c = \sqrt{a^2 + h^2}$ — длина короткого раскоса. Все три коэффициента, зависящие от числа панелей, найдены с помощью метода индукции.

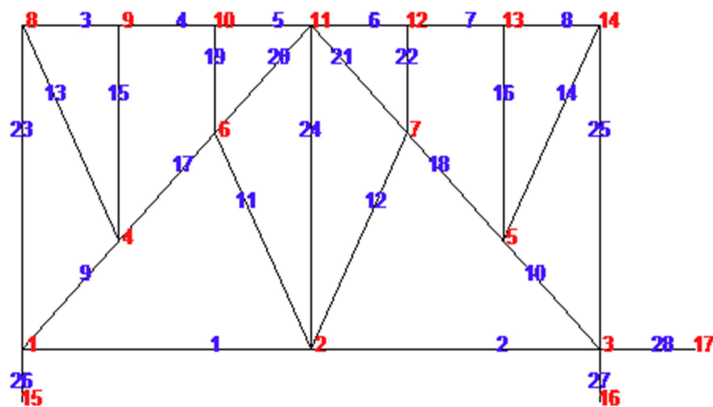


Рис. 2. Нумерация узлов и стержней, $n=1$

Оператор **rgf_findrecur** из специализированного пакета **genfunc** по данным расчета десяти ферм дает линейные однородные рекуррентные уравнения порядков 5 и 3:

$$A_n = 5A_{n-1} - 10A_{n-2} + 10A_{n-3} - 5A_{n-4} + A_{n-5};$$

$$B_n = 3B_{n-1} - 3B_{n-2} + B_{n-3};$$

$$C_n = 3C_{n-1} - 3C_{n-2} + C_{n-3}.$$

С помощью оператора **rsolve** находим решения этих уравнений в виде полиномов четвертого и второго порядка по числу панелей:

$$A = (15n^4 + 4n^3 + 7n^2 + 2n) / 4, B = (9n^2 + 3n) / 2, C = (9n^2 - 9n + 8) / 2.$$

Найденную аналитическую зависимость прогиба от числа панелей и размеров фермы можно использовать как оценочную при эскизном расчете фермы или для тестирования численных методов.

На рис. 3 приведены графики полученной зависимости безразмерного прогиба $\Delta' = \Delta EF / (P_s L)$, $P_s = P(3n - 1)$ от числа панелей при длине пролета $L=100$ м.

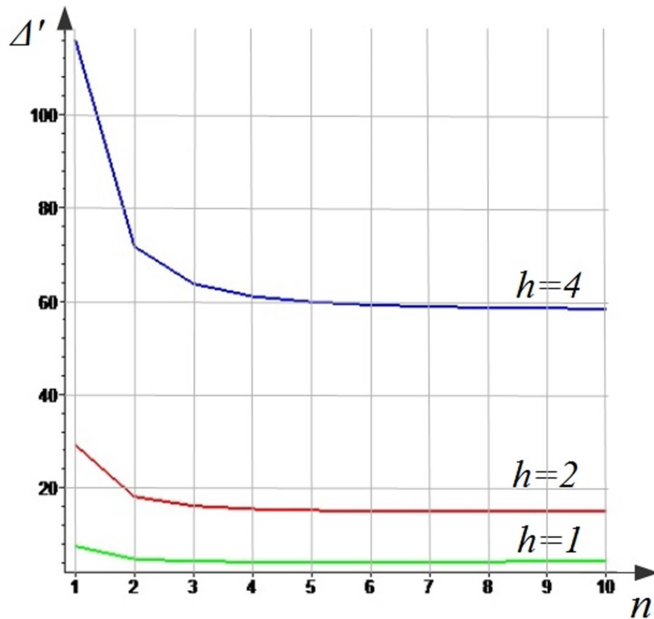


Рис. 3. Зависимость прогиба от числа панелей, высота h в метрах

Длина панели a зависит от пролета: $a=L/(6n)$. При малых n (начало графика) прогиб падает, затем очень медленно растет, стремясь к наклонной асимптоте. Тангенс угла наклона асимптоты можно найти с помощью вычисления предела $\lim_{n \rightarrow \infty} \Delta' n = 3h / (2L)$.

В системе Maple эта операция выглядит так: `limit(Del/n, n=infinity)`.

Экстремальная (минимум) точка находится вблизи значений $n=4...8$. Найти точное решение задачи о мини-

муме прогиба в системе Maple не удастся.

Средствами Maple можно построить картину распределения усилий в стержнях фермы. На рис. 4 синим цветом выделены сжатые стержни, красным — растянутые. Цифрами указаны усилия в стержнях, отнесенные к силе P . Расчеты произведены при $a=4$ м, $h = 3$ м.

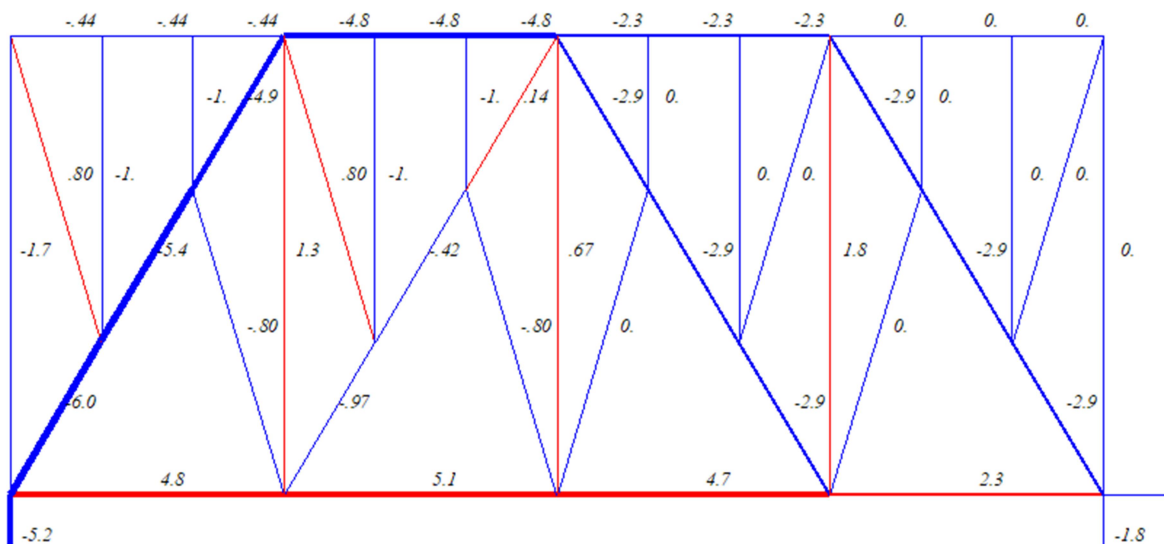


Рис. 4. Распределение усилий в стержнях, $n=2$

Аналитические обзоры некоторых простых решений для плоских ферм, полученные аналогичным методом в системе символьной математики Maple [38,39] с помощью метода индукции, содержатся в работе [40].

Библиографический список

1. Кирсанов М.Н. Плоские фермы. Схемы и расчетные формулы: справочник. М.: ИНФРА-М, 2019. 238 с.
2. Тиньков Д.В. Расчет прогиба плоской арочной фермы с крестообразной решеткой // Постулат. 2017. № 12 (26). С. 74.
3. Кунов И.М. О жесткости арочной фермы треугольного очертания в зависимости от перераспределения площадей стержней и числа панелей // Научный альманах. 2016. №6-2 (19). С. 253-256.
4. Кирсанов М.Н., Степанов А.С. О зависимости деформаций плоской арочной фермы от числа панелей // Строительная механика и расчет сооружений. 2017. № 5 (274). С. 9-14.
5. Кирсанов М.Н. Сравнительный анализ жесткости двух схем арочной фермы // Строительство уникальных зданий и сооружений. 2015. № 9 (36). С. 44-55.
6. Кирсанов М.Н. Индуктивный анализ деформации арочной фермы // International Journal for Computational Civil and Structural Engineering. 2018. Т. 14. № 1. С. 64-70.
7. Кирсанов М.Н. Формулы для расчета прогиба арочной фермы // Строительная механика и конструкции. 2018. Т. 1. № 16. С. 7-11.
8. Кирсанов М.Н. Аналитическое исследование деформаций плоской фермы арочного типа // Вестник государственного университета морского и речного флота им. адмирала С.О. Макарова. 2015. № 3 (31). С. 42-48.
9. Кирсанов М.Н. Аналитическая оценка прогиба и усилий в критических стержнях арочной фермы // Транспортное строительство. 2017. № 9. С. 8-10.
10. Кирсанов М.Н. Формулы для расчета деформаций арочной фермы с произвольным числом панелей // Строительство уникальных зданий и сооружений. 2018. № 4 (67). С. 86-94.
11. Компанеец К. А. Расчет смещения подвижной опоры плоской арочной раскосной фермы при нагрузке в середине пролета // Молодежь и наука. 2017. №4. С.108.
12. Савиных А. С. Анализ прогиба арочной раскосой фермы, нагруженной по верхнему поясу // Строительство и архитектура. 2017. Том 5. Выпуск 3 (6). С. 12-17.
13. Осадченко Н.В. Аналитические решения задач о прогибе плоских ферм арочного типа // Строительная механика и конструкции. 2018. Т.1. №16. С.12-33.
14. Кирсанов М.Н. Учет строительного подъема в аналитическом расчете пространственной балочной фермы // Известия Московского государственного технического университета МАМИ. 2014. Т. 4. № 2 (20). С. 36-39.
15. Кирсанов М.Н. Аналитический расчет и оптимизация пространственной балочной фермы // Вестник Московского энергетического института. 2012. № 5. С. 5-8.
16. Кирсанов М.Н. Аналитический расчет прогиба пространственного прямоугольного покрытия // Вестник МГСУ. 2018. Т. 13. № 5 (116). С. 579-586.
17. Кирсанов М.Н. Оценка прогиба и устойчивости пространственной балочной фермы // Строительная механика и расчет сооружений. 2016. № 5 (268). С. 19-22.
18. Кирсанов М.Н. Особенности аналитического расчета пространственных стержневых систем // Строительная механика и расчет сооружений. 2011. № 5 (238). С. 11-15.
19. Кирсанов М.Н. Статический расчет и анализ пространственной стержневой системы // Инженерно-строительный журнал. 2011. № 6 (24). С. 28-34.
20. Кирсанов М.Н. Напряженное состояние и деформации прямоугольного пространственного стержневого покрытия // Научный вестник Воронежского государственного архитек-

- турно-строительного университета. Строительство и архитектура. 2016. № 1 (41). С. 93-100.
21. Кирсанов М.Н. Расчет пространственной стержневой системы, допускающей мгновенную изменяемость // Строительная механика и расчет сооружений. 2012. № 3 (242). С. 48-51.
 22. Леонов П.Г., Кирсанов М.Н. Аналитический расчет и анализ пространственной стержневой конструкции в системе Maple // В сборнике: Информатизация инженерного образования ИНФОРИНО-2014 Труды международной научно-методической конференции. 2014. С. 239-242.
 23. Кирсанов М.Н. Аналитический расчет пространственной стержневой системы // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2012. № 1. С. 49-53.
 24. Kirsanov M., Komerzan E., Sviridenko O. Analytical calculation of the deflection of an externally statically indeterminate lattice truss// MATEC Web of Conferences, vol. 265, 0527 (2019) <https://doi.org/10.1051/mateconf/201926505027>
 25. Kirsanov M.N. A precise solution of the task of a bend in a lattice girder with a random number of panels // Russian Journal of Building Construction and Architecture. 2018. № 1 (37). С. 92-99.
 26. Кирсанов М.Н. Зависимость прогиба плоской решетчатой фермы от числа панелей // Механизация строительства. 2017. Т. 78. № 10. С. 24-27.
 27. Кирсанов М.Н., Хроматов В.Е. Моделирование деформаций плоской фермы треугольного очертания // Строительная механика и расчет сооружений. 2017. № 6 (275). С. 24-28.
 28. Кирсанов М.Н., Москвин В.Г. Деформации плоской фермы с усиленной решеткой // Строительная механика и расчет сооружений. 2018. № 4 (279). С. 10-14.
 29. Кирсанов М.Н. Индуктивный вывод формул для деформаций плоской решетчатой фермы // Строительство и реконструкция. 2017. № 2 (70). С. 17-22.
 30. Тиньков Д.В. Индуктивный вывод формулы для горизонтального перемещения башенной конструкции // Международный научный семинар "Нелинейные модели в механике, статистике, теории поля и космологии" -GRACOS-17. Казань: Изд-во Академии наук РТ, 2017. С. 249-254.
 31. Rakhmatulina A.R., Smirnova A.A. Analytical calculation and analysis of planar springel truss // Строительная механика и конструкции. 2018. № 2 (17). С. 72-79.
 32. Кирсанов М.Н. Аналитический метод расчета прогиба плоской фермы со сложной решеткой шпренгельного типа // Транспортное строительство. 2017. № 5. С. 11-13.
 33. Кирсанов М.Н. Формулы для расчета прогиба и усилий в шпренгельной ферме с произвольным числом панелей // International Journal for Computational Civil and Structural Engineering. 2018. Т. 14. № 2. С. 90-95.
 34. Гавриленко А.Б., Кирсанов М.Н. Аналитическая оценка жесткости шпренгельной фермы // Строительство и реконструкция. 2018. 2(76). С. 11-17.
 35. Кирсанов М.Н. Вывод формулы для прогиба решетчатой фермы, имеющей случаи кинематической изменяемости // Строительная механика и конструкции. 2017. Т. 1. № 14. С. 27-30.
 36. Кирсанов М.Н. Формула для прогиба и анализ кинематической изменяемости решетчатой фермы // Строительная механика и конструкции. 2017. Т. 2. № 15. С. 5-10.

37. Кирсанов М.Н. Анализ прогиба фермы с декоративной решеткой // Строительство: наука и образование. 2019. Т. 9. Вып. 1. Ст. 1. URL: <http://nso-journal.ru>. DOI: 10.22227/2305-5502.2019.1.1
38. Матросов А. В. Maple 6. Решение задач высшей математики и механики. СПб: БХВ-Петербург, 2001. 528 с.
39. Голоскоков Д. П. Практический курс математической физики в системе Maple. СПб.: Изд-во ПаркКом, 2010. 644 с.
40. Осадченко Н.В. Расчёт прогиба плоской неразрезной статически определимой фермы с двумя пролётами // Постулат. 2017. № 12. С. 28.

Reference

1. Kirsanov M.N. Flat trusses. Schemes and calculation formulas: Handbook. Moscow, INFRA-M, 2019. 238 p.
2. Tinkov D.V. Calculation of the deflection of a flat arched truss with a cross-shaped grating. Postulate. 2017. No. 12 (26). Pp.74.
3. Kunov I.M. On the rigidity of the arched truss of a triangular shape depending on the redistribution of the areas of the rods and the number of panels. Scientific Almanac. 2016. № 6-2 (19). Pp. 253-256.
4. Kirsanov M.N., Stepanov A.S. On the dependence of deformations of a flat arched truss on the number of panels. Construction mechanics and structure calculation. 2017. No. 5 (274). Pp. 9-14.
5. Kirsanov M.N. Comparative analysis of the rigidity of two arched truss schemes. Construction of unique buildings and structures. 2015. № 9 (36). Pp. 44-55.
6. Kirsanov M.N. Inductive analysis of deformation of an arched truss. International Journal for Computational Civil and Structural Engineering. 2018. Vol. 14. No. 1. Pp. 64-70.
7. Kirsanov M.N. Formulas for calculating the deflection of an arched truss. Building mechanics and structures. 2018. vol. 1. No. 16. Pp. 7-11.
8. Kirsanov M.N. Analytical study of deformations of a flat arch type truss. Bulletin of the State University of Marine and River Fleet. Admiral S.O. Makarova. 2015. № 3 (31). Pp. 42-48.
9. Kirsanov M.N. Analytical assessment of the deflection and effort in the critical rods of the arched truss. Transport Construction. 2017. No. 9. Pp. 8-10.
10. Kirsanov M.N. Formulas for calculating deformations of an arched truss with an arbitrary number of panels. Construction of unique buildings and structures. 2018. No. 4 (67). Pp. 86-94.
11. Kompaneets K. A. Calculation of the displacement of the movable support of a flat arched diagonal truss with a load in the middle of the span. Youth and Science. 2017. №4. Pp.108.
12. Savinykh A. C. Analysis of the deflection of an arched braced truss loaded on the upper belt. Construction and Architecture. 2017. Volume 5. Issue 3 (6). Pp. 12-17.
13. Osadchenko N.V. Analytical solutions of problems of deflection of flat trusses of arch type. Stroitel'naya mekhanika i konstruktzii. 2018. Volume 1. №16. Pp.12-33.
14. Kirsanov M.N. Accounting for the construction boom in the analytical calculation of a spatial beam truss. News of Moscow State Technical University MAMI. 2014. Volume 4. No. 2 (20). Pp. 36-39.
15. Kirsanov M.N. Analytical calculation and optimization of a spatial beam truss. Bulletin of the Moscow Power Engineering Institute. 2012. No. 5. Pp. 5-8.

16. Kirsanov M.N. Analytical calculation of the deflection of a spatial rectangular coating. Vestnik MGSU. 2018. Volume 13. No. 5 (116). Pp. 579-586.
17. Kirsanov M.N. Estimation of the deflection and stability of the spatial beam truss. Construction mechanics and the calculation of structures. 2016. No. 5 (268). Pp. 19-22.
18. Kirsanov M.N. Features of the analytical calculation of spatial core systems. Construction mechanics and the calculation of structures. 2011. No. 5 (238). Pp. 11-15.
19. Kirsanov M.N. Static calculation and analysis of the spatial core system. Engineering and Construction Journal. 2011. No. 6 (24). Pp. 28-34.
20. Kirsanov M.N. Stress state and deformations of a rectangular spatial core coating. Scientific Herald of the Voronezh State University of Architecture and Civil Engineering. Construction and architecture. 2016. № 1 (41). Pp. 93-100.
21. Kirsanov M.N. Calculation of a spatial core system that allows instant variability. Construction mechanics and structure calculation. 2012. № 3 (242). Pp. 48-51.
22. Leonov Pp.G., Kirsanov M.N. Analytical calculation and analysis of the spatial core structure in the Maple system. In the collection: Informatization of engineering education INFORINO-2014 Proceedings of the international scientific-methodical conference. 2014. Pp. 239-242.
23. Kirsanov M.N. Analytical calculation of the spatial core system. Construction mechanics of engineering structures and structures. 2012. № 1. Pp. 49-53.
24. Kirsanov M., Komerzan E., Sviridenko O. Analytical calculation of an externally statically indeterminate lattice truss. MATEC Web of Conferences, Volume 265, 0527 (2019) <https://doi.org/10.1051/mateconf/201926505027>
25. Kirsanov M.N. The number of panels is a number of panels. Russian Journal of Building and Architecture. 2018. No. 1 (37). Pp. 92-99.
26. Kirsanov M.N. The dependence of the deflection of a flat lattice trusses on the number of panels. Mechanization of construction. 2017. Volume 78. No. 10. Pp. 24-27.
27. Kirsanov M.N., Khromatov V.E. Modeling deformations of a flat truss of a triangular shape. Construction mechanics and structure calculation. 2017. No. 6 (275). Pp. 24-28.
28. Kirsanov M.N., Moskvina V.G. Deformations of a flat truss with a reinforced lattice. Construction mechanics and structural analysis. 2018. No. 4 (279). Pp. 10-14.
29. Kirsanov M.N. Inductive derivation of formulas for deformations of a flat lattice truss. Construction and reconstruction. 2017. No. 2 (70). Pp. 17-22.
30. Tinkov D.V. Inductive derivation of the formula for the horizontal movement of the tower structure. International scientific seminar "Nonlinear models in mechanics, statistics, field theory and cosmology" -GRACOS-17. Kazan: Publishing House of the Academy of Sciences of the Republic of Tatarstan, 2017. Pp. 249-254.
31. Rakhmatulina A.R., Smirnova A.A. Analytical calculation and analysis of planar springel truss. Building Mechanics and Structures. 2018. No. 2 (17). Pp. 72-79.
32. Kirsanov M.N. Analytical method for calculating the deflection of a flat truss with a complex truss-type grating. Transport Construction. 2017. No. 5. Pp. 11-13.
33. Kirsanov M.N. Formulas for calculating deflection and effort in a trusses with an arbitrary number of panels. International Journal for Computational Civil and Structural Engineering. 2018. Volume 14. No. 2. S. 90-95.
34. Gavrilenko, AB, Kirsanov, M.N. Analytical assessment of stiffness trusses. Construction and reconstruction. 2018. 2 (76). Pp. 11-17.

35. Kirsanov M.N. Derivation of a formula for deflection of a lattice truss with cases of kinematic variability. *Construction mechanics and structures*. 2017. Volume 1. No. 14. Pp. 27-30.
36. Kirsanov M.N. The formula for the deflection and analysis of the kinematic variability of the lattice truss. *Building mechanics and structures*. 2017. Volume 2. No. 15. Pp. 5-10.
37. Kirsanov M.N. Analysis of the deflection of a truss with a decorative lattice. *Construction: science and education*. 2019. Volume 9. No. 1. Article 1. URL: <http://nso-journal.ru>. DOI: 10.22227 / 2305-5502.2019.1.1
38. Matrosov A.V. Maple 6. The solution of problems of higher mathematics and mechanics. St. Petersburg: BHV-Petersburg, 2001. 528 p.
39. Goloskokov D.Pp. Practical course of mathematical physics in the Maple system. SPb.: Park-Com Publishing House, 2010. 644 p.
40. Osadchenko N. Calculation of the deflection of a flat continuous statically definable truss with two spans. *Postulate*. 2017. No. 12. Pp. 28.

THE FORMULA FOR THE DEPENDENCE OF THE DEFLECTION OF AN ASYMMETRICALLY LOADED FLAT TRUSS WITH REINFORCED BRACES ON THE NUMBER OF PANELS

G. N. Tkachuk

National Research University "MPEI"
Moscow, Russia

¹Student, tel.: +7(495)362-73-14; e-mail: geoyukos@yandex.ru

Statically determinate girder with upward braces and parallel belts reinforced with additional braces. On the half of the upper belt, the truss is loaded with forces evenly distributed over the nodes. The deflection of the truss is calculated by the Maxwell-Mohr formula. The forces in the rods in the analytical form are the method of cutting nodes according to the program of symbolic transformations Maple. According to the solution of a series of problems with different successively increasing number of panels, a sequence of coefficients of the desired formula is obtained. The General term of the coefficients sequence is determined by solving a linear homogeneous recurrent equation.

Keywords: truss, deflection, induction, Maple