

Аналитический расчет частоты колебания груза в произвольном узле балочной фермы

КИРСАНОВ М.Н., д-р физ.-мат. наук, проф., ТИНЬКОВ Д.В., асп.; НИУ МЭИ, Москва

Аннотация

Приводится вывод аналитической зависимости частоты колебаний тяжелого груза от его положения в пролете плоской статически определимой фермы без учета ее массы. Задача решена в системе компьютерной математики Maple с привлечением метода индукции для обобщения решения на произвольное число панелей фермы.

Ключевые слова

Maple, индукция, ферма, частота колебаний, число панелей.

Abstract

The article provides the conclusion about of analytical dependence of the oscillation frequency of a heavy load on its position in the span of a planar statically determined truss without taking into account its mass. The problem is solved in the system of computer mathematics Maple with the use of induction method to generalize the solution to an arbitrary number of farm panels.

Keywords

Induction, Maple, number of panels, oscillation frequency, truss

Анализ динамики сооружений, как правило, выполняется численно с учетом всех характеристик конструкции [1–3]. Для простой оценки частот колебаний системы, например моста, в зависимости от положения массивного груза полезны аналитические решения, полученные для упрощенной модели конструкции, прежде всего при пренебрежении собственной массы системы. Это вполне допустимо, к примеру, в случае весьма тяжелого груза на мосту, выполненного из легких материалов (дерево, металл). Наибольшей сложностью при выводе является необходимость введения в решения двух целочисленных параметров: номера узла k , в котором расположен груз, и числа панелей верхнего пояса. Рассмотрим симметричную плоскую ферму с треугольной решеткой (рис. 1). Число панелей верхнего пояса в половине пролета обозначим n .

В ферме $n_s = 8n - 1$ стержней, из которых $4n - 1$ длиной $2a$ находятся в верхнем и нижнем поясах, $4n$ стержней длиной $d = \sqrt{a^2 + h^2}$ составляют решетку, где a – расстояние между узлами в проекции на горизонтальную плоскость, h – высота фермы. Соответственно, $2a$ – расстояние между соседними узлами по верхнему и нижнему поясам. В расчет входят также еще три стержня, моделирующие опоры. Эти стержни предполагаются жесткими.

Расчет частоты колебаний в предложенной постановке сводится к определению коэффициента жесткости C конструкции в зависимости от номера k шарнира верхнего пояса, где расположен груз, и числа панелей $2n$ в ферме. В уравнении $m\ddot{y} + Cy = 0$ колебания груза, где y – вертикальное смещение груза массой m , жесткость равна $C = 1/\delta_{n,k}$. Горизонтальными движениями груза пренебрегаем. Податливость $\delta_{n,k}$ вычисляется по формуле Максвелла – Мора

$$\delta_{n,k} = \sum_{i=1}^{n_s} S_i^2 l_i / (EF).$$

Здесь S_i – усилие в i -м стержне фермы от единичной вертикальной силы в узле, где расположен груз, l_i – длина стержня, EF – жесткость стержня. Площади сечений всех стержней одинаковы. Суммирование ведется по всем стержням фермы, кроме трех опорных.

Из уравнения движения следует выражение для частоты колебаний $\omega = \sqrt{1/(\delta_{n,k} m)}$. Вывод формулы зависимости жесткости от числа панелей и места нагрузки возможен для регулярных систем индукцией по этим натуральным параметрам. Сначала предполагается, что груз расположен в шарнире $k = 1$ (рис. 1). Решается серия задач с различным числом панелей фермы. Усилия в стержнях находятся из системы линейных уравнений равновесия узлов [3,

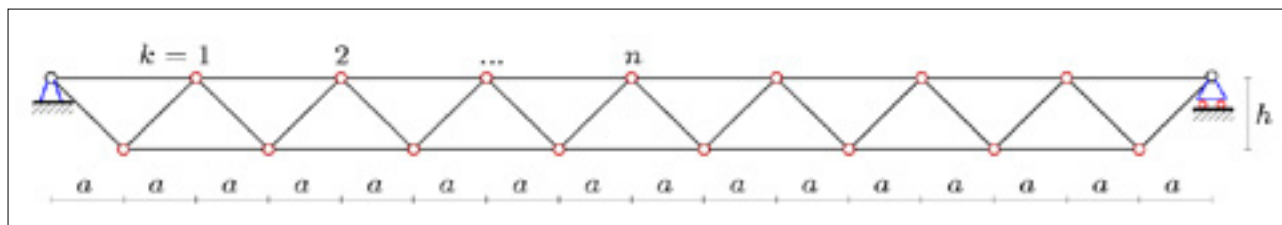


Рис. 1. Ферма, $n = 4$

5]. Всякий раз выражение для податливости имеет вид:

$$\delta_{n,k} = (A_{n,k}a^3 + D_{n,k}d^3) / (nh^2EF). \quad (1)$$

Отличаются только коэффициенты $A_{n,k}$, $D_{n,k}$ которые зависят от местоположения груза k и числа панелей n . Для ферм с числом панелей в половине пролета от 1 до 6 имеем следующую последовательность $A_{n,1}$: 3, 25, 205/3, 133, 219, 979/3. Оператор `rgf_findrecur` системы Maple позволяет найти рекуррентное уравнение, которому удовлетворяют члены этой последовательности: $A_{n,1} = 3A_{n-1,1} - 3A_{n-2,1} + A_{n-3,1}$. Решение линейного однородного уравнения можно найти с помощью оператора `rsolve` $A_{n,1} = (32n^2 - 30n + 7) / 3$. Таким же образом определяется коэффициент при d^3 $D_{n,1} = 2n - 1$. После этого все решение повторяется уже для следующего положения груза $k = 2$ и т.д.

Коэффициенты при расположении груза в узлах 2, 3, 4... n имеют вид:

$$A_{n,2} = (128n^2 - 252n + 124) / 3, \quad D_{n,2} = 4n - 4,$$

$$A_{n,3} = (288n^2 - 858n + 639) / 3, \quad D_{n,3} = 6n - 9,$$

$$A_{n,4} = (512n^2 - 2040n + 2032) / 3, \quad D_{n,4} = 8n - 16,$$

...

Вторым шагом к получению окончательного решения остается обобщение этих формул на произвольный номер узла k . При обнаружении закономерности коэффициентов $A_{2,k}$ в $A_{n,k}$ при n^2 потребовалось решить задачу для шести положений груза в узлах и получить последовательность коэффициентов при n^2 : 32, 128, 288, 512, 800, 1152. Общий член последовательности определяется в два приема. Сначала выписывается рекуррентное уравнение, которому удовлетворяют члены последовательности:

$$\alpha_{2,k} = 3\alpha_{2,k-1} - \alpha_{2,k-2} + \alpha_{2,k-3}.$$

Затем оператором `rsolve` находится его решение $\alpha_{2,k} = 32k^2$. Несколько сложнее находятся другие коэффициенты в $A_{n,k}$. В итоге имеем:

$$A_{n,k} = k(2n - k)(1 + 16kn - 8k^2) / 3, \quad (2)$$

$$D_{n,k} = k(2n - k), \quad k = 1, \dots, n.$$

Для контроля полученного решения необходимо решить задачу прогиба фермы под действием единичной силы в середине пролета. Решение не требует двойной индукции и имеет вид $\Delta = n((8n^2 + 1)a^3 / 3 + d^3) / (h^2EF)$ [5], что совпадает с решением (1)-(2) при $k = n$. С учетом значений коэффициентов получаем искомую

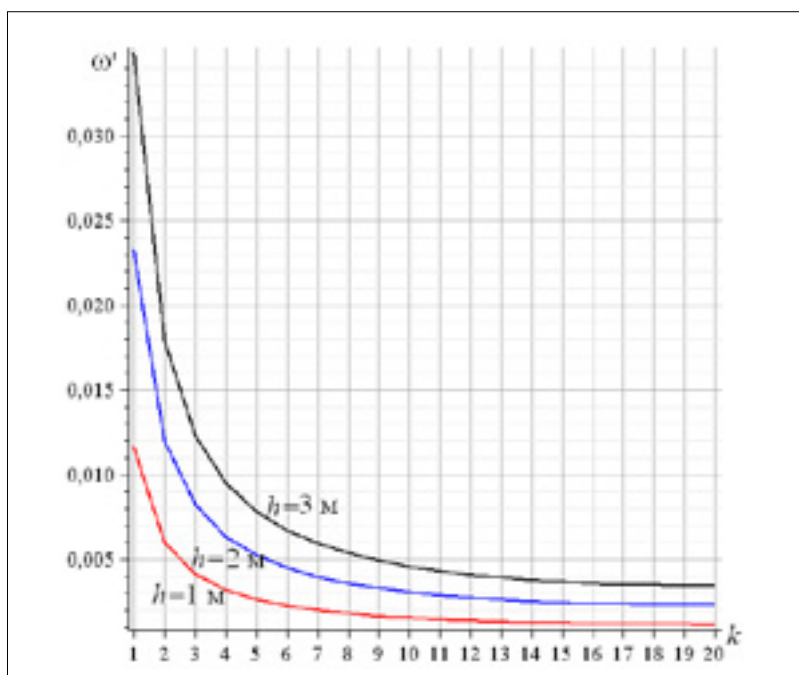


Рис. 2. Зависимость частоты колебаний от места груза

зависимость для частоты колебаний груза:

$$\omega_{n,k} = h\sqrt{EFn / ((A_{n,k}a^3 + D_{n,k}d^3)m)} \quad (3)$$

При изменении положения груза частота колебаний будет меняться. Имея аналитическое решение, это легко проиллюстрировать на графике. Введем безразмерную частоту

$$\omega' = \omega_{n,k}\sqrt{ma / (EF)} = h\sqrt{3na / (k(2n-k)(a^3(1+16nk-8k^2)+3d^3))}$$

На рис. 2 кривые построены для случая $a = 6$ м и $n = 20$. Видно достаточно резкое уменьшение частоты и некоторая ее стабилизация по мере приближения груза к середине пролета. Зависимость же частоты от высоты h фермы почти линейная.

На рис. 3 построены кривые полученного решения для трех фиксированных положений груза $k = 1, 2, 3$ и разного числа панелей. Принята постоянная длина пролета $l = 2an = 20$ м. Интересно отметить, что частота колебаний груза в третьем узле с увеличением числа панелей в ферме сначала уменьшается, а потом увеличивается. Все три кривые имеют в разной степени выраженные максимумы.

Вывод

Выведена простая аналитическая зависимость для частоты малых колебаний груза от размеров фермы и положения груза. Одно из предположений касалось одинаковой жесткости стержней во всей ферме. Но форма решения допускает обобщение на произвольный случай. Если, например, жесткости стержней решетки $E_{\text{реш}}$ и поясов E соотносятся как $E_{\text{реш}}/E = \gamma$, формула (3) изменится не сильно:

$$\omega_{n,k} = h\sqrt{EFn / ((A_{n,k}a^3 + D_{n,k}d^3) \gamma m)}$$

Найденное решение, несмотря на простоту, отличается строгостью вывода и дает (в рамках сделанных предположений) точное решение, независимо от числа панелей. Это позволяет использовать его для оценки численных решений, допускающих потерю точности за счет ошибок

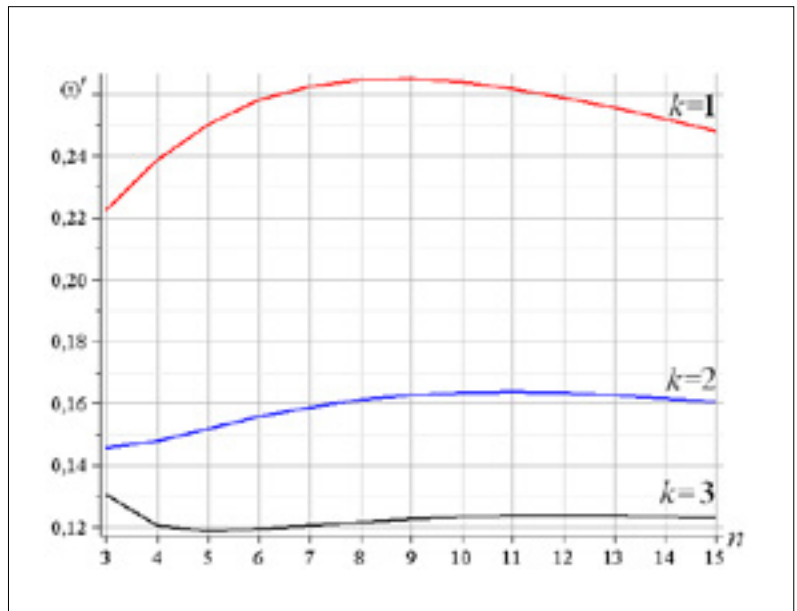


Рис. 3. Зависимость частоты колебаний от числа панелей

округления, особенно для большепролетных конструкций, где число панелей и размер расчетных матриц весьма велики.

Литература

1. Baeza L., Ouyang H. Vibration of a truss structure excited by a moving oscillator // *Journal of Sound and Vibration*. – 2009. – Vol. 321. – № 3–5. – P. 721–734.
2. Vibration reduction in truss core sandwich plate with internal nonlinear energy sink / Chen J. [et al.] // *Composite Structures*. – 2018. – Vol. 193. – P. 180–188.
3. Распопов А. С., Артемов В. Е., Руссу С. П. Воздействие подвижных нагрузок на балочный мост, моделируемый системой дискретных элементов // *Строительство. Материаловедение. Машиностроение*. – 2008. – № 47. – С. 494–502. – (Серия «Инновационные технологии жизненного цикла объектов жилищно-гражданского, промышленного и транспортного назначения»).
4. Kirsanov M. N. A Precise Solution of the Task of a Bend in a Lattice Girder with a Random Number of Panels // *Russian Journal of Building Construction and Architecture*. – 2018. – № 1 (37). – P. 92–99.
5. Kirsanov M. N., Shi Kaifei. The formulas for calculating girders with asymmetric triangular lattice // *Научный альманах*. – 2017. – № 3–3 (29). – P. 270–273.

Для связи с авторами:

Михаил Николаевич Кирсанов, 8(495)362-73-14, c216@yandex.ru,
Дмитрий Владимирович Тиньков, 8-926-171-54-92, dvtinkov@yandex.ru