

СТРОИТЕЛЬНАЯ МЕХАНИКА

DOI 10.36622/VSTU.2020.59.3.006

УДК 624.072.336.2

АНАЛИТИЧЕСКИЙ РАСЧЕТ ПРОГИБА ПРОСТРАНСТВЕННОЙ ШАРНИРНО-СТЕРЖНЕВОЙ РАМЫ С ПРОИЗВОЛЬНЫМ ЧИСЛОМ ПАНЕЛЕЙ

М. Н. Кирсанов ¹

*Национальный исследовательский университет «МЭИ»¹
Россия, г. Москва*

¹ Д-р физ.-мат. наук, проф. кафедры робототехники, мехатроники, динамики и прочности машин
тел.: (495)362-73-14; e-mail: c216@ya.ru

Постановка задачи. Ставится задача получить в символьном виде зависимость прогиба предлагаемой схемы статически определимой пространственной фермы регулярного типа от числа панелей при различных нагрузках, в том числе при нагрузке из плоскости фермы. Ферма имеет два независимых параметра, задающие ее пропорции.

Результаты. Для нескольких видов нагружения по формуле Максвелла-Мора выведены аналитические зависимости прогибов конструкции от числа панелей, нагрузки и размеров. При обобщении серии частных решений с заданным числом панелей на произвольное число панелей совместно с операторами системы компьютерной математики *Maple* использован метод индукции. Получены асимптотические приближения решений.

Выводы. Предложенная схема пространственной рамы с двумя независимыми числами панелей, задающими пропорции конструкции, допускает аналитическое решение задачи о прогибе при различных видах нагружения. Выведенные формулы могут быть использованы как тестовые для оценки приближенных численных решений и в задачах оптимизации.

Ключевые слова: пространственная рама, прогиб, двойная индукция, асимптотика, Maple, аналитическое решение.

Введение. Фермы имеют множество преимуществ по сравнению с монолитными или листовыми элементами в строительных конструкциях. Чаще всего в качестве несущих конструкций применяются фермы балочные, арочные и рамы. Если саму конструкцию и нагрузку можно разложить на отдельные независимые плоские задачи, то расчет пространственного сооружения сводится к решению нескольких плоских задач. При этом, как правило, в работе всей конструкции не учитывается работа связей. Чаще всего расчеты пространственных ферм производятся в известных численных пакетах, основанных на методе конечных элементов [11, 12, 15, 19, 20, 22, 23]. Альтернативным направлением исследований работы сооружений является развитие аналитических методов. Аналитические решения, по сравнению с численными, имеют такое преимущество, что они могут быть описаны методами анализа (например, на точки экстремумов, на поиск асимптот, скачков и точек перегиба). Но это касается только тех решений, которые применимы к широкому классу задач.

Если в результате достаточно сложной работы с аналитическими преобразованиями в пакетах символьной математики (*Maple, Mathematica, Maxima, Derive* и др.) получается решение, применимое к какой-то конкретной конструкции и определенной нагрузки, то часто это решение не оправдывает затраченные усилия. Численный метод в этом случае дает все основные необходимые для оценки сооружения значения: прогиб, распределение усилий в стержнях и усилия в критических стержнях. Чем больше параметров входит в расчетную формулу, тем она работоспособнее. Первые достаточно общие формулы для расчета ферм, содержащие в качестве параметров не только размеры и величину нагрузки, но и такую порядковую характеристику регулярных систем как число панелей, появились в середине прошлого века. Известна формула Качурина [6], ряд формул Игнатъева [1, 2], алгоритм Рыбакова для вывода аналитических решений для стержневых плоских и пространственных конструкций, включая сложные статически неопределимые [7, 8].

Актуальность вывода формулы зависимости прогиба пространственной конструкции от числа панелей состоит как в необходимости иметь для расчета и проектирования сооружений простые и надежные тестовые решения для оценки результатов, полученных в численных пакетах, так и для сравнения различных вариантов схем, рассматриваемых в процессе проектирования. Плоские модели ферм не позволяют проанализировать работу конструкции под действием нагрузки из ее плоскости, например, ветровой нагрузки. Именно поэтому в работе предложена и рассмотрена схема конструкции, в которой учтена работа связей.

1. Конструкция рамы. Прямоугольная шарнирно-стержневая рама (trussed frame) имеет m панелей по высоте и $2n$ панелей в ригеле (рис. 1, 2). Длина панели в ригеле равна a , высота – h , ширина – $2b$. Расположим конструкцию в системе координат с началом в опоре A .

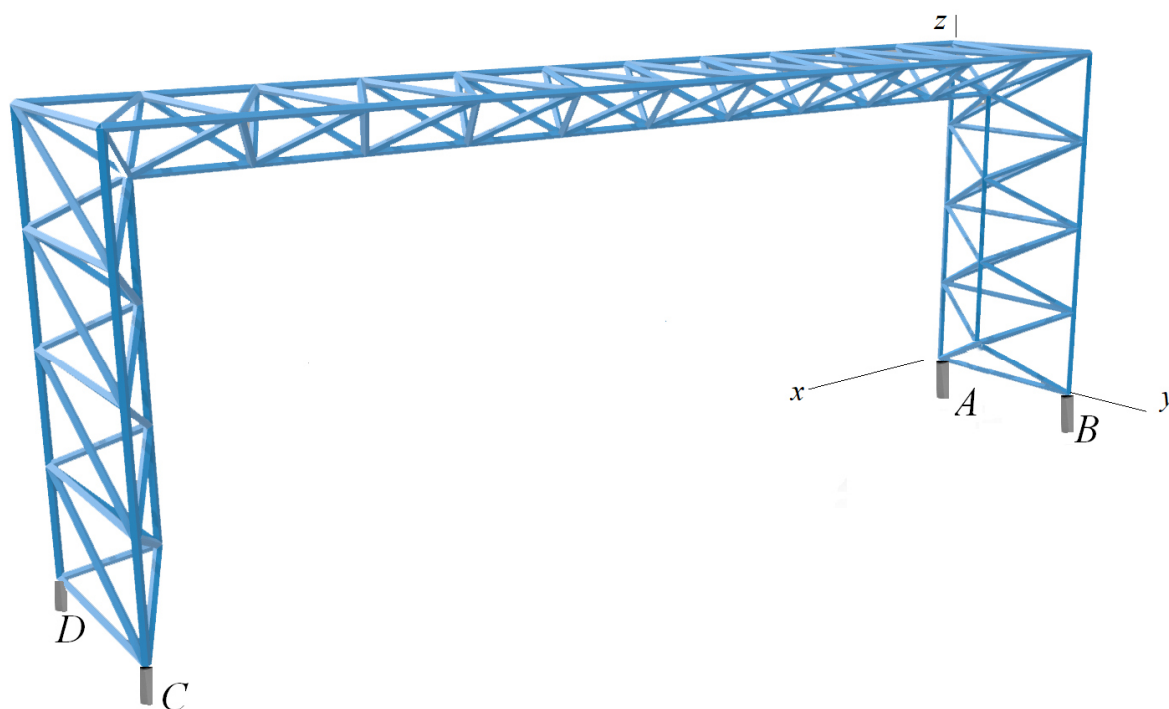


Рис. 1. Ферма при $n = 5, m = 4$:
опоры: A – сферический шарнир, B – цилиндрический, C и D – стойки

Элементами ригеля являются стержневые пирамиды с основанием $a \times 2b$ (рис. 3), соединенные дополнительными продольными горизонтальными связями (стержнями длиной a) по вершинам.

Аналогичные пирамиды с основаниями $2h \times 2b$ составляют симметрично расположенные боковые фермы-стойки высотой $2mh$.

Опорами фермы являются сферический шарнир A , цилиндрический B и две стойки в углах C и D . Всего в ферме $n_s = 18(n + m) + 3$ стержней, не включая опорные.

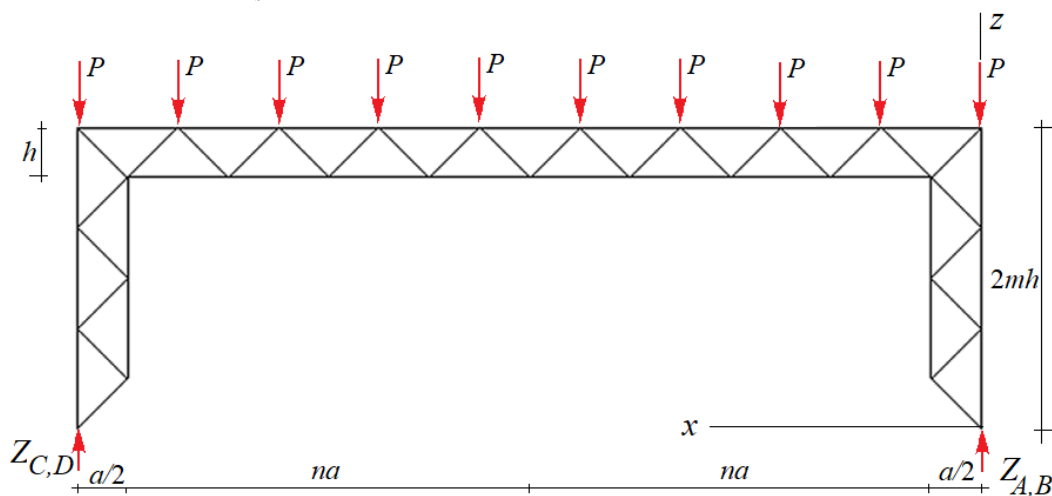


Рис. 2. Проекция на плоскость x - z . Ферма под действием равномерно распределенной нагрузки при $n = 4, m = 3$: P – нагрузка, h, a – размеры, Z_A, Z_B, Z_C, Z_D – вертикальные составляющие реакций опор

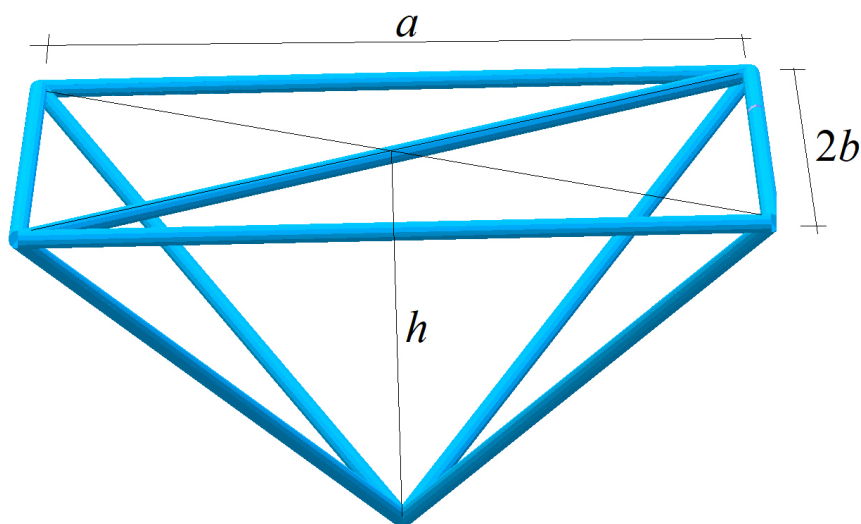


Рис. 3. Стержневой элемент ригеля (панель):
 a – длина панели, $2b$ – ширина, h – высота

Статическую неопределимость, которую создает один лишний опорный стержень (стойка опоры D), можно раскрыть просто, заменяя этот стержень внешней силой, найденной из условия равновесия всей системы в целом. При нагрузке, равномерно распределенной по $4(n+1)$ узлам верхнего пояса, пользуясь симметрией нагрузки и конструкции, получаем усилие $Z_D = P(n+1)$. Таким образом, с учетом этой замены, конструкция определима. Все стержни принимаются упругими, шарниры идеальными.

Расчет прогиба фермы под действием нагрузки производится по формуле Максвелла - Мора. Усилия в стержнях определяются в символьной форме по программе [3], разработанной в системе компьютерной математики *Maple* как для расчета плоских [9, 10, 13, 14, 18, 24], так и пространственных [4, 5] статически определимых ферм. В программу вводятся координаты узлов фермы. Все узлы (шарнирные соединения стержней) нумеруются (рис. 4). Например, координаты узлов опорных ферм имеют вид:

$$\begin{aligned}
 x_i &= 0, y_i = 0, z_i = 2h(i-1), k = 2n+1, \\
 x_{i+m+k+1} &= 2ak, y_{i+m+k+1} = 0, z_{i+m+k+1} = H - 2hi, \\
 x_{i+2m+k+1} &= 0, y_{i+2m+k+1} = 2b, z_{i+2m+k+1} = 2h(i-1), \\
 x_{i+3m+2k+2} &= 2ak, y_{i+3m+2k+2} = 2b, z_{i+3m+2k+2} = H - 2hi, i=1, \dots, m. \\
 m_1 &= 2m+k+1, \\
 x_{i+2m_1} &= a, y_{i+2m_1} = b, z_{i+2m_1} = h(2i-1), \\
 x_{i+5m+6n+4} &= 0, y_{i+5m+6n+4} = b, z_{i+5m+6n+4} = h(2m-2i-a), i=1, \dots, m-1.
 \end{aligned}
 \tag{1}$$

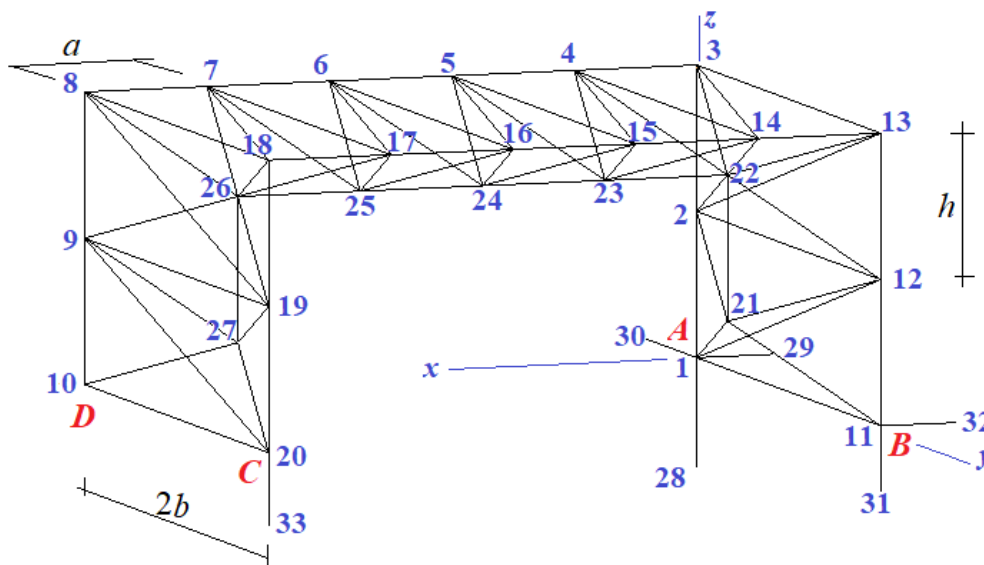


Рис. 4. Оси координат x, y, z , размеры фермы a, b, h , нумерация стержней и узлов при $n = m = 2$

Структура фермы определяется порядком соединения стержней. Для этого вводятся векторы $\vec{V}_i, i=1, \dots, n_s + 6$, с номерами стержней и компонентами, равными номерам концов. Стержни внешних контуров фермы, например, задаются следующими векторами:

$$\vec{V}_i = [i, i+1], \quad \vec{V}_{i+k+2m} = [i+m_1, i+m_1+1], \quad i=1, \dots, m_1-1.$$

2. Решение. Вертикальная нагрузка. Для усилий в стержнях фермы составляется система уравнений всех узлов. Для каждого узла в системе отводится по три уравнения в проекции, соответственно на оси x, y, z . В матрицу G системы входят направляющие косинусы усилий, вычисляемые по координатам трехмерной сетки узлов в соответствии с данными векторов $\vec{V}_i, i=1, \dots, n_s + 6$, включая шесть векторов, моделирующих опоры. В правую часть системы вносятся данные о нагрузке. При равномерном нагружении узлов верхнего пояса ригеля (рис. 4) вектор свободных членов имеет вид $B_{3i} = P, B_{3(i+m_1)} = P, i = m+1, \dots, m+k+1$. Другие компоненты этого вектора нулевые. В компонентах вида B_{3i-2} должны содержаться проекции внешних сил, приложенных к узлу i в проекции на ось x , в компонентах B_{3i-1} – на ось y . Усилия находим из решения $G\vec{S} = \vec{B}$. В системе Maple решение системы линейных уравнений, составленной в матричной форме, удобнее всего искать методом обратной матрицы. На языке Maple это выглядит так же как при работе с числами. Приведем соответствующий фрагмент программы: $G1:=1/G; S:=G1.B$. Здесь $G1$ – обратная матрица, S – вектор неизвестных усилий, B – вектор правых частей системы уравнений. Точкой в Maple обозначается умножение матриц или умножение матрицы на вектор.

Прогиб фермы (вертикальное смещение среднего шарнира в нижнем поясе ригеля) находим по формуле Максвелла-Мора:

$$\Delta = \sum_{j=1}^{n_s} N_j \bar{N}_j l_j / (EF), \quad (2)$$

где N_j – усилия в j -м стержне фермы от приложенной нагрузки, \bar{N}_j – усилие в этом же стержне от единичной вертикальной безразмерной силы, l_j – длина стержня, EF – жесткость стержней.

Рассмотрим случай равномерно распределенной нагрузки из вертикальных сил P , распределенных по узлам верхнего пояса при $h=a$. Последовательно рассчитывая фермы при $m = 1$ и $n = 1, 2, 3, \dots$, видим, что вид решения не зависит от числа панелей:

$$\Delta = P \frac{A_{n,m} a^3 + C_{n,m} c^3 + H_{n,m} b^3}{EFh^2}, \quad (3)$$

где $c = \sqrt{a^2 + b^2 + h^2}$, а коэффициенты при кубах размеров образуют последовательности, общие члены которых можно найти с помощью операторов системы *Maple*. Коэффициенты $A_{n,m}$ при a^3 для $m=1$ имеют следующую числовую последовательность: 28, 198, 752, 2050, 4572, Оператор *rgf_findrecur* находит рекуррентное уравнение, которому удовлетворяют эти числа:

$$A_{n,1} = 5A_{n-1,1} - 10A_{n-2,1} + 10A_{n-3,1} - 5A_{n-4,1} + A_{n-5,1}. \quad (4)$$

Решение этого уравнения дает оператор *rsolve*:

$$A_{n,1} = 5n^4 + 10n^3 + 7n^2 + 4n + 2. \quad (5)$$

Поставленная задача вывода зависимости прогиба от числа панелей двухпараметрическая. На втором этапе необходимо выполнить эти же операции для $m=2, 3, 4, \dots$ ровно столько раз, сколько необходимо, чтобы оператор *rgf_findrecur* дал решение в виде однородного рекуррентного уравнения. Имеем следующие результаты:

$$\begin{aligned} A_{n,2} &= 5n^4 + 10n^3 + 7n^2 + 4n + 4, \\ A_{n,3} &= 5n^4 + 10n^3 + 7n^2 + 6n + 6, \\ A_{n,4} &= 5n^4 + 10n^3 + 7n^2 + 8n + 8, \\ A_{n,5} &= 5n^4 + 10n^3 + 7n^2 + 12n + 10. \end{aligned} \quad (6)$$

Первые три коэффициента в этих формулах не меняются. Последние два обобщаются на произвольное m достаточно просто, без использования операторов *rgf_findrecur* и *rsolve*:

$$A_{n,m} = 5n^4 + 10n^3 + 7n^2 + 2n(m+1) + 2m. \quad (7)$$

Аналогично, но значительно проще, получаются и другие коэффициенты. Они не зависят от числа панелей m по высоте фермы:

$$C_{n,m} = n(n+1), \quad H_{n,m} = n. \quad (8)$$

В случае действия сосредоточенной нагрузки формула для прогиба остается той же. Рекуррентные уравнения упрощаются:

$$A_{n,1} = 4A_{n-1,1} - 6A_{n-2,1} + 4A_{n-3,1} - A_{n-4,1}. \quad (9)$$

Более простой вид имеют и решения:

$$\begin{aligned} A_{n,m} &= 2n^3 + 3n^2 + 3n/2 + m/2 + 1/4, \\ C_{n,m} &= (2n+1)/4, \quad H_{n,m} = 1/4. \end{aligned} \quad (10)$$

3. Боковая нагрузка. Преимуществом пространственной модели конструкции, по сравнению с распространенной приближенной аппроксимацией фермы набором плоских ферм, где связи между ними в работе условно не участвуют, является возможность расчета

таких моделей на произвольную нагрузку, например, на достаточно редко рассматриваемую боковую [16, 17, 25]. Рассмотрим случай нагрузки из горизонтальных сил P , равномерно распределенных по узлам верхнего пояса фермы. Матрица G , полученная при расчете на вертикальную нагрузку, остается прежней. Не меняется и обратная матрица G^{-1} . Правая часть, составленная из сил, направленных по оси y , имеет вид $B_{3(i+m_1)-1} = P$, где $i = m + 1, \dots, m + k + 1$. Сила, приложенная к свободному узлу D вместо реакции несуществующей опоры, определяется из уравнения равновесия (моментов) всей рамы относительно оси x : $Z_D = -Pm(n+1)h/b$. При этом из решения системы уравнений равновесия узлов следуют выражения для реакций опор:

$$Z_C = Z_B = Pm(n+1)h/b, \quad Z_A = Z_D.$$

Формула для прогиба (вертикальное перемещение среднего узла ригеля в нижнем поясе) также получается методом индукции по двум параметрам:

$$\Delta = P \frac{A_{n,m} a^3 + H_{n,m} b^3}{2EFhb}, \quad (11)$$

где

$$\begin{aligned} A_{n,m} &= (n+1)((4m-2)n^2 + (8m-2)n + 2m-1), \\ H_{n,m} &= 2n^2 + (1+2m)n + 2m. \end{aligned} \quad (12)$$

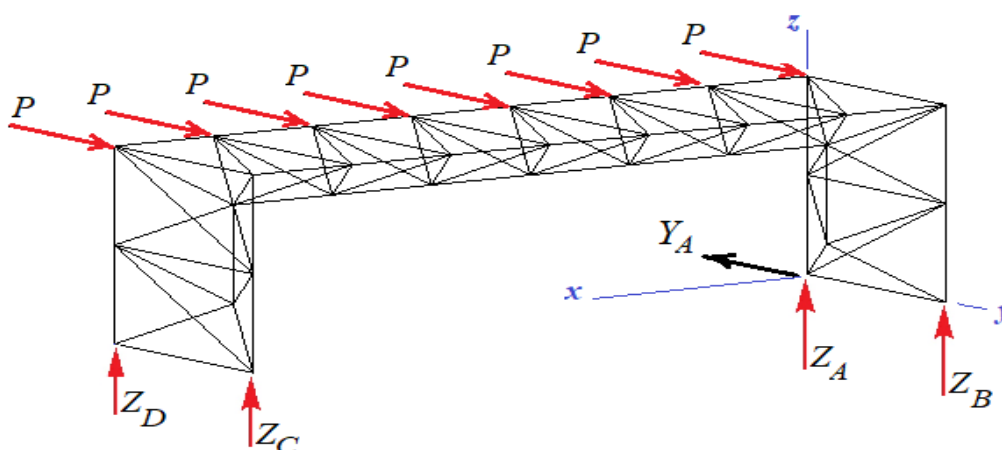


Рис. 5. Ферма в координатах x, y, z . Боковая горизонтальная нагрузка P при $n = 3, m = 2$:

Z_A, Z_B, Z_C, Z_D – вертикальные составляющие реакций опор,
 Y_A – горизонтальная составляющая сферического шарнира

4. Анализ решения. Рассмотрим решение (3) с коэффициентами (7), (8). Зафиксируем величину суммарной нагрузки, не зависящую от числа панелей $P_0 = P(2n+1)$, построим графики зависимости от числа панелей безразмерного прогиба $\Delta' = \Delta EF / (P_0 L)$, где $L = 2an$ – длина пролета (рис. 6). С увеличением числа панелей увеличивается и прогиб. Можно определить, что эта зависимость при $n \rightarrow \infty$ стремится к квадратичной. Действительно, $\lim_{n \rightarrow \infty} \Delta' / n^2 = 5/4$.

Замечен также несколько неожиданный эффект при увеличении поперечного размера b . С увеличением b ферма становится более широкой (размер по оси y), а прогиб растет. Отчасти это можно объяснить тем, что для таких конструкций поперечные связи удлиняются, и в целом ферма становится менее жесткой не за счет продольных стержней, а за счет поперечных.

Такую же асимптотику и приблизительно такие же кривые имеет решение (3) с коэффициентами (10) для сосредоточенной нагрузки.

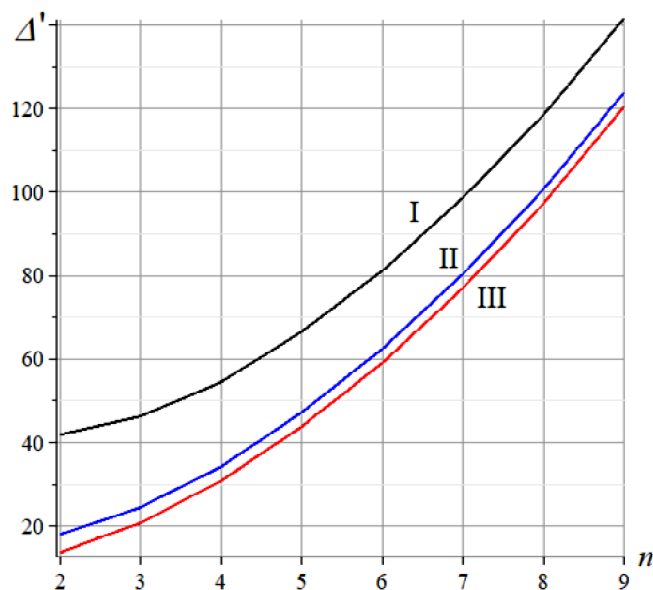


Рис. 6. Прогиб от действия нагрузки по узлам верхнего пояса, $m=10, a=1$ м,
I – $b=4$ м;
II – $b=2$ м;
III – $b=0,5$ м

Значение предельного прогиба получается в системе *Maple* с помощью операции *limit* (*Del, a=infinity*) и имеет вид:

$$\tilde{\Delta} = \frac{(5n^3 + 5n^2 + 2n + 2\sqrt{2}n + 2m)(n+1)}{2n(2n+1)}. \quad (13)$$

Заметим, что эта величина зависит только от числа панелей и не зависит от линейных размеров конструкции. Очевидно, с увеличением n или m значение $\tilde{\Delta}$ неограниченно растет.

Зависимость безразмерного прогиба от размера панели при действии боковой горизонтальной нагрузки, посчитанная по решению (11, 12), имеет явно выраженную горизонтальную асимптоту $\tilde{\Delta}$, ограничивающую решение снизу (рис. 7).

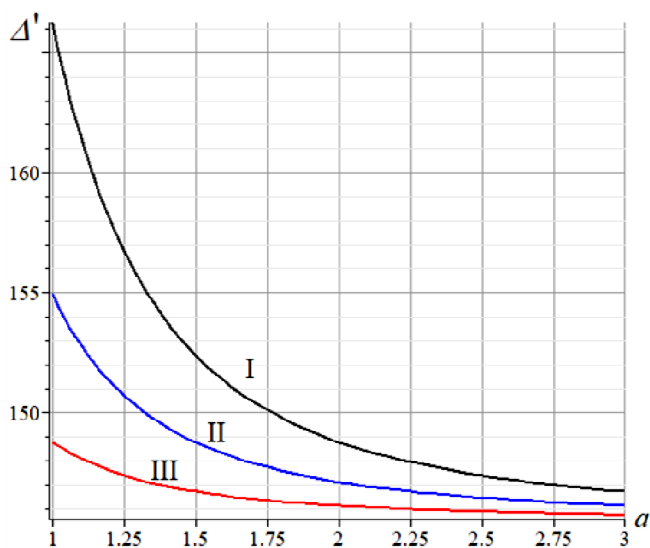


Рис. 7. Зависимость прогиба от размера панели при действии боковой нагрузки, $n=10, m=3$,
I – $b=4$ м; II – $b=3$ м, III – $b=2$ м

Выводы. Предложенная схема пространственной рамы с двумя параметрами, регулирующими число панелей в ригеле и стойках, позволяет применить индуктивный метод для получения основных формул для оценки деформаций конструкции. Эти оценки удобно при-

менять в задачах оптимизации [21] и как тестовые для оценки численных решений [22]. Предложенная схема фермы является новой, аналитические решения для ее прогиба получены впервые.

В процессе вывода формул в системе символьных преобразований, которая работает значительно медленней, чем пакеты, основанные на численных методах, пришлось преодолеть трудность чисто технического порядка. С увеличением числа панелей в ферме время счета резко увеличивалось, а так как индукция в этой задаче была двойная, то требовался либо процессор с хорошими характеристиками, либо значительное время счета. Если сначала индукция проводится по одному параметру за N шагов и на каждый шаг тратится некоторое время t , то индукция по другому параметру за M шагов требует уже время NMt . Решение в данной задаче несколько упрощалось в случаях, когда отдельные коэффициенты не зависели от числа m панелей по высоте – параметра второго этапа индукции. Проверка формул производилась двумя способами – численно или сменой порядка параметров индукции.

Библиографический список

1. **Галишникова, В. В.** Регулярные стержневые системы. Теория и методы расчета / В. В. Галишникова., В. А. Игнатьев. – Волгоград: ВолгГАСУ, 2006. – 551 с.
2. **Игнатьев, В. А.** Расчет регулярных стержневых систем / В. А. Игнатьев – Саратов: Саратовское высшее военно-химическое военное училище, 1973. – 433 с.
3. **Кирсанов, М. Н.** Analytical calculation of the frame with an arbitrary number of panels / М. Н. Кирсанов // Инженерно-строительный журнал. – 2018. – № 6(82). – С. 127–135.
4. **Кирсанов, М. Н.** Прогиб пространственного покрытия с периодической структурой / М. Н. Кирсанов // Инженерно-строительный журнал. – 2017. – № 8(76). – С. 58–66.
5. **Ларичев, С. А.** Индуктивный анализ влияния строительного подъема на жесткость пространственной балочной фермы / С. А. Ларичев // Trends in Applied Mechanics and Mechatronics. – М: Инфра-М. – 2015. – Т. 1. – С. 4-8.
6. Металлические конструкции. В 3 т. Т. 1. Элементы стальных конструкций / В. В. Горев, Б. Ю. Уваров, В. В. Филиппов и др.; Под ред. В. В. Горева. – М.: Высшая школа, 2001. – 551 с.
7. **Рыбаков, Л. С.** Линейная теория плоского призматического каркаса / Л. С. Рыбаков // Известия Российской Академии наук. Сер. Механика твердого тела. – 2001. – № 4. – С. 106–118.
8. **Рыбаков, Л. С.** Линейная теория плоской ортогональной решетки / Л. С. Рыбаков // Известия Российской Академии наук. Сер. Механика твердого тела. – 1999. – № 4. – С. 174–189.
9. **Тиньков, Д. В.** Сравнительный анализ аналитических решений задачи о прогибе ферменных конструкций / Д. В. Тиньков // Инженерно-строительный журнал. – 2015. – № 5(57). – С. 66–73.
10. **Arutyunyan, V. V.** Analytical calculation of the deflection street bracket for advertising / V. V. Arutyunyan // Постулат. – 2019. – 1. – URL: <http://e-postulat.ru/index.php/Postulat/article/download/2300/2340>.
11. **Dong, L.** Mechanical responses of snap-fit Ti-6Al-4V warren-truss lattice structures / L. Dong // International Journal of Mechanical Sciences. – 2020. – Vol. 173. – С. 105460. – URL: <https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2020.105460>.
12. **Galishnikova, V. V.** Geometrically Nonlinear Analysis of Plane Trusses and Frames / V. V. Galishnikova, P. Dunaiski, P. J. Pahl // SUN MeDIA, Stellenbosch (Republic of South Africa), – 2009. – P. 382.
13. **Ilyushin, A. S.** The formula for calculating the deflection of a compound externally statically indeterminate frame / A. S. Ilyushin // Строительная механика и конструкции. – 2019. – Том. 3. – №. 22. – P. 29–38.
14. **Kirsanov, M. N.** Planar Trusses: Schemes and Formulas / M. N. Kirsanov. – Cambridge Scholars Publishing, 2019. – 198 p.
15. **Mathieson, C.** Failure mechanism and bearing capacity of cold-formed steel trusses with HRC connectors / C. Mathieson, K. Roy K., G. Clifton, A. Ahmadi, J. B. P. Lim // Engineering Structures. – 2019. – Т. 201. – С. 109741. Failure mechanism and bearing capacity of cold-formed steel trusses with HRC connectors <https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2019.109741>.
16. **Petersen, O. W.** Investigation of dynamic wind loads on a long-span suspension bridge identified from measured acceleration data / O. W. Petersen, O. Oiseth, E. Lourens // Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics. – 2020. – Vol. 196. – P. 104045. – URL: <https://doi.org/10.1016/j.jweia.2019.104045>.
17. **Qin, H.** System fragility analysis of roof cladding and trusses for Australian contemporary housing subjected to wind uplift / H. Qin, M. G. Stewart // Structural Safety. – 2019. – Т. 79. – С. 80-93. – URL: <https://doi.org/10.1016/j.strusafe.2019.03.005>.

18. **Rakhmatulina, A. R.** The dependence of the deflection of the arched truss loaded on the upper belt, on the number of panels / A. R. Rakhmatulina, A. A. Smirnova // Научный Альманах. – 2017. – No. 2-3(28). – P. 268–271.
19. **Rybakov, V. A.** Stress-state elements frame structures from thin-walled rods / V. A. Rybakov, O. S. Gamayunova // Construction of Unique Buildings and Structures. – 2013. – № 7(12). – С. 79–123.
20. **Rybakov, V. A.** Bearing capacity of rafter systems made of steel thin-walled structures in attic roofs / V. A. Rybakov, A. M. Al, A. P. Pantelev, K. A. Fedotova, A. V. Smirnov // Инженерно-строительный журнал. – 2017. – № 8. – С. 28–39.
21. **Tinkov, D. V.** Design Optimization of Truss Bridge Structures of Composite Materials / D. V. Tinkov, A. A. Safonov // Journal of Machinery Manufacture and Reliability. – 2017. – Vol. 46. – № 1. – P. 46–52.
22. **Vatin, N. I.** Thin-walled cross-sections and their joints: tests and fem-modelling / N. I. Vatin, J. Havula, L. Martikainen, A. S. Sinelnikov, A. V. Orlova, S. V. Salamakhin // Advanced Materials Research. – 2014. – No. 945–949. – С. 1211–1215.
23. **Villegas, L.** Combined culm-slat Guadua bamboo trusses / L. Villegas, R. Moran, J. J. Garcia // Engineering Structures. – 2019. – T. 184. – С. 495–504. – URL: <https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2019.01.114>.
24. **Voropay, R. A.** Analytical solution of the problem of shifting a movable support of a truss of arch type in the Maple system / R. A. Voropay, E. V. Domanov // Постулат. – 2019. – № 1. – URL: <http://e-postulat.ru/index.php/Postulat/article/download/2345/2386>.
25. **Zhou, Q.** Investigation on wind loads on angle-steel cross-arms of lattice transmission towers via direct force measurement / Q. Zhou, B. Ma, Q. Zhu, H. Zhang // Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics. – 2019. – Vol. 191. – P. 117–126.

References

1. **Galishnikova, V. V.** Reguljarnye sterzhnevye sistemy. Teoriya i metody rascheta / V. V. Galishnikova, V. A. Ignat'ev. – Volgograd: VolGGASU, 2006. – 551 s.
2. **Ignat'ev, V. A.** Raschet reguljarnykh sterzhnevnykh sistem / V. A. Ignat'ev – Saratov: Saratovskoe vysshee voenno-khimicheskoe voennoe uchilishche, 1973. – 433 s.
3. **Kirsanov, M. N.** Analytical calculation of the frame with an arbitrary number of panels / M. N. Kirsanov // Inzhenerno-stroitel'nyi zhurnal. – 2018. – № 6(82). – S. 127–135.
4. **Kirsanov, M. N.** Progib prostranstvennogo pokrytiya s periodicheskoj strukturoj / M. N. Kirsanov // Inzhenerno-stroitel'nyi zhurnal. – 2017. – № 8(76). – S. 58–66.
5. **Larichev, S. A.** Induktivnyi analiz vliyaniya stroitel'nogo pod"ema na zhestkost' prostranstvennoj balochnoj fermy / S. A. Larichev // Trends in Applied Mechanics and Mechatronics. – M: Infra-M. – 2015. – T. 1. – S. 4–8.
6. Metallicheskie konstruksii. V 3 t. T. 1. Ehlementy stal'nykh konstruksii / V. V. Gorev, B. Yu. Uvarov, V. V. Filippov i dr.; Pod red. V. V. Goreva. – M.: Vysshaya shkola, 2001. – 551 s.
7. **Rybakov, L. S.** Lineinaya teoriya ploskogo prizmaticheskogo karkasa / L. S. Rybakov // Izvestiya Rossijskoi Akademii nauk. Ser. Mekhanika tverdogo tela. – 2001. – № 4. – S. 106–118.
8. **Rybakov, L. S.** Lineinaya teoriya ploskoi ortogonal'noi reshetki / L. S. Rybakov // Izvestiya Rossijskoi Akademii nauk. Ser. Mekhanika tverdogo tela. – 1999. – № 4. – S. 174–189.
9. **Tin'kov, D. V.** Sravnitel'nyi analiz analiticheskikh reshenii zadachi o progibe fermennykh konstruksii / D. V. Tin'kov // Inzhenerno-stroitel'nyi zhurnal. – 2015. – № 5(57). – S. 66–73.
10. **Arutyunyan, V. B.** Analytical calculation of the deflection street bracket for advertising / V. B. Arutyunyan // Postulat. – 2019. – 1. – URL: <http://e-postulat.ru/index.php/Postulat/article/download/2300/2340>.
11. **Dong, L.** Mechanical responses of snap-fit Ti-6Al-4V warren-truss lattice structures / L. Dong // International Journal of Mechanical Sciences. – 2020. – Vol. 173. – S. 105460. – URL: <https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2020.105460>.
12. **Galishnikova, V. V.** Geometrically Nonlinear Analysis of Plane Trusses and Frames / V. V. Galishnikova, P. Dunaiski, P. J. Pahl // SUN MeDIA, Stellenbosch (Republic of South Africa), – 2009. – P. 382.
13. **Ilyushin, A. S.** The formula for calculating the deflection of a compound externally statically indeterminate frame / A. S. Ilyushin // Stroitel'naya mekhanika i konstruksii. – 2019. – Tom. 3. – № . 22. – P. 29–38.
14. **Kirsanov, M. N.** Planar Trusses: Schemes and Formulas / M. N. Kirsanov. – Cambridge Scholars Publishing, 2019. – 198 p.
15. **Mathieson, C.** Failure mechanism and bearing capacity of cold-formed steel trusses with HRC connectors / C. Mathieson, K. Roy K., G. Clifton, A. Ahmadi, J. B. P. Lim // Engineering Structures. – 2019. – T. 201. – S. 109741. Failure mechanism and bearing capacity of cold-formed steel trusses with HRC connectors <https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2019.109741>.
16. **Petersen, O. W.** Investigation of dynamic wind loads on a long-span suspension bridge identified from measured acceleration data / O. W. Petersen, O. Oiseth, E. Lourens // Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics. – 2020. – Vol. 196. – P. 104045. – URL: <https://doi.org/10.1016/j.jweia.2019.104045>.

17. **Qin, H.** System fragility analysis of roof cladding and trusses for Australian contemporary housing subjected to wind uplift / H. Qin, M. G. Stewart // *Structural Safety*. – 2019. – Т. 79. – С. 80-93. – URL: <https://doi.org/10.1016/j.strusafe.2019.03.005>
18. **Rakhmatulina, A. R.** The dependence of the deflection of the arched truss loaded on the upper belt, on the number of panels / A. R. Rakhmatulina, A. A. Smirnova // *Nauchnyi Al'manakh*. – 2017. – No. 2-3(28). – P. 268–271.
19. **Rybakov, V. A.** Stress-state elements frame structures from thin-walled rods / V. A. Rybakov, O. S. Gamayunova // *Construction of Unique Buildings and Structures*. – 2013. – № 7(12). – С. 79–123.
20. **Rybakov, V. A.** Bearing capacity of rafter systems made of steel thin-walled structures in attic roofs / V. A. Rybakov, A. M. Al, A. P. Pantelev, K. A. Fedotova, A. V. Smirnov // *Inzhenerno-stroitel'nyi zhurnal*. – 2017. – № 8. – С. 28–39.
21. **Tinkov, D. V.** Design Optimization of Truss Bridge Structures of Composite Materials / D. V. Tinkov, A. A. Safonov // *Journal of Machinery Manufacture and Reliability*. – 2017. – Vol. 46. – № 1. – P. 46–52.
22. **Vatin, N. I.** Thin-walled cross-sections and their joints: tests and fem-modelling / N. I. Vatin, J. Havula, L. Martikainen, A. S. Sinelnikov, A. V. Orlova, S. V. Salamakhin // *Advanced Materials Research*. – 2014. – No. 945–949. – С. 1211–1215.
23. **Villegas, L.** Combined culm-slat Guadua bamboo trusses / L. Villegas, R. Moran, J. J. Garcia // *Engineering Structures*. – 2019. – Т. 184. – С. 495-504. – URL: <https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2019.01.114>.
24. **Voropay, R. A.** Analytical solution of the problem of shifting a movable support of a truss of arch type in the Maple system / R. A. Voropay, E. V. Domanov // *Postulat*. – 2019. – № 1. – URL: <http://e-postulat.ru/index.php/Postulat/article/download/2345/2386>.
25. **Zhou, Q.** Investigation on wind loads on angle-steel cross-arms of lattice transmission towers via direct force measurement / Q. Zhou, B. Ma, Q. Zhu, H. Zhang // *Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics*. – 2019. – Vol. 191. – P. 117-126.

ANALYTICAL CALCULATION OF THE DEFLECTION OF A SPATIAL HINGE-ROD FRAME WITH AN ARBITRARY NUMBER OF PANELS

M. N. Kirsanov¹

*National Research University «Moscow Power Engineering University»¹
Russia, Moscow*

¹ D. Sc. in Physics and Mathematics, Prof. of the Dept. of Robotics, Mechatronics, Dynamics and Strength of Machinery, tel.: (495)362-73-14, e-mail: c216@ya.ru

Statement of the problem. The task is to obtain in symbolic form the dependence of the deflection of the proposed scheme of a statically definable spatial truss of a regular type on the number of panels under various loads, including the load from the truss plane. A truss has two independent parameters that define its proportions.

Results. For several types of loading according to the Maxwell - Mohr formula, analytical dependences of the deflections of the structure on the number of panels, load, and dimensions are derived. When generalizing a series of partial solutions with a given number of panels to an arbitrary number of panels, together with operators of the Maple computer mathematics system, the induction method is used. Asymptotic approximations of solutions are obtained.

Conclusions. The proposed model of a spatial frame with two independent numbers of panels that define the proportions of the structure allows an analytical solution of the problem of deflection under different types of loading. The derived formulas can be used as test formulas for evaluating approximate numerical solutions and for optimization problems.

Keywords: spatial frame, deflection, double induction, asymptotics, Maple, analytical solution.