

УДК 624.31,004.942

DOI: 10.24160/1993-6982-2021-4-122-128

Аналитические оценки деформаций и собственных частот опор линий электропередач

М.Н. Кирсанов, О.В. Воробьев

Цель исследования — вывод аналитических зависимостей оценок нижней частоты колебаний плоских моделей ферм опор линий электропередач.

Усилия в стержнях статически определимых конструкций установлены методом вырезания узлов в программе, составленной на языке символьной математики Maple. Для поиска деформаций использована формула Максвелла–Мора в предположении, что все стержни упругие, а опоры моделируются жесткими стержнями. Принято, что шарниры — идеальные, а масса конструкции в виде точечных грузов распределена по узлам фермы, перемещения грузов рассматриваются лишь горизонтальные. По сравнению с аналогичными постановками задач с аналитическими формами решения в настоящей работе учтены массы во всех узлах конструкции. Для двухсторонней оценки первой частоты взяты методы Донкерлея и Рэлея. Коэффициенты формул в решениях, полученных для ферм с различным числом панелей, образуют последовательности, общие члены которых из решения линейных рекуррентных уравнений дают итоговую формулу зависимости частоты от числа панелей.

Результатом работы стали выведенные формулы для прогиба и оценки основной частоты собственных колебаний фермы в зависимости от числа панелей и размеров конструкции. Область применения — инженерные расчеты опор линий электропередач.

Формулы для прогиба и частот исследуемых ферм имеют достаточно простой и удобный для применения вид (в частности, для оценки точности численных решений). Частота, полученная по методу Рэлея, значительно ближе к первой собственной частоте, чем по методу Донкерлея.

Ключевые слова: опора линий электропередач, число панелей, нижняя оценка частоты, методы Донкерлея и Рэлея.

Для цитирования: Кирсанов М.Н., Воробьев О.В. Аналитические оценки деформаций и собственных частот опор линий электропередач // Вестник МЭИ. 2021. № 4. С. 122—128. DOI: 10.24160/1993-6982-2021-4-122-128.

Analytical Assessments of Deformations and Natural Frequencies of Transmission Line Supports

M.N. Kirsanov, O.V. Vorob'yev

The purpose of the study is to derive analytical expressions for estimating the lower vibration frequency of the power line support truss flat models. The forces in the bars of statically determinate structures are determined by the method of cutting out nodes in a program written in the Maple symbolic mathematics language. To find deformations, the Maxwell-Mohr's formula is used under the assumption that all rods are elastic, and that the supports are modeled by rigid rods. It is supposed that the hinges are ideal, and the mass of the structure in the form of point loads is distributed over the truss nodes, and only horizontal load displacements are considered. In comparison with similar problem statements with analytical forms of solution, the present study takes into account the masses at all nodes of the structure. For two-sided estimation of the fundamental frequency, the methods of Dunkerley and Rayleigh are used. The coefficients of the formulas in the solutions obtained for trusses with different numbers of panels form sequences, the common terms of which from the solution of linear recurrent equations give the final formula for the frequency dependence on the number of panels. As a result of the study, formulas for deflection and estimation of the fundamental frequency of truss natural vibration depending on the number of panels and dimensions of the structure have been derived. The obtained formulas can be used in carrying out engineering analyses of power transmission line supports. The formulas for the deflection and frequencies of the studied trusses have a form simple and convenient for use (in particular, for assessing the accuracy of numerical solutions). The frequency obtained by the Rayleigh method is much closer to the fundamental natural frequency than its value estimated using the Dunkerley method.

Key words: power transmission line support, number of panels, lower frequency estimate, Dunkerley method, Rayleigh method.

For citation: Kirsanov M.N., Vorob'yev O.V. Analytical Assessments of Deformations and Natural Frequencies of Transmission Line Supports. Bulletin of MPEI. 2021;4:122—128. (in Russian). DOI: 10.24160/1993-6982-2021-4-122-128.

Состояние вопроса

Замена пространственных ферм плоскими моделями широко практикуется в инженерных расчетах [1 — 7]. Разложением нагрузок (в том числе инерционных) по плоскостям пространственной схемы трехмерную задачу можно свести к нескольким задачам о деформациях и напряженном состоянии плоских ферм. На практике для расчетов ферм, как правило, применяют численные методы, основанные на методе

конечных элементов [8 — 11]. Также хорошим подспорьем являются аналитические оценки, полученные для упрощенных моделей реальной конструкции. Большая часть существующих аналитических решений для ферм относится к регулярным структурам. Вероятно, первым на этом направлении был профессор В.А. Игнатъев [12]. Проблемы существования и расчета статически определимых регулярных стержневых конструкций, используемых не только в строительстве,

машиностроении, авиации и космонавтике, но и при проектировании структур композитных и нанокompозитных материалов с заданными свойствами, рассмотрены в [13 — 16]. Схемы статически определимых плоских регулярных ферм, включая внешне статически неопределимых, и формулы для расчета их деформаций и усилий в критических по отношению к выпучиванию и потере прочности стержнях в зависимости от числа панелей содержатся в [17, 18].

Постановка задачи

Методом индукции с использованием системы символьной математики Maple выведены нижняя и верхняя аналитические оценки первой частоты колебаний плоской модели опоры линий электропередач с произвольным числом панелей (рис. 1). Аналогичные формулы для плоских балочных и арочных ферм получены в [19 — 23].

Предполагается, что масса плоской статически определимой фермы с n панелями с крестообразной решеткой сосредоточена по ее узлам. Ферма имеет две неподвижные опоры, все шарниры идеальные, стержни испытывают только сжимающие или растягивающие усилия. Всего в ферме $K = 4n + 6$ стержней, включая четыре стержня, моделирующих неподвижные шарнирные опоры. Они предполагаются недеформируемыми. В задаче определения частот рассматриваются горизонтальные смещения масс.

Методы решения

Расчет усилий. Данные о геометрии фермы заданы в программе координатами ее узлов. Узлы (шарниры) пронумерованы (см. рис. 1). Начало координат размещено в левой опоре. На языке Maple [21] ввод координат имеет вид:

```
> for i to n+1 do
> y[i]:= h*i - h:   x[i]:= a:
> y[i+n+1]:= y[i]: x[i+n+1]:=0:
> od:
> x[K-4]:= a/2:   y[K-4]:= n*h+h/2:
```

Порядок соединения стержней в узлах фермы определен специальными упорядоченными списками $\mathbf{N}[i]$, $i = 1, \dots, K$, содержащими номера узлов на концах соответствующих стержней:

```
> for j to n do
> N[j]:= [j, j+1];   N [j+n]:= [j+n+1, j+2+n];
> N[j+2*n]:= [j, j+2+n]; N[j+3*n]:= [j+n+1, j+1];
> od:
> N[4*n+1]:= [n+1, 2*n+3]; N[4*n+2]:= [2*n+2, 2*n+3]:
```

Усилия в стержнях находятся вместе с реакциями опор из решения общей системы уравнений равновесия узлов. Уравнения составляются и решаются в матричном виде. Матрица системы состоит из направляющих косинусов усилий в стержнях, вычисленных по

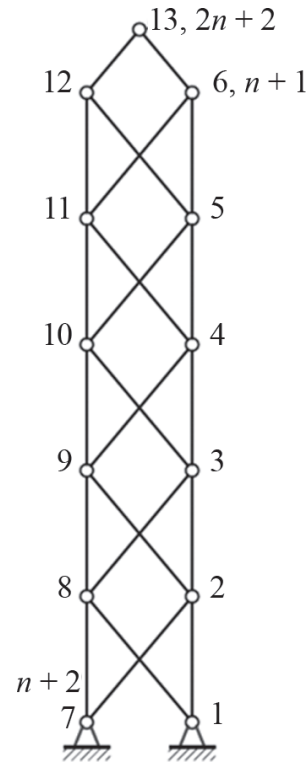


Рис. 1. Ферма, нумерация узлов $n = 5$

данным о структуре и координатам узлов. Для вывода искоемых формул усилия получают в символьном виде.

Уравнение частот. Запишем уравнения движения системы точечных масс в матричной форме:

$$\mathbf{M}_N \ddot{\mathbf{Y}} + \mathbf{D}_N \mathbf{Y} = 0, \tag{1}$$

где $\mathbf{Y} = [y_1, y_2, \dots, y_N]^T$ — вектор горизонтальных перемещений масс $1, \dots, N$; $N = 2n + 1$ — число степеней свободы; \mathbf{M}_N — инерционная матрица размером $N \times N$; \mathbf{D}_N — матрица жесткости; $\ddot{\mathbf{Y}}$ — вектор ускорений.

Поскольку массы приняты одинаковыми, матрица инерции имеет диагональный вид: $\mathbf{M}_N = m\mathbf{I}_N$. Матрица податливости \mathbf{B}_N , обратная матрице жесткости \mathbf{D}_N , определяется по формуле Максвелла–Мора:

$$b_{i,j} = \sum_{\alpha=1}^{K-4} S_{\alpha}^{(i)} S_{\alpha}^{(j)} l_{\alpha} / (EF),$$

где $S_{\alpha}^{(i)}$ — усилие в стержне α от действия единичной горизонтальной силы, приложенной к узлу i ; l_{α} — длина стержня α ; EF — жесткость стержней.

В сумму не вошли четыре недеформируемые опорные стержня.

Умножение уравнения (1) слева на матрицу податливости \mathbf{B}_N дает уравнение:

$$m\mathbf{B}_N \mathbf{I}_N \ddot{\mathbf{Y}} + \mathbf{Y} = 0. \tag{2}$$

Представим форму колебаний в стандартном для таких задач виде $y_k = u_k \sin(\omega t + \varphi_0)$, где ω — собственная частота колебаний, и получим соотношение $\ddot{\mathbf{Y}} = -\omega^2 \mathbf{Y}$.

Отсюда из (2) имеем: $\mathbf{B}_N \mathbf{Y} = \lambda \mathbf{Y}$.

Выразим частоту колебаний через собственные числа матрицы \mathbf{B}_N : $\lambda = 1/(m\omega^2)$.

Таким образом, задача сводится к проблеме собственных чисел матрицы податливости, состоящей из направляющих косинусов усилий в стержнях. В системе Maple собственные числа матрицы дает специальный оператор *Eigenvalues* из пакета LinearAlgebra. Частоты колебаний выражаются через собственные числа матрицы $\omega = \sqrt{1/(m\lambda)}$. Наименьшей будет первая частота, ниже значение которой следует найти и получить аналитическую двухстороннюю оценку.

Оценка снизу. Метод Донкерлея. По формуле Донкерлея нижняя оценка главной частоты колебаний имеет вид:

$$\omega_D^{-2} = \sum_{i=1}^N \omega_i^{-2},$$

где ω_i — частота колебания груза массой m , расположенного в узле i верхнего пояса.

Уравнение колебаний (1) одной массы имеет вид:

$$m\ddot{y}_i + d_i y_i = 0,$$

где y_i, \dot{y}_i — вертикальное смещение и ускорение массы; d_i — коэффициент жесткости (i — номер массы), находящийся на главной диагонали матрицы \mathbf{B}_N .

Частота собственных колебаний отдельной массы равна $\omega_i = \sqrt{d_i/m}$. Коэффициент жесткости имеет вид:

$$\delta_i = 1/d_i = \sum_{\alpha=1}^{K-4} (S_{\alpha}^{(i)})^2 l_{\alpha} / (EF).$$

Здесь $S_{\alpha}^{(i)}$ — усилия в стержне с номером α от действия единичной вертикальной силы, приложенной к узлу с массой i . Номер массы соответствует i -му элементу списка вершин:

$$[\text{seq}(j, j = 2..n+1), \text{seq}(j, j = n+3..2*n+3)].$$

Расчет ферм с различным числом панелей n дает общий вид формулы для определения нижней оценки ω_D . Для произвольного числа панелей:

$$\omega_D^{-2} = m \sum_{i=1}^N \delta_i = m(C_1 c^3 + C_2 h^3) / (a^2 EF), \quad (3)$$

где обозначена длина диагональных элементов фермы $c = \sqrt{a^2 + h^2}$.

Коэффициенты $C_1(n), C_2(n)$ зависят только от числа панелей и определяются методом индукции. Сначала выписываются последовательности решений задач для ферм с числом панелей $n = 1, 2, 3, \dots$:

$$\begin{aligned} \omega_{D,1}^{-2} &= m(11c^3 + 16h^3) / (4a^2 EF); \\ \omega_{D,2}^{-2} &= m(29c^3 + 96h^3) / (4a^2 EF); \end{aligned}$$

$$\omega_{D,3}^{-2} = 5m(11c^3 + 64h^3) / (4a^2 EF);$$

$$\omega_{D,4}^{-2} = m(89c^3 + 800h^3) / (4a^2 EF);$$

...

Длина последовательности должна быть достаточной для нахождения общего члена. Оператор *rgf_findrecur* из пакета *genfunc* системы Maple дает линейные однородные рекуррентные уравнения, из которых можно найти искомые зависимости. При определении коэффициента C_1 имеем рекуррентное уравнение, которому удовлетворяет общий член:

$$C_{1,n} = 3C_{1,n-1} - 3C_{1,n-2} + C_{1,n-3}. \quad (4)$$

Его решение дает оператор *rsolve*:

$$C_1 = (24n^2 + 6n + 1) / 4.$$

Из уравнения пятого порядка

$$C_{2,n} = 5C_{2,n-1} - 10C_{2,n-2} + 10C_{2,n-3} - 5C_{2,n-4} + C_{2,n-5} \quad (5)$$

найдем и другой коэффициент в (3):

$$C_2 = n(n+1)^2(n+2) / 3. \quad (6)$$

Оценка сверху по Рэлею. Верхняя оценка первой частоты колебаний фермы по Рэлею имеет вид:

$$\omega_R^2 = \sum_{k=1}^N u_k / \sum_{k=1}^N m u_k^2 = \delta_1 / (m \delta_2), \quad (7)$$

где суммирование проходит по всем массам, а

$$u_k = \sum_{i=1}^{K-4} S_i^{(P)} S_i^{(k)} l_i / (EF)$$

— амплитуда смещения массы с номером k под действием единичной распределенной нагрузки, приложенной горизонтально ко всем узлам конструкции.

Суммирование проведем по всем деформируемым стержням фермы. Отдельно вычислим суммы перемещений в числителе и квадратов перемещений в знаменателе (7). Для различных значений числа панелей последовательно получим следующие выражения числителей (7):

$$\delta_{1,1} = 8h^3 + 19c^3 / 4;$$

$$\delta_{1,2} = 80h^3 + 69c^3 / 4;$$

$$\delta_{1,3} = 368h^3 + 167c^3 / 4;$$

$$\delta_{1,4} = 1168h^3 + 329c^3 / 4;$$

...

В общем виде числитель (7) имеет вид:

$$\delta_1 = (C_1 h^3 + C_2 c^3) / a^2.$$

Общие члены последовательностей коэффициентов определяются из решения рекуррентных уравнений и выглядят как:

$$\begin{aligned} C_1 &= 2n(n+2)(n+1)(3n^2+6n+1)/15; \\ C_2 &= (8n^3+24n^2+22n+3)/12. \end{aligned} \quad (8)$$

Выражение в знаменателе (7) для разных значений n имеет вид:

$$\begin{aligned} \delta_{2,1} &= 24h^6 + 26h^3c^3 + 121c^6/16; \\ \delta_{2,2} &= 1656h^6 + 618h^3c^3 + 1001c^6/16; \\ \delta_{2,3} &= 26616h^6 + 5126h^3c^3 + 4305c^6/16; \\ \delta_{2,4} &= 215896h^6 + 25558h^3c^3 + 13233c^6/16; \\ &\dots \end{aligned}$$

Обобщим данные выражения на произвольный случай:

$$\delta_2 = (B_1h^6 + B_2c^6 + B_3c^3h^3) / a^2,$$

где

$$\begin{aligned} B_1 &= n(2n+1)(n+2)(n+1) \times \\ &\times (182n^5 + 1001n^4 + 1717n^3 + 889n^2 - 9) / 2835; \\ B_2 &= (2n+3)(2n+1)(16n^3 + 48n^2 + 52n + 5) / 240; \\ B_3 &= n(n+2)(n+1) \times \\ &\times (148n^4 + 592n^3 + 784n^2 + 279n + 17) / 420. \end{aligned} \quad (9)$$

Труднее всего оказалось установить коэффициент при h^6 . Для этого потребовалось составить и решить рекуррентное уравнение 10-го порядка:

$$\begin{aligned} B_{1,n} &= 10B_{1,n-1} - 45B_{1,n-2} + 120B_{1,n-3} - \\ &- 210B_{1,n-4} + 252B_{1,n-5} - 210B_{1,n-6} + \\ &+ 120B_{1,n-7} - 45B_{1,n-8} + 10B_{1,n-9} - B_{1,n-10}. \end{aligned}$$

В практике вывода аналогичных формул [19 — 23] подобные сложные уравнения бывают редко. Обычно коэффициенты рекуррентных уравнений для вывода общих членов являются биномиальными коэффициентами, такими как в (4), (5).

Результаты

Формула (3) с достаточно простыми коэффициентами полиномиального типа (5), (6) представляет собой оценку снизу первой собственной частоты колебаний опоры, а (7) с коэффициентами (8), (9) — оценку сверху. Решим задачу о колебании опоры с массами $m = 200$ кг, распределенными по узлам фермы в зависимости от числа панелей и размеров фермы. Рассмотрим в качестве примера ферму с длиной основания $a = 3$ м. Жесткость стальных стержней фермы — $EF = 0,2 \cdot 10^8$ Н. С увеличением числа панелей растет и длина фермы, а частота колебаний монотонно уменьшается. Для фермы с большей высотой hn , у которой жесткость меньше, частота также меньше (рис. 2).

Графики кривых полученных решений и решения, найденного численно из задачи о колебании системы со многими степенями свободы (задачи на собствен-

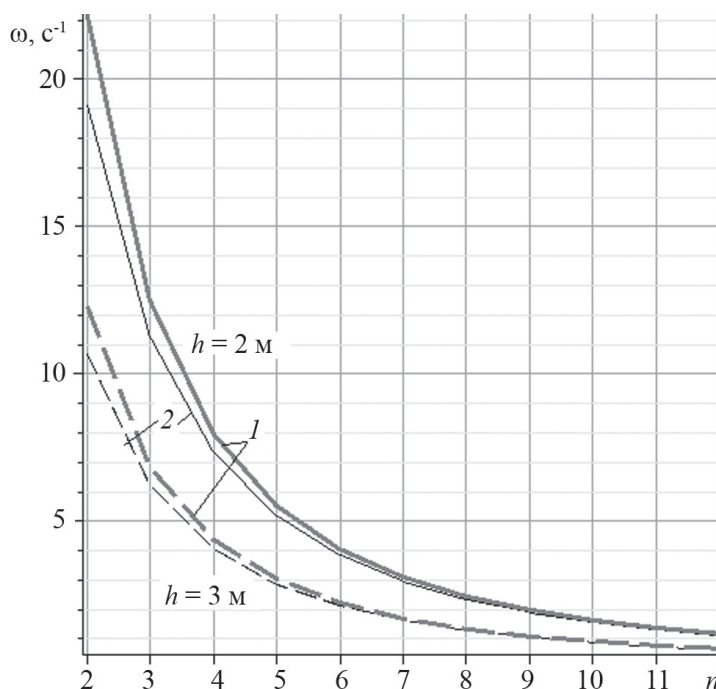


Рис. 2. Первая собственная частота в зависимости от числа панелей:
1 — численное решение и оценка Рэлея; 2 — оценка Донкерле

ные значения уравнения $\mathbf{B}_N \mathbf{Y} = \lambda \mathbf{Y}$, показывают, что точность верхней оценки по Рэлею весьма высока. Соответствующие кривые сливаются на графике.

Погрешности относительных оценок рассчитаем по формулам $\varepsilon^D = |\omega_D - \omega_1|/\omega_1$, $\varepsilon^R = |\omega_R - \omega_1|/\omega_1$. Погрешность оценки Донкерлея достигает 12% для опор не-

большой высоты (рис. 3). С увеличением числа панелей погрешность монотонно уменьшается. Точность верхней оценки первой собственной частоты по Рэлею значительно больше. Наибольшее значение погрешности при заданных размерах и массах меньше 0,5% получается для опоры с тремя панелями (рис. 4).

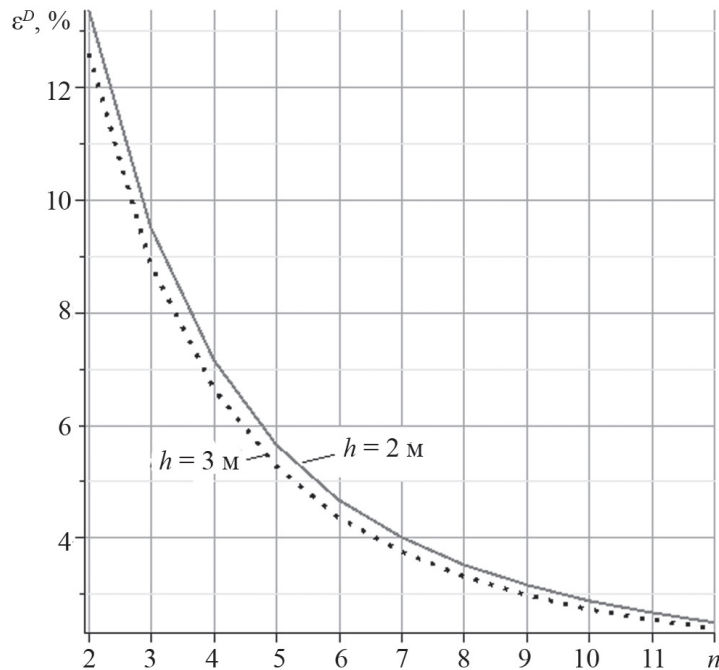


Рис. 3. Относительная погрешность оценки по Донкерлею в зависимости от числа панелей

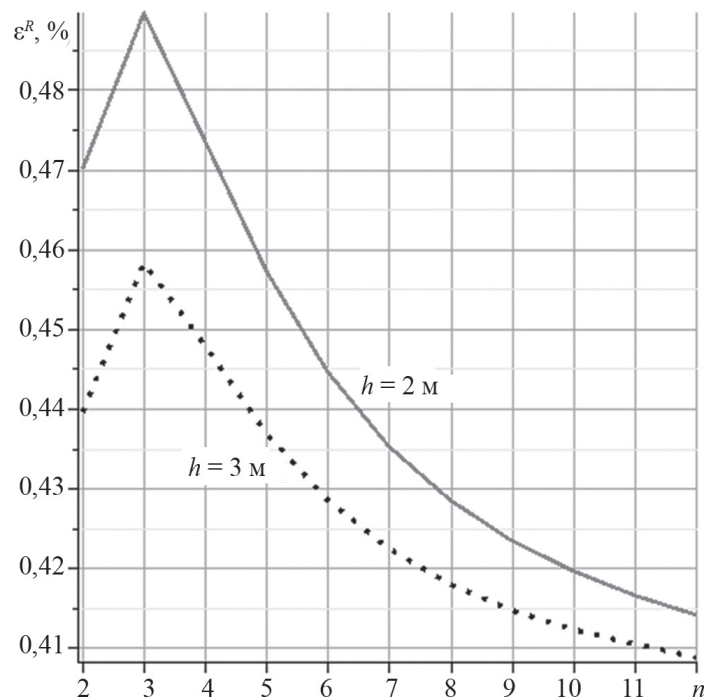


Рис. 4. Относительная погрешность оценки по Рэлею в зависимости от числа панелей

Выводы

Приведены два алгоритма для получения аналитических зависимостей верхней и нижней оценок первой частоты колебаний модели фермы опоры линий электропередач от размеров фермы и числа панелей. Включение в итоговую формулу указанного параметра существенно расширяет область применения результата, который может быть использован как для черного

расчета системы, так и для проверки численных решений, полученных в какой-либо специализированной программе расчета. Алгоритмы вывода формул основаны на методе индукции с применением операторов символьной математики Maple. Замечена существенно большая точность метода Рэлея. Метод Донкерлея имеет более компактное выражение, но также дает приемлемую точность при большом числе панелей.

Литература

References

1. **Танасогло А.В.** Уточнение коэффициента динамичности анкерно-угловой опоры ВЛ 110 кВ при действии пульсационной составляющей ветровой нагрузки // *Металлические конструкции*. 2012. Т. 18. №. 2. С. 135—145.
2. **Пустовой Н.В., Левин В.Е., Красноруцкий Д.А., Кожевников А.Н.** Методика расчета колебаний участка воздушных ЛЭП с помощью редуцированной КЭ-модели металлических опор и дифференциальной модели системы стержней // *Сб. докл. XI Всеросс. съезда по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики*. 2015. С. 3161—3163.
3. **Запысова Е.А., Кожевников А.Н., Красноруцкий Д.А.** Исследование влияния дефектов в элементах конструкции на спектр частот собственных колебаний на примере имитационной модели опоры ВЛ // *Наука. Промышленность. Оборона*. 2018. Т. 19. С. 40—44.
4. **Рыбаков Л.С., Мишустин И.В.** Собственные колебания плоских регулярных упругих ферм ортогональной структуры // *Механика композиционных материалов и конструкций*. 1999. Т. 5. № 2. С. 3—16.
5. **Мишустин И.В., Рыбаков Л.С.** Колебания плоских упругих ферм ортогональной структуры // *Известия Академии наук. Серия «Механика твердого тела»*. 2003. № 2. С. 168—184.
6. **Ufimtsev E., Voronina M.** Research of Total Mechanical Energy of Steel Roof Truss during Structurally Nonlinear Oscillations // *Proc. Eng.* 2016. V. 150. Pp. 1891—1897.
7. **Ufimtsev E.** Dynamic Calculation of Nonlinear Oscillations of Flat Trusses. Pt. 2: Examples of Calculations // *Proc. Eng.* 2017. V. 206. Pp. 850—856.
8. **Chen J. e. a.** Vibration Reduction in Truss Core Sandwich Plate with Internal Nonlinear Energy Sink // *Composite Structures*. 2018. V. 193. Pp. 180—188.
9. **Baeza L., Ouyang H.** Vibration of a Truss Structure Excited by a Moving Oscillator // *J. Sound and Vibration*. 2009. V. 321. No. 3—5. Pp. 721—734.
10. **Shu J. e. a.** Assessment of a Cantilever Bridge Deck Slab Using Multi-level Assessment Strategy and Decision Support Framework // *Eng. Structures*. 2019. V. 200. P. 109666.
11. **Tejani G.G., Savsani V.J., Patel V.K., Mirjalili S.** Truss Optimization with Natural Frequency Bounds Using Improved Symbiotic Organisms Search // *Knowledge-based Systems*. 2018. V. 143. Pp. 162—178.
12. **Игнат'ев В.А.** Расчет регулярных стержневых систем. Саратов: Саратовское высшее военно-химическое военное училище, 1973.
1. **Tanasoglo A.V.** Utochnenie Koeffitsienta Dinamichnosti Ankerno-uglovoy Opory VL 110 kV pri Deystvii Pul'satsionnoy Sostavlyayushchey Vetrovoy Nagruzki. *Metallicheskie konstruksii*. 2012;18;2:135—145. (in Russian).
2. **Pustovoy N.V., Levin V.E., Krasnorutskiy D.A., Kozhevnikov A.N.** Metodika Rascheta Kolebaniy Uchastka Vozdushnykh LEP s Pomoshch'yu Redutsirovannoy KE-modeli Metallicheskikh Opor i Differentsial'noy Modeli Sistemy Sterzhney. *Sb. Dokl. XI Vseross. S'ezda po Fundamental'nym Problemam Teoreticheskoy i Prikladnoy Mekhaniki*. 2015:3161—3163. (in Russian).
3. **Zapysova E.A., Kozhevnikov A.N., Krasnorutskiy D.A.** Issledovanie Vliyaniya Defektov v Elementakh Konstruksii na Spektr Chastot Sobstvennykh Kolebaniy na Primere Imitatsionnoy Modeli Opory VL. *Nauka. Promyshlennost'. Oborona*. 2018;19:40—44. (in Russian).
4. **Rybakov L.S., Mishustin I.V.** Sobstvennye Kolebaniya Ploskikh Regulyarnykh Uprugikh Ferm Ortogonal'noy Struktury. *Mekhanika Kompozitsionnykh Materialov i Konstruksiy*. 1999;5;2:3—16. (in Russian).
5. **Mishustin I.V., Rybakov L.S.** Kolebaniya Ploskikh Uprugikh Ferm Ortogonal'noy Struktury. *Izvestiya Akademii Nauk. Seriya «Mekhanika Tverdogo Tela»*. 2003;2:168—184. (in Russian).
6. **Ufimtsev E., Voronina M.** Research of Total Mechanical Energy of Steel Roof Truss during Structurally Nonlinear Oscillations. *Proc. Eng.* 2016;150:1891—1897.
7. **Ufimtsev E.** Dynamic Calculation of Nonlinear Oscillations of Flat Trusses. Pt. 2: Examples of Calculations. *Proc. Eng.* 2017;206:850—856.
8. **Chen J. e. a.** Vibration Reduction in Truss Core Sandwich Plate with Internal Nonlinear Energy Sink. *Composite Structures*. 2018;193:180—188.
9. **Baeza L., Ouyang H.** Vibration of a Truss Structure Excited by a Moving Oscillator. *J. Sound and Vibration*. 2009;321;3—5:721—734.
10. **Shu J. e. a.** Assessment of a Cantilever Bridge Deck Slab Using Multi-level Assessment Strategy and Decision Support Framework. *Eng. Structures*. 2019;200:109666.
11. **Tejani G.G., Savsani V.J., Patel V.K., Mirjalili S.** Truss Optimization with Natural Frequency Bounds Using Improved Symbiotic Organisms Search. *Knowledge-based Systems*. 2018;143:162—178.
12. **Ignat'ev V.A.** Raschet Regulyarnykh Sterzhnevyykh Sistem. *Saratov: Saratovskoe Vysshee Voенно-khimicheskoe Voенnoe Uchilishche*, 1973. (in Russian).

13. Zok F.W., Latture R.M., Begley M.R. Periodic Truss Structures // *J. Mechanics and Physics of Solids*. 2016. V. 96. Pp. 184—203.
14. Hutchinson R.G., Fleck N.A. Microarchitected Cellular Solids the Hunt for Statically Determinate Periodic Trusses // *ZAMM J. Appl. Math. and Mechanics*. 2005. V. 85. No. 9. Pp. 607—617.
15. Hutchinson R.G., Fleck N.A. The Structural Performance of the Periodic Truss // *J. Mechanics and Physics of Solids*. 2006. V. 54. No. 4. Pp. 756—782.
16. Guest S.D., Hutchinson J.W. On the Determinacy of Repetitive Structures // *J. Mechanics and Physics of Solids*. 2003. V. 51. Pp. 383—391.
17. Kirsanov M. Trussed Frames and Arches: Schemes and Formulas. Cambridge: Cambridge Scholars Publ., 2020.
18. Кирсанов М.Н. Плоские фермы. Схемы и расчетные формулы. М.: ИНФРА-М, 2019.
19. Vorobev O. Bilateral Analytical Estimation of First Frequency of a Plane Truss // *Construction of Unique Buildings and Structures*. 2020. V. 92. Pp. 1—13.
20. Воробьев О.В. О методах получения аналитического решения для проблемы собственных частот шарнирных конструкций // *Строительная механика и конструкции*. 2020. № 1(24). С. 25—38.
21. Кирсанов М.Н., Тиньков Д.В. Анализ собственных частот колебаний плоской фермы с произвольным числом панелей // *Вестник МГСУ*. 2019. Т. 14. № 3(126). С. 284—292.
22. Ахмедова Е.Р., Канатова М.И. Собственные частоты колебаний плоской балочной фермы регулярной структуры // *Наука и образование в XXI веке: Сб. науч. тр. по материалам Междунар. науч.-практ. конф. Тамбов: Консалтинговая компания «Юком», 2014. С. 17—19.*
23. Канатова М.И. Частотное уравнение и анализ колебаний плоской балочной фермы // *Trends in Appl. Mechanics and Mechatronics*. 2015. Т. 1. С. 31—34.
13. Zok F.W., Latture R.M., Begley M.R. Periodic Truss Structures. *J. Mechanics and Physics of Solids*. 2016;96:184—203.
14. Hutchinson R.G., Fleck N.A. Microarchitected Cellular Solids the Hunt for Statically Determinate Periodic Trusses. *ZAMM J. Appl. Math. and Mechanics*. 2005;85;9:607—617.
15. Hutchinson R.G., Fleck N.A. The Structural Performance of the Periodic Truss. *J. Mechanics and Physics of Solids*. 2006;54;4:756—782.
16. Guest S.D., Hutchinson J.W. On the Determinacy of Repetitive Structures. *J. Mechanics and Physics of Solids*. 2003;51:383—391.
17. Kirsanov M. Trussed Frames and Arches: Schemes and Formulas. Cambridge: Cambridge Scholars Publ., 2020.
18. Kirsanov M.N. Ploskie Fermy. Skhemy i Raschetnye Formuly. M.: INFRA-M, 2019. (in Russian).
19. Vorobev O. Bilateral Analytical Estimation of First Frequency of a Plane Truss. *Construction of Unique Buildings and Structures*. 2020;92:1—13.
20. Vorob'ev O.V. O Metodakh Polucheniya Analiticheskogo Resheniya dlya Problemy Sobstvennykh Chastot Sharnirnykh Konstruktsiy. *Stroitel'naya Mekhanika i Konstruktsii*. 2020;1(24):25—38. (in Russian).
21. Kirsanov M.N., Tin'kov D.V. Analiz Sobstvennykh Chastot Kolebaniy Ploskoy Fermy s Proizvol'nym Chislom Paneley. *Vestnik MGSU*. 2019;14;3(126):284—292. (in Russian).
22. Akhmedova E.R., Kanatova M.I. Sobstvennye chastyoty Kolebaniy Ploskoy Balochnoy Fermy Regul'yarnoy Struktury. *Nauka i obrazovanie v XXI Veke: Sb. Nauch. Tr. po Materialam Mezhdunar. Nauch.-prakt. Konf. Tambov: Konsaltingovaya Kompaniya «Yukom», 2014:17—19. (in Russian).*
23. Kanatova M.I. Chastotnoe Uravnenie i Analiz Kolebaniy Ploskoy Balochnoy Fermy. *Trends in Appl. Mechanics and Mechatronics*. 2015;1:31—34. (in Russian).

Сведения об авторах:

Кирсанов Михаил Николаевич — доктор физико-математических наук, профессор кафедры робототехники, мехатроники, динамики и прочности машин НИУ «МЭИ», e-mail: mpei2004@yandex.ru

Воробьев Олег Владимирович — аспирант кафедры робототехники, мехатроники, динамики и прочности машин НИУ «МЭИ», e-mail: olvarg@mail.ru

Information about authors:

Kirsanov Mikhail N. — Dr.Sci. (Phys.-Math.), Professor of Robotics, Mechatronics, Dynamics and Machine Strength Dept., NRU MPEI, e-mail: mpei2004@yandex.ru

Vorob'yev Oleg V. — Ph.D.-student of Robotics, Mechatronics, Dynamics and Machine Strength Dept., NRU MPEI, e-mail: olvarg@mail.ru

Работа выполнена при поддержке: Междисциплинарной научно-образовательной школы Московского университета «Фундаментальные и прикладные исследования космоса»

The work is executed at support: Interdisciplinary Scientific and Educational School of Moscow University «Fundamental and Applied Space Research»

Конфликт интересов: авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов

Conflict of interests: the authors declare no conflict of interest

Статья поступила в редакцию: 15.11.2020

The article received to the editor: 15.11.2020