

Вывод зависимости величины прогиба плоской фермы от числа панелей*Кирсанов Михаил Николаевич**НИУ «МЭИ»**Профессор**Воропай Руслан Александрович**НИУ «МЭИ»**Студент***Аннотация**

Балочная статически определимая ферма со сложной решеткой, содержащей стойки раскосы, загружается по верхнему или нижнему поясу. Для вывода искомой зависимости применяется метод индукции и операторы системы Maple, позволяющие составлять и решать рекуррентные уравнения. Усилия в стержнях находятся в символьной форме методом вырезания узлов. Перемещение определяется по формуле Максвелла – Мора. Предполагается, что все стержни имеют одинаковую жесткость.

Ключевые слова: ферма, формула Максвелла - Мора, прогиб, индукция, Maple

The derivation of the dependence of the value of the flexure of a flat farm on the number of panels*Kirsanov Mikhail**NRU «MPEI»**Professor**Voropay Ruslan Alexandrovich**NRU «MPEI»**Student***Abstract**

A beam statically determinate truss with a complex grid containing struts of braces is loaded along the upper or lower belt. To derive the required dependence, the method of induction and the operators of the Maple system are used, which make it possible to compose and solve recurrent equations. Forces in the rods are obtained in the symbolic form cutting out the knots. The displacement is determined by the Maxwell-Mohr's formula. It is assumed that all the rods have the same rigidity.

Keywords: truss, Maxwell's formula - Mohr's, deflection, induction, Maple

В [1] получено аналитическое решение о прогибе фермы (рис. 1) под действием нагрузки, равномерно распределенной по верхнему поясу. В

настоящей работе это решение дополняется формулой для прогиба фермы под действием нагрузки по нижнему поясу.

Плоская симметричная ферма с двумя опорами статически определима. В ферме с n панелями в половине пролета число стержней – $n_s = 16n + 8$, включая три опорные стержня.

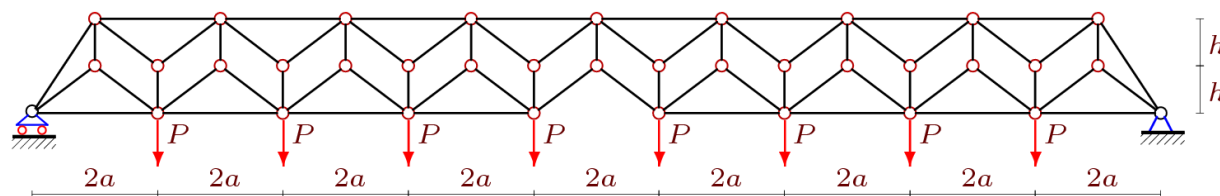


Рисунок 1 — Ферма при нагрузке снизу $n=4$

Для расчета прогиба по формуле Максвелла – Мора необходимо определить усилия в стержнях. Пользуясь программой [2] и опытом [1,3-9], составляем систему уравнений равновесия узлов в проекциях на оси. В программу [2] вводятся координаты узлов:

```
> for i to 2*n+2 do
>   x[i]:=2*a*(i-1); y[i]:=0;
> od:
> for i to 2*n+1 do
>   x[i+2*n+2]:=a*(2*i-1); y[i+2*n+2]:=h;
>   x[i+4*n+3]:=a*(2*i-1); y[i+4*n+3]:=2*h;
> od:
> for i to 2*n do
>   x[i+6*n+4]:=a*2*i; y[i+6*n+4]:=h;
> od:
```

Соединения узлов и стержней задаются по аналогии с заданием плоского графа

```
> for i to n do
>   N[i]:=[i,i+1]; N[i+n]:=[i+n+1,i+n+2];
> od:
> for i to 2*n+1 do
>   N[i+2*n]:=[i+2*n+2,i];
>   N[i+4*n+1]:=[i+2*n+2,i+1];
>   N[i+6*n+2]:=[i+2*n+2,i+4*n+3]; od:
> for i to 2*n do
>   N[i+8*n+3]:=[i+6*n+4,i+1];
>   N[i+10*n+3]:=[i+6*n+4,i+4*n+3];
>   N[i+12*n+3]:=[i+6*n+4,i+4*n+4];
>   N[i+14*n+3]:=[i+4*n+3,i+4*n+4];
> od:
```

Расчет прогиба выполняем по формуле Максвелла – Мора:

$$\Delta = \sum_{i=1}^{n_s-3} S_i^{(P)} S_i^{(1)} l_i / (EF).$$

Обозначено: $S_i^{(P)}$ — усилия в стержнях от заданной нагрузки, l_i — длины стержней, $S_i^{(1)}$ — усилия от единичной силы, приложенной к середине верхнего пояса, EF — жесткость стержней (одинаковы для все фермы).

Индукция дает следующий вид прогиба

$$\Delta = 2P(a^3 A_n + h^3 H_n + c^3 C_n + d^3 D_n) / h^2, \quad c = \sqrt{a^2 + h^2}, \quad d = \sqrt{a^2 + 4h^2}. \quad (1)$$

Для определения общего члена последовательности коэффициентов при a^3 проанализированы 10 выражений прогиба, откуда получены следующие коэффициенты: 2, 24, 108, 320, 750, 1512, 2744, 4608, 7290, 11000. Выявить общий член этой последовательности обычными средствами затруднительно. Оператор `rgf_findrecur` пакета `genfunc` системы Maple для дает следующее линейное однородное рекуррентное уравнение пятого порядка

$$A_n = 5A_{n-1} - 10A_{n-2} + 10A_{n-3} - 5A_{n-4} + A_{n-5}.$$

Для коэффициентов при d^3, h^3, c^3 получено следующее уравнение

$$D_n = 4D_{n-1} - 6D_{n-2} + 4D_{n-3} - D_{n-4}.$$

Решая рекуррентные уравнения с помощью оператора `rsolve`, для коэффициентов получаются следующие закономерности

$$\begin{aligned} A_n &= n^3(n+1), \\ H_n &= n(50n^3 + 76n^2 + 31n + 5) / 3, \\ C_n &= n(25n^3 + 38n^2 + 14n + 1) / 3, \\ D_n &= n(2n^2 + 3n + 1) / 2. \end{aligned}$$

Эти формулы являются конечной целью исследования, по которому можно оценить деформативность конструкции при любом числе панелей без потери точности, характерной для численных методов.

Аналогично, для нагрузки сверху (рис. 2) применительно к формуле (1) получаем коэффициенты, совпадающие с [1]:

$$\begin{aligned} A_n &= n^2(n^2 + n + 1/2), \quad H_n = n(50n^3 + 76n^2 + 58n + 20) / 3 + 1, \\ C_n &= n^3(25n + 38) / 3 + n(55n + 17) / 6 + 1/4, \quad D_n = n(n^2 + 3n/2 + 1) + 1/4. \end{aligned}$$

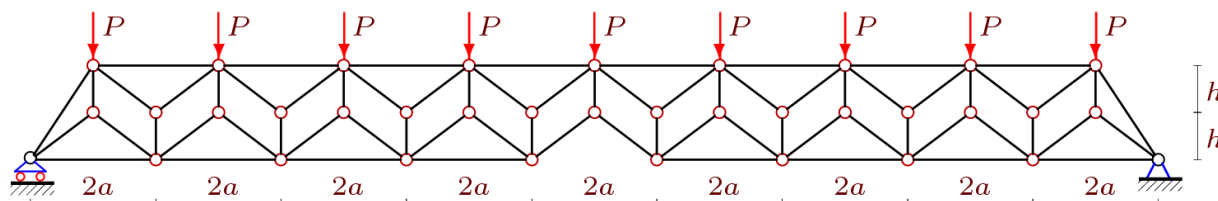


Рисунок 2 — Ферма при нагрузке сверху, $n=4$

Обзоры некоторых аналогичных исследований с применением программы [2] приведены в [10,11].

Библиографический список

1. Комерзан Е.В., Свириденко О. В. Аналитический расчет прогиба балочной фермы с приподнятой панелью в нижнем поясе // Постулат. 2017. №12. URL: <http://e-postulat.ru/index.php/Postulat/article/view/1034/1060>
2. Кирсанов М. Н. Maple и MapleT. Решения задач механики. СПб.: Изд-во Лань, 2012. 512 с.
3. Кирсанов М.Н. Вывод формулы для прогиба решетчатой фермы, имеющей случаи кинематической изменяемости // Строительная механика и конструкции. 2017. № 1 (14). С. 27–30.
4. Зименков Н. А. Формула для прогиба шпренгельной фермы с крестообразной решеткой // Молодежь и наука. 2017. №4.
5. Kirsanov M.N., Zaborskaya N.V. Deformations of the periodic truss with diagonal lattice. Magazine of Civil Engineering. 2017. No. 3. Pp. 61–67. doi: 10.18720/MCE.71.7.
6. Kirsanov M. An inductive method of calculation of the deflection of the truss regular type // Architecture and Engineering. 2016. Т. 1. № 3. С. 14-17.
7. Кирсанов М.Н. Анализ прогиба решетчатой балочной фермы распорного типа // Инженерно-строительный журнал. 2015. №5(57). С. 58–65. doi: 10.5862/MCE.57.5
8. Кирсанов М.Н. Анализ прогиба фермы пространственного покрытия с крестообразной решеткой // Инженерно-строительный журнал. 2016. № 4 (64). С. 52-58.
9. Кирсанов М.Н. Изгиб, кручение и асимптотический анализ пространственной стержневой консоли // Инженерно-строительный журнал. 2014. №5(49). С. 37–43. doi: 10.5862/MCE.49.4
10. Тиньков Д.В. Сравнительный анализ аналитических решений задачи о прогибе ферменных конструкций // Инженерно-строительный журнал. 2015. №5(57). С. 66–73.
11. Осадченко Н.В. Расчет прогиба плоской неразрезной статически определимой фермы с двумя пролетами // Постулат. 2017. №12. URL: <http://e-postulat.ru/index.php/Postulat/article/view/958/984>