

## ФОРМУЛА ДЛЯ ПРОГИБА ШПРЕНГЕЛЬНОЙ ФЕРМЫ С КРЕСТООБРАЗНОЙ РЕШЕТКОЙ

### Formula for the deflection of the latticework truss

**Зименков Н. А.**, студент Национального исследовательского университета «МЭИ»

(Москва, ул. Красноказарменная, 14)

*Рецензент:* Кирсанов М.Н., доктор физико-математических наук, профессор

#### Аннотация

Методом индукции выведена точная формула для прогиба шпренгельной фермы под действием распределенной нагрузки по нижнему поясу в зависимости от её размеров и числа панелей. Ферма имеет крестообразную решетку и две опоры. Учитывается только упругая деформация материала. Построены графики зависимости прогиба от числа панелей для различных высот фермы. Использовались операторы пакета компьютерной математики Maple 13, а также интеграл Максвелла-Мора.

**Ключевые слова:** ферма; упругая деформация; индукция; Maple.

#### Abstract

An accurate formula for the deflection of the truss under uniform load on the lower belt, that depends on its sizes and number of panels, is derived by the induction method. The truss under consideration has latticework construction and is based on two fixed hinges. Only elastic deformation is assumed. In addition, graphs of the deviation from the number of panels for different heights of truss are obtained. The integrals of Maxwell-Mohr and special operators in the computer algebra system Maple are used.

**Keywords:** truss; elastic deformation; induction; Maple.

Получение точной формулы для многоэлементных систем, в частности для ферм, имеет как теоретическое, так и практическое значение. Нахождение явных закономерностей изменения прогиба в зависимости от числа панелей и размеров фермы может дать представление об общем характере функциональных зависимостей. Точные формулы могут выявить ошибочные решения при выполнении практических расчетов с помощью пакетов численных расчетов, как правило основанных на методе конечных элементов. Поэтому ставится задача получить точную формулу прогиба для рассматриваемой шпренгельной фермы с крестообразной решеткой (рис. 1) под действием распределенной нагрузки по нижнему поясу в зависимости от числа панелей. При обобщении результата применим метод индукции, который также применялся для аналогичных задач в [1-11] для плоских и в [12-17] для пространственных ферм.

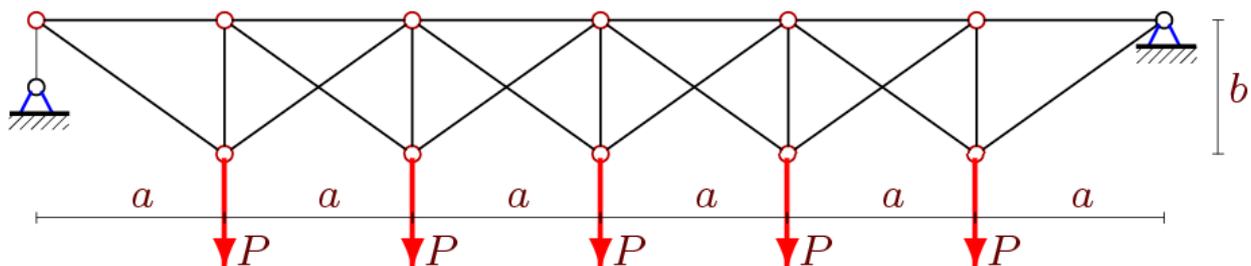


Рис. 1. Ферма при  $n=3$

Воспользуемся программой [18] в системе Maple (WaterlooMapleInc) для определения усилий в стержнях. При определении прогиба используем формулу Максвелла-Мора [19,20]:

$$\Delta = \sum_{i=1}^{m-3} S_i^{(P)} S_i^{(1)} l_i / (EF),$$

где  $S_i^{(1)}$  – усилия в стержнях фермы от действия единичной нагрузки, – от внешней,  $l_i$  – длина стержня  $i$ ,  $EF$  – жесткость,  $m = 8n$  – число всех стержней конструкции, включая три опорные.

Ниже приведён фрагмент программы, в котором составляется матрица системы уравнений равновесия узлов:

```
>G:=Matrix(n3,n3):
> for i to n3 do
>Lxy[1]:=x[Nend[i]]-x[Nbeg[i]]:
>Lxy[2]:=y[Nend[i]]-y[Nbeg[i]]:
> L[i]:=sqrt(Lxy[1]^2+Lxy[2]^2):
> for j to 2 do
>jj:=2*Nend[i]-2+j:
> if jj<=n3 then G[jj,i]:=-Lxy[j]/L[i]:fi:
>jj:=2*Nbeg[i]-2+j:
> if jj<=n3 then G[jj,i]:= Lxy[j]/L[i]:fi:
>od;
>od:
```

В данной задаче  $n$  — число панелей в половине пролета фермы. Используем это число в качестве параметра индукции. Последовательный расчет ферм с  $n$  изменяющимся от 2 до 10 и выведение общих формул для коэффициентов с помощью оператора `rgf_findrecur`[18] определяет формулу прогиба, которая имеет следующий вид:

$$EF\Delta = (A_n a^3 + L_n l^3 + B_n b^3) / 2b^2,$$

где  $A_n = n^2 (5/3n^2 - 2/3)$ ,  $L_n = n^2 (5/6n^2 + 1/6)$ ,  $l = \sqrt{a^2 + b^2}$ ,  $B_n = n^2 (5/3n^2 - 11/3) + 2$ .

Так для коэффициента было получено и решено следующее однородное линейное рекуррентное уравнение пятого порядка

$$A_n = 5A_{n-1} - 10A_{n-2} + 10A_{n-3} - 5A_{n-4} + A_{n-5}.$$

Введем обозначение  $\Delta' = EF\Delta / P$ . Получившийся график (рис.2) при длине фермы  $L=10$ м показывает монотонный рост прогиба при увеличении числа панелей. Также можно заметить, что при увеличении высоты фермы (параметра  $b$ ) уменьшается скорость роста функции, но значение прогиба при малых  $n$  становится значительно больше.

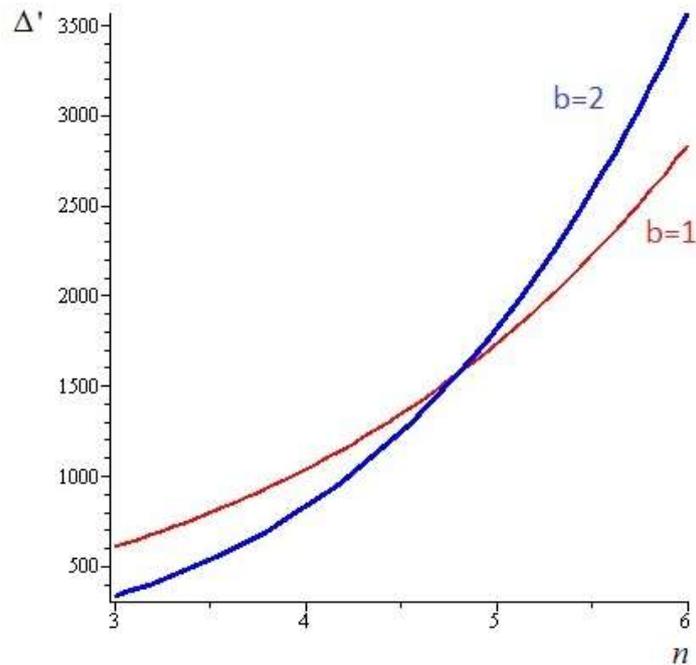


Рис. 2. Зависимость прогиба от числа панелей. Высота  $h$  в метрах

В работах [21-23] приведены примеры использования метода индукции в аналогичных задачах.

### Библиографический список

1. *Kirsanov M.* An inductive method of calculation of the deflection of the truss regular type // *Architecture and Engineering*. 2016. № 3. Vol. 1. Pp. 14–17.
2. *Курсанов М.Н.* Аналитический расчет регулярной балочной фермы с произвольным числом панелей со сложной решеткой // *Строительная механика и расчет сооружений*. 2016. № 3 (266). С. 16–19.
3. *Курсанов М.Н.* Аналитический расчет решетчатой фермы // *Моделирование и механика конструкций*. 2015. № 2 (2). С. 5.
4. *Курсанов М.Н.* Аналитический расчет многорешетчатой фермы // *Строительная механика и расчет сооружений*. 2014. № 6 (257). С. 2–6.
5. *Курсанов М.Н.* Анализ прогиба решетчатой балочной фермы распорного типа // *Инженерно-строительный журнал*. 2015. № 5 (57). С. 58–65.
6. *Курсанов М.Н.* Расчет жесткости стержневой решетки // *Вестник машиностроения*. 2015. № 8. С. 48–51.
7. *Kirsanov M.N.* Analytical calculation, marginal and comparative analysis of a flat girder // *Scientific Herald of the Voronezh State University of Architecture and Civil Engineering. Construction and Architecture*. 2016. № 1 (29). С. 84–105.
8. *Курсанов М.Н.* Формулы для расчета плоской балочной фермы с произвольным числом панелей // *Строительная механика и конструкции*. 2016. Т. 1. № 12. С. 19–24.
9. *Курсанов М.Н.* Сравнительный анализ жесткости двух схем арочной фермы // *Строительство уникальных зданий и сооружений*. 2015. № 9 (36). С. 44–55.
10. *Курсанов М.Н.* Скрытая особенность и асимптотические свойства одной плоской балочной фермы // *Строительная механика и расчет сооружений*. 2014. № 4 (255). С. 9–13.
11. *Курсанов М.Н.* Индуктивный анализ влияния погрешности монтажа на жесткость и прочность плоской фермы // *Инженерно-строительный журнал*. 2012. № 5(31). С. 38–42.

12. *Кирсанов М.Н., Андреевская Т.М.* Анализ влияния упругих деформаций мачты на позиционирование антенного и радиолокационного оборудования // Инженерно-строительный журнал. 2013. № 5 (40). С. 52–58.
13. *Кирсанов М.Н.* Статический расчет и анализ пространственной стержневой системы // Инженерно-строительный журнал. 2011. № 6. С. 28–34.
14. *Кирсанов М.Н.* Аналитический расчет пространственной стержневой регулярной структуры с плоской гранью // Строительная механика и расчет сооружений. 2015. № 2 (259). С. 2–6.
15. *Кирсанов М.Н.* Анализ прогиба фермы прямоугольного пространственного покрытия // Инженерно-строительный журнал. 2015. № 1 (53). С. 32–38.
16. *Кирсанов М.Н.* Напряженное состояние и деформации прямоугольного пространственного стержневого покрытия // Научный вестник Воронежского государственного архитектурно-строительного университета. Строительство и архитектура. 2016. № 1 (41). С. 93–100.
17. *Кирсанов М.Н.* Изгиб, кручение и асимптотический анализ пространственной стержневой консоли // Инженерно-строительный журнал. 2014. № 5 (49). С. 37–43.
18. *Кирсанов М. Н.* Maple и MapleT. Решения задач механики. СПб. : Лань, 2012. 512 с.
19. *Потапов В. Д., Александров А. В., Косицын С. Б., Долотказин Д. Б.* Строительная механика. В 2 кн. Кн. 1. Статика упругих систем М. : Высшая школа, 2007. 511 с.
20. *Белоконь М.А.* Строительная механика. М. : Проспект, 2015. 166 с.
21. *Тиньков Д.В.* Анализ точных решений прогиба регулярных шарнирно-стержневых конструкций // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2015. № 6. С. 21–28.
22. *Тиньков Д.В.* Сравнительный анализ аналитических решений задачи о прогибе ферменных конструкций // Инженерно-строительный журнал. 2015. № 5 (57). С. 66–73.
23. *Кийко Л.К.* Аналитическая оценка прогиба арочной фермы под действием ветровой нагрузки // Научный вестник. 2016. № 1 (7). С. 247–254.